# Problemas Resueltos de Algebra Lineal (B)

## Segundo Parcial

Ramiro J. Saltos

# *Transformaciones Lineales*

*Definición:* *Sean* $V$ *y* $W$ *dos espacios vectoriales. Sea* $T:V \to W$ *una función que asigna a todo vector* $v \in V$ *un único vector* $w = T(v) \in W$. *Se dice que* $T$ *es una transformación lineal si:*

1. $\forall v, w \in V \qquad T(v+w) = T(v) + T(w)$
2. $\forall \alpha \in R \ \ \forall v \in V \qquad T(\alpha v) = \alpha T(v)$

## *Teorema 1*

*Sea* $T:V \to W$ *una transformación lineal. Entonces:*

1. $T(O_V) = O_W$
2. $\forall v \in V \quad T(v') = [T(v)]'$
3. $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3) + \ldots + \alpha_n T(v_n)$

## *Núcleo de una Transformación Lineal*

*Definición:* *Sea* $T:V \to W$ *una transformación lineal. El núcleo de* $T$, *denotado por* $Nu(T)$ *o* $Ker(T)$, *se define como:*

$$Nu(T) = \{v \in V / T(v) = O_W\}$$

## *Recorrido de una Transformación Lineal*

*Definición:* *Sea* $T:V \to W$ *una transformación lineal. El recorrido o imagen de* $T$, *denotado por* $\operatorname{Re}(T)$ *o* $\operatorname{Im}(T)$, *se define como:*

$$\operatorname{Re}(T) = \{w \in W / T(v) = w; v \in V\}$$

## *Teorema 2*

*Sea* $T:V \to W$ *una transformación lineal. Entonces se cumple que:*

1. *El núcleo de* $T$ *es un subespacio de* $V$
2. *El recorrido de* $T$ *es un subespacio de* $W$

## *Nulidad y Rango de una Transformación Lineal*

*Definición:* *Sea* $T:V \to W$ *una transformación lineal. La nulidad de* $T$, *denotada por* $v(T)$, *se define como:*

$$v(T) = \dim Nu(T)$$

*El rango de* $T$, *denotado por* $\rho(T)$, *se define como:*

$$\rho(T) = \dim \operatorname{Re}(T)$$

## *Teorema de la Dimensión para Transformaciones Lineales*

*Sea* $T: V \to W$ *una transformación lineal donde* $V$ *es un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces se cumple que:*

$$v(T) + \rho(T) = \dim V$$

## *Transformación Lineal Inyectiva*

*Definición: Sea* $T: V \to W$ *una transformación lineal. Se dice que* $T$ *es inyectiva si:*

$$\forall v, w \in V \ [T(v) = T(w)] \Rightarrow (v = w)$$

## *Transformación Lineal Sobreyectiva*

*Definición: Sea* $T: V \to W$ *una transformación lineal. Se dice que* $T$ *es sobreyectiva si todo vector de* $W$ *es la imagen de por lo menos un vector de* $V$*. Es decir:*

$$\forall w \in W \quad \exists v \in V \quad w = T(v)$$

*Dicho de otra manera,* $T$ *es sobreyectiva si* $\operatorname{Re}(T) = W$

## *Teorema 3*

*Una transformación lineal* $T: V \to W$ *es inyectiva, si y sólo si,* $Nu(T) = \{O_V\}$

## *Isomorfismo*

*Definición: Sea* $T: V \to W$ *una transformación lineal. Se dice que* $T$ *es un isomorfismo si* $T$ *es inyectiva y* $T$ *es sobreyectiva. Es decir,* $T$ *es un isomorfismo si* $T$ *es biyectiva.*

## *Espacios Vectoriales Isomorfos*

*Definición: Sean* $V$ *y* $W$ *dos espacios vectoriales. Se dice que* $V$ *y* $W$ *son espacios vectoriales isomorfos, denotado por* $V \cong W$*, si existe un isomorfismo* $T: V \to W$ *entre ellos.*

## *Teorema 4*

*Sea* $T: V \to W$ *una transformación lineal definida entre espacios vectoriales de dimensión finita, tales que* $\dim V = \dim W$*, entonces:*

1. *Si* $T$ *es inyectiva,* $T$ *es sobreyectiva.*
2. *Si* $T$ *es sobreyectiva,* $T$ *es inyectiva.*

## *Teorema 5*

*Sean* $V$ *y* $W$ *dos espacios vectoriales de dimensión finita. Sea* $T: V \to W$ *una transformación lineal. Entonces:*

1. *Si* $\dim V > \dim W$*,* $T$ *no es inyectiva.*
2. *Si* $\dim V < \dim W$*,* $T$ *no es sobreyectiva.*

*Lo que quiere decir, que si* $\dim V \neq \dim W$*,* $T$ *no es un isomorfismo*

## Teorema 6

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, se cumple que:

1. Si $T$ es inyectiva y $S = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ es linealmente independiente en $V$, entonces $S' = \{T(v_1), T(v_2), T(v_3), ..., T(v_n)\}$ es linealmente independiente en $W$
2. Si $T$ es sobreyectiva y $G = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ genera a $V$, entonces $G' = \{T(v_1), T(v_2), T(v_3), ..., T(v_n)\}$ genera a $W$
3. Si $T$ es un isomorfismo y $B = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ es una base de $V$, entonces $B' = \{T(v_1), T(v_2), T(v_3), ..., T(v_n)\}$ es una base de $W$

