ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
CÁLCULO INTEGRAL – 1ER. TÉRMINO 2014
DEBER NO. 6 – ING. LUIS ANDRÉS VARGAS

1.- <u>JUSTIFICANDO SU RESPUESTA</u>, CALIFIQUE COMO VERDADERA O FALSA LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

a) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{3^n-7^n}{5^n}\right]$ es convergente y su suma es 5

b) La serie $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3\sqrt{3}}+\frac{4}{9}+\cdots$ es divergente.

c) $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{8}{10^2}\right)\left(\frac{1}{10^2}\right)^n=\frac{8}{99}$

d) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{2^n}$ es convergente.

e) La serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3n^3+n+5}$$

Converge a $\frac{1}{3}$.

f) La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n}(x-3)^n$ es convergente para cualquier número real x.

g) Sea $a_n\geq 0$; Si $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\ (-1)^n a_n$ converge.

h) Si $0\leq a_n\leq b_n$, para toda $n\geq N$ y si $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge.

i) $\sum_{n=2}^{\infty}\ log\left(\frac{n-1}{n}\right)=-1$

j) La serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}\ nsen\left(\frac{\pi}{n}\right)$ converge a π.

k) Si $y=\sum_{n=0}^{\infty}\ (-1)^n\frac{x^n}{n!}$, entonces $y'+y=0$

l) La serie de potencias $y=x+\sum_{n=0}^{\infty}\ (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ es solución de la ecuación diferencial $y''+y-x=0$

m) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\ (-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)^{3/4}}$ es absolutamente convergente.

n) El radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2+n^2}$ es 1

o) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{e-1}{e}$

2.- TEMAS DE DESARROLLO:

a) Determine si las siguientes series numéricas son absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes o divergentes, justificando su respuesta:

   i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n(n+2)}$

   ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$

   iii. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nln(n)}$

b) Obtenga el intervalo de convergencia de las series de potencia:

   i. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

   ii. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^{2n+1}}{n(n+1)}$

c) Obtenga la serie de Maclaurin para la función $f(x) = x(e^x + e^{-x})$.

d) Sea f definida por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+2)}$$

   i. Determine el dominio de f.

   ii. Obtenga $f'(x)$ y determine su dominio.

e) Obtenga la serie de Taylor para la función $f(x) = \ln(x)$ alrededor de $a = 1$.

f) Determine si la siguiente serie es convergente o divergente. En caso de ser convergente determine su suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{3^n}$$

g) Calcular:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+4)}$$

h) Sea f una función definida por $f(x) = xe^x$

i. Determine la serie de Maclaurin para la función f.
ii. Derive término a término la serie obtenida en i.
iii. Utilizando la serie obtenida en ii, calcule la suma de la serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{(n+1)!}$$

i) Sea f una función definida por $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

i. Determine la serie de Maclaurin para la función f.
ii. Obtenga el intervalo de convergencia de la serie obtenida en a)

j) Dada la función $f(x) = x\arctan(x)$

i. Desarrolle en serie de potencias de x, la función dada.
ii. Utilizando el resultado de i., hallar el valor de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

k) Al derivar término a término la serie de Maclaurin correspondiente a la función $f(x) = xe^{-x^2}$, determine la suma de la serie numérica $\sum_{n=2}^{\infty} \ (-1)^n \frac{2n+1}{n!2^n}$

l) A partir de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

i. Obtenga la representación en series de potencias de la función definida por $f(x) = \ln(1-x^2)$
ii. Determine el intervalo de convergencia de la serie obtenida en i.
iii. Utilice la serie de i. para calcular la suma de la serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n9^n}$$

m) Dada la función $f(x) = sen(x)$

i. Obtenga su representación en serie de potencias de Taylor alrededor de $a = \frac{\pi}{4}$
ii. Obtenga el intervalo de convergencia de la serie obtenida en a)

n) Sea f la función definida por $f(x) = x\ln(x+1)$, determine:

i. La serie de Maclaurin de f

ii. El radio e intervalo de convergencia de la serie obtenida

iii. El valor de la suma de la serie numérica $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{n+2}{(n+1)2^{(n+1)}}$, derivando término a término la serie obtenida en i.