## Operaciones con Transformaciones Lineales

*Suma:* Sean $T_1: V \to W$ y $T_2: V \to W$ dos transformaciones lineales. La suma entre $T_1$ y $T_2$, denotada por $T_1 + T_2 : V \to W$, se define como:

$$\forall v \in V \quad (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$$

*Multiplicación por escalar:* Sea $\alpha \in R$. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Se define la multiplicación de $\alpha$ por $T$, denotada por $\alpha T : V \to W$ como:

$$\forall v \in V \quad (\alpha T)(v) = \alpha T(v)$$

*Composición:* Sean $T_1: V \to U$ y $T_2: U \to W$ dos transformaciones lineales. La composición entre $T_1$ y $T_2$, denotada por $T_2 \circ T_1 : V \to W$, se define como:

$$\forall v \in V \quad (T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v))$$

## Transformación Lineal Inversa

*Definición:* Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Se dice que $T$ es inversible si existe una transformación lineal $S: W \to V$, tal que:

1. $T \circ S : W \to W = Id_W$
2. $S \circ T : V \to V = Id_V$

Si tal es el caso, se llama a $S$ la inversa de $T$ y se denota $S = T^{-1}$

## Teorema 7

La transformación lineal $T: V \to W$ es inversible, si y sólo si, $T$ es un isomorfismo.

# Representación Matricial de una Transformación Lineal

## Teorema 8

*Sea* $T: V \to W$ *una transformación lineal donde* $V$ *y* $W$ *son espacios vectoriales de dimensión finita. Supóngase que* $\dim V = n$ *y* $\dim W = m$. *Sean* $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ *y* $B_2 = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_m\}$ *dos bases de* $V$ *y* $W$ *respectivamente.*

*La representación matricial de* $T$ *respecto de las bases* $B_1$ *y* $B_2$ *respectivamente está dada por:*

$$A_T = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ [T(v_1)]_{B2} & [T(v_2)]_{B2} & [T(v_3)]_{B2} & \cdots & [T(v_n)]_{B2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{pmatrix}_{mxn}$$

## Teorema 9

*Sea* $T: V \to W$ *una transformación lineal donde* $V$ *y* $W$ *son espacios vectoriales de dimensión finita. Sea* $A_T$ *la representación matricial de* $T$ *respecto a las bases* $B_1$ *y* $B_2$ *de* $V$ *y* $W$ *respectivamente. Entonces:*

$$\forall v \in V \quad [T(v)]_{B2} = A_T [v]_{B1}$$

## Teorema 10

*Sea* $T: V \to W$ *una transformación lineal donde* $V$ *y* $W$ *son espacios vectoriales de dimensión finita. Sea* $A_T$ *la representación matricial de* $T$ *respecto a las bases* $B_1$ *y* $B_2$ *de* $V$ *y* $W$ *respectivamente.* $T$ *es un isomorfismo si y sólo si* $\det(A_T) \neq 0$

**Tema 1**
**Sea** $T : M_{nxn} \to R$ **una función con regla de correspondencia:**

$$T(A) = \det(A)$$

**Donde** $A \in M_{nxn}$**. Determine si** $T$ **es una transformación lineal**

*1.* $\forall v, w \in V \quad T(v+w) = T(v) + T(w)$
*Sean* $v = A$ *y* $w = B \in M_{nxn}$

$$T(A+B) = T(A) + T(B)$$
$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$$

*Esto no siempre se cumple*

$\therefore T$ *no es una transformación lineal*

*Revisemos un ejemplo particular:*
*Sea* $V = M_{2x2}$ *y sean* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in V$

$$T(A+B) = T(A) + T(B)$$
$$T\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$9 = 1 + 4$$
$$9 = 5$$

*Y como vemos no se satisface la igualdad*

**Tema 2**
**Sea** $T: M_{nxn} \to R$ **una función con regla de correspondencia:**

$$T(A) = traza(A)$$

**Donde** $A \in M_{nxn}$**. Determine si** $T$ **es una transformación lineal**

*1.* $\forall v, w \in V \quad T(v+w) = T(v) + T(w)$
*Sean* $v = A$ *y* $w = B \in M_{nxn}$

$$T(A+B) = T(A) + T(B)$$
$$traza(A+B) = traza(A) + traza(B)$$
$$traza(A) + traza(B) = traza(A) + traza(B)$$

$\therefore$ *Se cumple el primer criterio de linealidad*

*2.* $\forall \alpha \in R \quad \forall v \in V \quad T(\alpha v) = \alpha T(v)$
*Sea* $\alpha \in R$ *. Sea* $v = A \in M_{nxn}$

$$T(\alpha A) = \alpha T(A)$$
$$traza(\alpha A) = \alpha traza(A)$$
$$\alpha traza(A) = \alpha traza(A)$$

$\therefore$ *Se cumple el segundo criterio de linealidad*

$\therefore T$ *es una transformación lineal*

**Tema 3**

**Sea $A$ una matriz cuadrada de orden $n$. Considere la transformación $T: M_{nxn} \to M_{nxn}$ dada por $T(A) = AB - BA$ ($B$ es una matriz fija de orden $n$). Demuestre que $T$ es una transformación lineal.**

*1.* $\forall v, w \in V \quad T(v+w) = T(v) + T(w)$

*Sean* $v = A_1$ *y* $w = A_2 \in M_{nxn}$

$$\begin{gathered} T(A_1 + A_2) = T(A_1) + T(A_2) \\ (A_1 + A_2)B - B(A_1 + A_2) = (A_1 B - BA_1) + (A_2 B - BA_2) \\ (A_1 + A_2)B - B(A_1 + A_2) = (A_1 B + A_2 B) - (BA_1 + BA_2) \\ (A_1 + A_2)B - B(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2)B - B(A_1 + A_2) \end{gathered}$$

$\therefore$ *Se cumple el primer criterio de linealidad*

*2.* $\forall \alpha \in R \quad \forall v \in V \quad T(\alpha v) = \alpha T(v)$

*Sea* $\alpha \in R$. *Sea* $v = A \in M_{nxn}$

$$\begin{aligned} &T(\alpha A) = \alpha T(A) \\ &(\alpha A)B - B(\alpha A) = \alpha(AB - BA) \\ &\alpha(AB - BA) = \alpha(AB - BA) \end{aligned}$$

$\therefore$ *Se cumple el segundo criterio de linealidad*

$\therefore T$ *es una transformación lineal*

*Cuando los ejercicios para determinar si una función es una transformación lineal estén basados en operaciones con matrices se recomienda trabajarlos de manera general como se lo ha hecho en los problemas planteados hasta el momento*

**Tema 4**

**Sea $T: R^2 \to R^2$ la función que transforma cada punto del plano en su simétrico respecto del eje $y$. Encontrar la regla de correspondencia de $T$ y demuestre que es una transformación lineal.**

*Determinar la regla de correspondencia de $T$ es sencillo ya que el punto simétrico en el plano respecto al eje $y$ es el punto en el plano cuya coordenada en $x$ cambia de signo. Entonces:*

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

*Ahora hay que verificar si se cumplen los criterios de linealidad*

*1)* $\forall v, w \in V \quad T(v+w) = T(v) + T(w)$

*Sea* $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *y* $w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in R^2$

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a-c \\ b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-c \\ b+d \end{pmatrix}$$

$\therefore$ *Se cumple el primer criterio de linealidad*

*2)* $\forall \alpha \in R \quad \forall v \in V \quad T(\alpha v) = \alpha T(v)$

*Sea* $\alpha \in R$. *Sea* $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

$\therefore$ *Se cumple el segundo criterio de linealidad*

$\therefore T$ *es una transformación lineal*

**Tema 5**
**Determine el rango y la nulidad de la siguiente transformación lineal**

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix}$$

*a) Por definición sabemos que:*

$$Nu(T) = \{v \in V / T(v) = O_W\}$$

*Aplicando la definición al problema nos queda:*

$$Nu(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in R^2 / T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

*Entonces para hallar el núcleo de la transformación lineal igualamos la regla de correspondencia de la misma, con el vector nulo de* $R^3$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ a+b = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

*De donde concluimos que:*

$$Nu(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad v(T) = 0$$

*b) Para el recorrido sabemos que:*

$$\mathrm{Re}(T) = \{w \in W / T(v) = w; v \in V\}$$

*Y aplicada al problema nos queda:*

$$\mathrm{Re}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 / T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

*Para hallar las condiciones del recorrido igualamos la regla de correspondencia con el vector típico de la imagen, luego planteamos la matriz aumentada y la reducimos, si es posible, hasta obtener la mayor cantidad de filas llenas de ceros.*

$$\begin{cases} a = x \\ a+b = y \\ b = z \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) A_{21}(-1) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) A_{32}(-1) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & y-x-z \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} y-x-z=0 \\ y = x+z \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B_{\mathrm{Re}(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \rho(T) = 2$$

**Tema 6**

**Dada la aplicación lineal** $T: R^3 \to M_{2x2}$ **definida por:**

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ b & b-c \end{pmatrix}$$

a) **Halle la representación matricial de** $T$ **respecto a las bases canónicas.**
b) **Encuentre** $Ker(T), \mathrm{Im}(T), \nu(T), \rho(T)$

*a) Para hallar la representación matricial de* $T$ *debemos encontrar las coordenadas de las transformadas de los vectores de la base del espacio de partida respecto a la base del espacio de llegada*

*Sean* $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *y* $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *las bases canónicas de* $R^3$ *y* $M_{2x2}$ *respectivamente*

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \left[ T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \left[ T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \left[ T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

*Estas coordenadas representan las columnas de la matriz asociada a* $T$ *, es decir:*

$$A_T = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \left[ T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{B2} & \left[ T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{B2} & \left[ T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{B2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$\therefore A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

*b)*

- $Nu(T)=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in R^3 / T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

*Igualamos la regla de correspondencia de la transformación lineal con el vector nulo del espacio de llegada*

$$\begin{cases}a-b=0\rightarrow a=0\\ b=0\\ b=0\\ b-c=0\rightarrow c=0\end{cases}$$

*De donde obtenemos:*

$$Nu(T)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad \therefore v(T)=0$$

- $\mathrm{Im}(T)=\left\{\begin{pmatrix}w&x\\y&z\end{pmatrix}\in M_{2x2} / T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w&x\\y&z\end{pmatrix}\right\}$

*Para hallar la imagen igualamos la regla de correspondencia de la transformación lineal con el vector típico de la imagen, planteamos el sistema de ecuaciones y reducimos la matriz aumentada, si es posible, hasta obtener la mayor cantidad de filas posibles llenas de ceros*

$$\begin{cases}a-b=w\\ b=x\\ b=y\\ b-c=z\end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&w\\0&1&0&x\\0&1&0&y\\0&1&-1&z\end{array}\right) A_{23}(-1) \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&w\\0&1&0&x\\0&0&0&y-x\\0&1&-1&z\end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}y-x=0\\ x=y\end{array}$$

*Ahora reemplazamos esta condición en el vector característico y extraemos la base*

$$\begin{pmatrix}w&x\\y&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w&x\\x&z\end{pmatrix}=w\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$B_{\mathrm{Re}(T)}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} \qquad \therefore \rho(T)=3$$

*Revisamos el teorema de la dimensión:*

$$\begin{array}{l}v(T)+\rho(T)=\dim V\\ 0+3=3\\ 3=3\end{array}$$

**Tema 7**

**Sea** $T: P_2 \rightarrow M_{2x2}$ **una aplicación definida por:**

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & b\\ a & c\end{pmatrix}$$

a) **Obtenga** $Ker(T), \mathrm{Im}(T), \nu(T), \rho(T)$

b) **Hallar la matriz asociada a** $T$ **con respecto a las bases**

$$B_1=\left\{x-1, x+1, x^2-1\right\}$$

$$B_2=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

*Primero debemos simplificar la regla de correspondencia de la transformación lineal, para ello realizamos las operaciones especificadas*

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & b\\ a & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c-a & b-c\\ 2c+a & 2b+c\end{pmatrix}$$

$$\therefore T\left(ax^2+bx+c\right)=\begin{pmatrix}c-a & b-c\\ 2c+a & 2b+c\end{pmatrix}$$

*a)*

- $Nu(T)=\left\{ax^2+bx+c\in P_2 \,/\, T\left(ax^2+bx+c\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

*Como ya sabemos hay que igualar la regla de correspondencia de la transformación lineal con el vector nulo del espacio de llegada, con lo cual obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones*

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=\begin{pmatrix}c-a & b-c\\ 2c+a & 2b+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} c-a=0\rightarrow c=a\\ b-c=0\rightarrow b=c\\ 2c+a=0\rightarrow 2c+c=0\rightarrow c=0\\ 2b+c=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=b=c=0$$

$$\therefore Nu(T)=\left\{0x^2+0x+0\right\} \qquad v(T)=0$$

- $\mathrm{Re}(T)=\left\{\begin{pmatrix}w & x\\ y & z\end{pmatrix}\in M_{2x2} \,/\, T\left(ax^2+bx+c\right)=\begin{pmatrix}w & x\\ y & z\end{pmatrix}\right\}$

*Igualamos la regla de correspondencia de la transformación lineal con el vector típico de la imagen, es decir:*

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=\begin{pmatrix}c-a & b-c\\ 2c+a & 2b+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w & x\\ y & z\end{pmatrix}$$

*Con lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} c-a=w \\ b-c=x \\ 2c+a=y \\ 2b+c=z \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & w \\ 0 & 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & 2 & y \\ 0 & 2 & 1 & z \end{array}\right) A_{13}(1) \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & w \\ 0 & 1 & -1 & x \\ 0 & 0 & 3 & y+w \\ 0 & 2 & 1 & z \end{array}\right) A_{24}(-2) \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & w \\ 0 & 1 & -1 & x \\ 0 & 0 & 3 & y+w \\ 0 & 0 & 3 & z-2x \end{array}\right) A_{43}(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & w \\ 0 & 1 & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y+w+2x-z \\ 0 & 0 & 3 & z-2x \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} y+w+2x-z=0 \\ z=y+w+2x \end{array}$$

*Reemplazamos la condición en el vector típico*

$$\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & y+w+2x \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{\operatorname{Re}(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \rho(T)=3$$

*b) Para hallar la matriz asociada a T debemos encontrar las coordenadas de las transformadas de los vectores de la base del espacio de partida respecto a la base del espacio de llegada*

$$T(x-1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad T(x+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad T(x^2-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_T = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right]_{B2} & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right]_{B2} & \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right]_{B2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

*Planteando la combinación lineal:*

$$T(v) = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4 \\ \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

- $\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right]_{B2}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4 \\ \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-1\rightarrow\alpha_3+\alpha_4=1\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=2\rightarrow\alpha_3-\alpha_4=4\\ \alpha_1+\alpha_2=-2\rightarrow\alpha_2=-3\\ \alpha_1=1\end{cases}\qquad \therefore\left[T(x-1)\right]_{B2}=\begin{pmatrix}1\\-3\\ 5/2\\ -3/2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\1&-1&4\end{array}\right)A_{12}(-1)\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&-2&3\end{array}\right)M_2\left(-1/2\right)\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&-3/2\end{array}\right)A_{21}(-1)\left(\begin{array}{cc|c}1&0&5/2\\0&1&-3/2\end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{l}\alpha_3=5/2\\ \alpha_4=-3/2\end{array}$$

- $\left[\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}\right]_{B2}$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4&\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4\\ \alpha_1+\alpha_2&\alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1\rightarrow\alpha_3+\alpha_4=-1\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=0\rightarrow\alpha_3-\alpha_4=-2\\ \alpha_1+\alpha_2=2\rightarrow\alpha_2=-1\\ \alpha_1=3\end{cases}\qquad \therefore\left[T(x+1)\right]_{B2}=\begin{pmatrix}3\\-1\\ -3/2\\ 1/2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-1\\1&-1&-2\end{array}\right)A_{12}(-1)\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-1\\0&-2&-1\end{array}\right)M_2\left(-1/2\right)\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-1\\0&1&1/2\end{array}\right)A_{21}(-1)\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-3/2\\0&1&1/2\end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{l}\alpha_3=-3/2\\ \alpha_4=1/2\end{array}$$

- $\left[\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-1\end{pmatrix}\right]_{B2}$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4&\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4\\ \alpha_1+\alpha_2&\alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-2\rightarrow\alpha_3+\alpha_4=-1\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=1\rightarrow\alpha_3-\alpha_4=2\\ \alpha_1+\alpha_2=-1\rightarrow\alpha_2=0\\ \alpha_1=-1\end{cases}\qquad \therefore\left[T(x^2-1)\right]_{B2}=\begin{pmatrix}-1\\0\\ 1/2\\ -3/2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-1\\1&-1&2\end{array}\right)A_{12}(-1)\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-1\\0&-2&3\end{array}\right)M_2\left(-1/2\right)\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-1\\0&1&-3/2\end{array}\right)A_{21}(-1)\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1/2\\0&1&-3/2\end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{l}\alpha_3=1/2\\ \alpha_4=-3/2\end{array}$$

*Reemplazando en la matriz:*

$$\therefore A_T=\begin{pmatrix}1&3&-1\\-3&-1&0\\ 5/2&-3/2&1/2\\ -3/2&1/2&-3/2\end{pmatrix}$$

**Tema 8**

**Sea $T: R^3 \to R^3$ una transformación lineal, tal que:**

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \; T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

**Encuentre la regla de correspondencia de $T$**

*Para resolver este tipo de ejercicios debemos obtener una base del espacio de partida con la característica de que conocemos en que vector del espacio de llegada se transforman los vectores de dicha base. Por lo general los vectores que nos dan como datos son linealmente independientes y constituyen una base del espacio de partida.*

*Seleccionamos un vector típico o representativo del espacio de partida, en este caso $R^3$ y lo escribimos como combinación lineal de la base formada. Luego procedemos a expresar los escalares en función de las variables que conforman el vector característico, así:*

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ es una base de } R^3$$

$$Sea \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in R^3$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \alpha_1+\alpha_3\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=a\\ \alpha_1+\alpha_3=b\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=c\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\1&0&1&b\\1&1&1&c\end{array}\right)\begin{array}{c}A_{12}(-1)\\A_{13}(-1)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\0&-1&1&b-a\\0&0&1&c-a\end{array}\right)\begin{array}{c}A_{21}(1)\\A_{32}(-1)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&b\\0&-1&0&b-c\\0&0&1&c-a\end{array}\right)\begin{array}{c}M_2(-1)\\A_{31}(-1)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&a+b-c\\0&1&0&c-b\\0&0&1&c-a\end{array}\right)$$

$$\to \alpha_1=a+b-c \qquad \alpha_2=c-b \qquad \alpha_3=c-a$$

*En la combinación lineal planteada al inicio sacamos transformación lineal a ambos lados, reemplazamos los datos y simplificamos*

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+b-c)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (c-b)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (c-a)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-c \\ 0 \\ 2a+2b-2c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c-b \\ c-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c-a \\ 0 \\ c-a \end{pmatrix}$$

$$\therefore T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c-b \\ a+b \end{pmatrix}$$

**Tema 9**

**Sea** $T: R^2 \to R^3$ **una transformación lineal y suponga que:**

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} \ \textbf{y} \ T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-6\\5\end{pmatrix}$$

**Calcule** $T\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$

*Primero hallamos la regla de correspondencia de T Sabemos que:*

$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ *es una base de* $R^2$

*Sea* $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in R^2$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 - \alpha_2\\ \alpha_1 + 2\alpha_2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & a\\ 1 & 2 & b\end{array}\right) A_{12}(-1) \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & a\\ 0 & 3 & b-a\end{array}\right) M_2(1/3) \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & a\\ 0 & 1 & \frac{b-a}{3}\end{array}\right) A_{21}(1) \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{2a+b}{3}\\ 0 & 1 & \frac{b-a}{3}\end{array}\right) \quad \to \quad \begin{array}{l}\alpha_1 = \frac{2a+b}{3}\\ \alpha_2 = \frac{b-a}{3}\end{array}$$

*Una vez expresados los escalares en función de las variables que conforman el vector típico, sacamos transformación lineal a ambos lados de la combinación lineal, reemplazamos igualdades y simplificamos*

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \alpha_1 T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \left(\frac{2a+b}{3}\right)\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{b-a}{3}\right)\begin{pmatrix}-8\\-6\\5\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \left(\frac{2a+b}{3}\right)\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{b-a}{3}\right)\begin{pmatrix}-8\\-6\\5\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-2a-b}{3}\\ \frac{6a+3b}{3}\\ \frac{2a+b}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{8a-8b}{3}\\ \frac{6a-6b}{3}\\ \frac{5b-5a}{3}\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a-3b\\ 4a-b\\ -a+2b\end{pmatrix} \qquad \therefore T\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-36\\-42\\21\end{pmatrix}$$

**Tema 10**

**Sea** $T : P_2 \to P_2$ **un operador lineal tal que:**

$$T(x) = 1$$
$$T(1+x) = 3 + x^2$$
$$T(2-x^2) = x - 1$$

**a) Determine la regla de correspondencia de** $T$

**b) Respecto al resultado anterior, encuentre** $Nu(T), \mathrm{Im}(T), \nu(T), \rho(T)$

**c) Determine la representación matricial de** $T$ **respecto a la base canónica de** $P_2$

*a) Primero hallamos la regla de correspondencia utilizando el procedimiento ya visto en los ejercicios anteriores*

*Sea* $B = \{x, x+1, 2-x^2\}$ *una base de* $P_2$

*Sea* $a + bx + cx^2 \in P_2$

$$a + bx + cx^2 = \alpha_1(x) + \alpha_2(x+1) + \alpha_3(2-x^2)$$
$$a + bx + cx^2 = (\alpha_2 + 2\alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_2)x + (-\alpha_3)x^2$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + 2\alpha_3 = a \\ \alpha_1 + \alpha_2 = b \\ -\alpha_3 = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \end{array}\right) \begin{matrix} P_{12} \\ M_3(-1) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & -c \end{array}\right) A_{21}(-1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & b-a \\ 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & -c \end{array}\right) \begin{matrix} A_{31}(2) \\ A_{32}(-2) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b-a-2c \\ 0 & 1 & 0 & a+2c \\ 0 & 0 & 1 & -c \end{array}\right)$$

$$\alpha_1 = -a + b - 2c \qquad \alpha_2 = a + 2c \qquad \alpha_3 = -c$$

$$T(a + bx + cx^2) = \alpha_1 T(x) + \alpha_2 T(x+1) + \alpha_3 T(2-x^2)$$

$$T(a + bx + cx^2) = (-a + b - 2c)(1) + (a + 2c)(3 + x^2) + (-c)(x-1)$$

$$\therefore T(a + bx + cx^2) = (2a + b + 5c) + (-c)x + (a + 2c)x^2$$

*b)*

- $Nu(T) = \{a + bx + cx^2 \in P_2 \,/\, T(a + bx + cx^2) = 0 + 0x + 0x^2\}$

$$\begin{cases} 2a + b + 5c = 0 \to b = 0 \\ -c = 0 \to c = 0 \\ a + 2c = 0 \to a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0$$

$$\therefore Nu(T) = \{0x^2 + 0x + 0\} \qquad \nu(T) = 0$$

*Para hallar el recorrido utilizamos el teorema que dice que si* $\dim V = \dim W$ *y* $T$ *es inyectiva, entonces* $T$ *es sobreyectiva.*

$T$ *es inyectiva porque* $Nu(T) = \{O_V\}$

$$\therefore \operatorname{Re}(T) = P_2 \qquad\qquad \rho(T) = 3$$

*c) La base canónica de* $P_2$ *es* $B = \{1, x, x^2\}$

$$A_T = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [T(1)]_B & [T(x)]_B & [T(x^2)]_B \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$T(1) = 2 + x^2 \rightarrow (2)(1) + (0)(x) + (1)(x^2) \qquad \Rightarrow [T(1)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(x) = 1 \rightarrow (1)(1) + (0)(x) + (0)(x^2) \qquad \Rightarrow [T(x)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = 5 - x + 2x^2 \rightarrow (5)(1) + (-1)(x) + (2)(x^2) \qquad \Rightarrow [T(x^2)]_B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A_T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Tema 11**

**Construya, de ser posible, una transformación lineal $T: R^3 \to P_2$ que cumpla con las siguientes condiciones:**

- $Nu(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} / a = -t, b = t, c = 2t, t \in R \right\}$
- $\text{Im}(T) = \left\{ ax^2 + bx + c \in P_2 / c = a + b \right\}$
- $T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 + x + x^2$ **y** $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + x^2$

*Primero debemos encontrar una base y la dimensión tanto del núcleo como del recorrido de la transformación y verificar si se cumple el teorema de las dimensiones. Si este no se cumple, entonces no existe una transformación lineal que cumpla las condiciones que del problema*

*Sea* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in Nu(T)$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \to B_{Nu(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad v(T) = 1$$

*Sea* $ax^2 + bx + c \in \text{Re}(T)$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + (a + b) = a(x^2 + 1) + b(x + 1)$$

$$\to B_{\text{Re}(T)} = \left\{ x^2 + 1, x + 1 \right\} \qquad \rho(T) = 2$$

*Revisamos el teorema de la dimensión*

$$v(T) + \rho(T) = \dim V$$

$$1 + 2 = 3$$

$$3 = 3$$

*Como se cumple el teorema anterior, ahora debemos formar una base del espacio de partida, en este caso $R^3$, y la obtenemos con los dos vectores que nos dan en el problema más el que forma parte de la base del $Nu(T)$. Se recomienda que de preferencia la base del espacio de partida contenga a la base del núcleo*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

*Una vez obtenida esta base el procedimiento a seguir es el mismo ya revisado en los ejercicios anteriores*

*Sea* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in R^3$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = a \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = b \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ 1 & 3 & 2 & c \end{array}\right) \begin{array}{c} A_{12}(-1) \\ A_{13}(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b-a \\ 0 & 3 & 3 & c-a \end{array}\right) \begin{array}{c} A_{23}(3) \\ M_2(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -2 & a-b \\ 0 & 0 & 9 & -4a+3b+c \end{array}\right) M_3\left(\tfrac{1}{9}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -2 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4a+3b+c}{9} \end{array}\right) \begin{array}{c} A_{31}(1) \\ A_{32}(2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5a+3b+c}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-3b+2c}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4a+3b+c}{9} \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{5a+3b+c}{9} \\ \alpha_2 = \frac{a-3b+2c}{9} \\ \alpha_3 = \frac{-4a+3b+c}{9} \end{array}$$

*Luego aplicamos transformación lineal en ambos lados de la combinación lineal y reemplazamos las igualdades que obtuvimos y las que nos dan en el ejercicio. Hay que recordar que la transformada de todo vector que pertenece al núcleo es igual al vector nulo del espacio de llegada*

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \left(\frac{5a+3b+c}{9}\right) T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{a-3b+2c}{9}\right) T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\frac{-4a+3b+c}{9}\right) T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \left(\frac{5a+3b+c}{9}\right)(x^2+1) + \left(\frac{a-3b+2c}{9}\right)(x^2+x+2) + \left(\frac{-4a+3b+c}{9}\right)(0x^2+0x+0)$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \left[\left(\frac{5a+3b+c}{9}\right) + \left(\frac{2a-6b+4c}{9}\right)\right] + \left(\frac{a-3b+2c}{9}\right)x + \left[\left(\frac{5a+3b+c}{9}\right) + \left(\frac{a-3b+2c}{9}\right)\right]x^2$$

$$\therefore T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \left(\frac{7a-3b+5c}{9}\right) + \left(\frac{a-3b+2c}{9}\right)x + \left(\frac{6a+3c}{9}\right)x^2$$

**Tema 12**

**Construya, de ser posible, una transformación lineal $T: S_{2x2} \to R^3$ que cumpla con las siguientes condiciones:**

- $Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_{2x2} \, / \, a = c \wedge b + 2c = 0 \right\}$
- $T\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ **y** $T\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\operatorname{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \, / \, x - y + z = 0 \right\}$

*Hallamos las dimensiones del núcleo y del recorrido para verificar si se cumple el teorema de la dimensión*

*Sea* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in Nu(T)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -2c \\ -2c & c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow B_{Nu(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad v(T) = 1$$

*Sea* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Re}(T)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow B_{\operatorname{Re}(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \rho(T) = 2$$

*Verificando el teorema*

$$\begin{aligned} v(T) + \rho(T) &= \dim V \\ 1 + 2 &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

*Ahora formamos una base del espacio vectorial de partida, hay que recordar que esta base, si es posible, debe contener a la base del núcleo*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Sea* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_{2x2}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & -2\alpha_1 + 2\alpha_3 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_3 & \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = a \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_3 = b \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ -2 & 0 & 2 & b \\ 1 & 2 & -1 & c \end{array}\right) \begin{matrix} A_{12}(2) \\ A_{13}(-1) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & -2 & 2 & 2a+b \\ 0 & 3 & -1 & c-a \end{array}\right) A_{32}(1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b+c \\ 0 & 3 & -1 & c-a \end{array}\right) \begin{matrix} A_{21}(1) \\ A_{23}(-3) \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2a+b+c \\ 0 & 1 & 1 & a+b+c \\ 0 & 0 & -4 & -4a-3b-2c \end{array}\right) M_3\left(-\tfrac{1}{4}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2a+b+c \\ 0 & 1 & 1 & a+b+c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4a+3b+2c}{4} \end{array}\right) \begin{matrix} A_{31}(-1) \\ A_{32}(-1) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4a+b+2c}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b+2c}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4a+3b+2c}{4} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \alpha_1 = \frac{4a+b+2c}{4} \qquad \alpha_2 = \frac{b+2c}{4} \qquad \alpha_3 = \frac{4a+3b+2c}{4}$$

*Finalmente:*

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \alpha_1 T\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 T\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 T\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \left(\frac{4a+b+2c}{4}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{b+2c}{4}\right)\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(\frac{4a+3b+2c}{4}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3b-6c}{4} \\ \frac{b+2c}{4} \\ \frac{4b+8c}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4a+3b+2c}{4} \\ \frac{4a+3b+2c}{4} \\ \frac{0}{4} \end{pmatrix}$$

$$\therefore T\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ a+b+c \\ b+2c \end{pmatrix}$$

**Tema 13**

**Sea $T: S_{2x2} \to P_2$, una transformación lineal con regla de correspondencia:**

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = (a-2b-c)+(-a+b+c)x+(b-3c)x^2$$

**Demuestre que $T$ es inversible y encuentre la regla de correspondencia de $T^{-1}$**

*Para averiguar si existe la inversa $T$ primero debemos comparar las dimensiones de los espacios donde opera la transformación; si estas dimensiones son diferentes, entonces $T$ no es inversible, caso contrario debemos proseguir con cualquiera de las siguientes opciones:*

1. *Encontrar el núcleo y ver si es igual al nulo del espacio vectorial de partida*
2. *Hallar la matriz asociada a $T$, calcular su determinante y si éste es diferente de cero, entonces $T$ es inversible.*

*Nos inclinaremos por la segunda alternativa por ser más corta. Para ello encontraremos la representación matricial de $T$ respecto a las bases canónicas para facilitar los cálculos*

*Sea* $S=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ *y* $P=\{1, x, x^2\}$ *las bases canónicas de* $S_{2x2}$ *y* $P_2$ *respectivamente.*

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1-x \to (1)(1)+(-1)x+(0)x^2 \qquad \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2+x+x^2 \to (-2)(1)+(1)x+(1)x^2 \qquad \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_P = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1+x-3x^2 \to (-1)(1)+(1)x+(-3)x^2 \qquad \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\to A_T \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

*Ahora calculamos el determinante escogiendo la fila o columna con más ceros que exista*

$$\det(A) = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = -3-1+6+1 \qquad \therefore T \text{ es inversible}$$

$$\det(A) = 3$$

$$\det(A) \neq 0$$

*Lo siguiente es hallar la inversa de* $T$ *y para ello igualamos la regla de correspondencia con el vector típico del espacio de partida, para este problema* $S_{2x2}$

$$T^{-1}\left[\left(a-2b-c\right)+\left(-a+b+c\right)x+(b-3c)x^2\right]=\begin{pmatrix} m & n \\ n & p \end{pmatrix}$$

*Y escalonamos la matriz con la finalidad de expresar* $a$ , $b$ *y* $c$ *en función de* $m$ , $n$ *y* $p$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & m \\ -1 & 1 & 1 & n \\ 0 & 1 & -3 & p \end{array}\right) A_{12}(1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & m \\ 0 & -1 & 0 & m+n \\ 0 & 1 & -3 & p \end{array}\right) \begin{array}{c} A_{21}(-2) \\ A_{23}(1) \\ M_2(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -m-2n \\ 0 & 1 & 0 & -m-n \\ 0 & 0 & -3 & m+n+p \end{array}\right) M_3\left(-1/3\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -m-2n \\ 0 & 1 & 0 & -m-n \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-m-n-p}{3} \end{array}\right) A_{31}(1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{-4m-7n-p}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -m-n \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-m-n-p}{3} \end{array}\right)$$

*Reemplazando:*

$$\therefore T^{-1}\left(m+nx+px^2\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{-4m-7n-p}{3} & -m-n \\ -m-n & \dfrac{-m-n-p}{3} \end{pmatrix}$$

**Tema 14**

**Sea** $T: R^3 \to R^3$ **la transformación lineal definida por:**

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ y \\ y+z \end{pmatrix}$$

**Determine si** $T$ **es un isomorfismo y en caso de serlo calcule** $T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

*Para determinar si T es inversible debemos calcular el determinante de cualquiera de sus matrices asociadas y si éste es diferente de cero, entonces T será inversible*

*Sea* $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *la base canónica de* $R^3$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to (1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \left[ T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to (0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \left[ T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \left[ T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Calculamos su determinante:*

$$\det(A_T) = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\therefore T$ *es un isomorfismo*

*Para calcular la inversa de T igualamos la regla de correspondencia con el vector típico del espacio de partida y escalonamos el sistema de ecuaciones hasta obtener la matriz identidad, así*

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x-z \\ y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

*El objetivo será de expresar las variables de la regla de correspondencia de T en función de las nuevas variables del vector típico del espacio de partida*

$$\Rightarrow \begin{cases} x-z=a \\ y=b \\ y+z=c \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) A_{23}(-1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-b \end{array}\right) A_{31}(1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-b+c \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-b \end{array}\right)$$

*Lo que nos queda del otro lado de la matriz aumentada es la regla de correspondencia de* $T^{-1}$ *y el paso final únicamente consiste en ir reemplazando cada igualdad adaptándola a los espacios que pertenece, que para* $R^3$ *es sencillo porque va directo, tal como está, así:*

$$T^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ b \\ c-b \end{pmatrix}$$

*Y calculando lo que nos pide el ejercicio:*

$$\therefore T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Tema 15**

**Sea** $T: P_1 \to R^2$ **una transformación lineal con regla de correspondencia:**

$$T(a+bx) = \begin{pmatrix} a+2b \\ 3a+7b \end{pmatrix}$$

**a)** **Encuentre la representación matricial de** $T$ **respecto a las bases** $B_1 = \{1+x, 3-2x\}$ **de** $P_1$ **y** $B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$ **de** $R^2$ **y la matriz asociada a** $T$ **respecto a las bases canónicas** $B_3 = \{1, x\}$ **de** $P_1$ **y** $B_4 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ **de** $R^2$

**b)** **Si** $T$ **es inversible, encuentre la regla de correspondencia de** $T^{-1}$

*a) Por teorema sabemos:*

$${}_{B1}A_{B2} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ [1+x]_{B2} & [3-2x]_{B2} \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$T(v) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 5\alpha_1 + 5\alpha_2 \end{pmatrix}$$

*Ahora debemos hallar las coordenadas de las transformadas de los vectores de la base $B_1$ respecto a la base $B_2$*

- $T(1+x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ 5\alpha_1 + 5\alpha_2 = 10 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 10 \end{array}\right) \begin{matrix} M_2(1/5) \\ P_{12} \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) A_{12}(-2) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} A_{21}(1) \\ M_2(-1) \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad [T(1+x)]_{B2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $T(3-2x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = -1 \\ 5\alpha_1 + 5\alpha_2 = -5 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & -5 \end{array}\right) \begin{matrix} M_2(1/5) \\ P_{12} \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right) A_{12}(-2) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} A_{21}(1) \\ M_2(-1) \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) [T(3-2x)]_{B2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore {}_{B1}A_{B2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

*Para encontrar la representación matricial de $T$ respecto a las bases canónicas realizamos el mismo procedimiento, aunque en este caso es más fácil encontrar las columnas de la matriz.*

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad [T(1)]_{B4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$T(x)=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} \qquad \left[T(x)\right]_{B4}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$$

$$\therefore {}_{B3}D_{B4}=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{pmatrix}$$

*b) Para saber si $T$ es inversible hay que calcular el determinante de cualquiera de las dos representaciones matriciales anteriores*

$$\det(A)=(1)(-1)-(1)(0)$$
$$\det(A)=-1$$
$$\det(A)\neq 0$$

$\therefore T$ *es inversible*

*Y como ya se vio en ejercicios anteriores para encontrar $T^{-1}$ igualamos la regla de correspondencia de $T$ con el vector típico del espacio de partida, en este caso $P_2$*

$$T^{-1}\begin{pmatrix}a+2b\\3a+7b\end{pmatrix}=m+nx$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & m\\3 & 7 & n\end{array}\right)A_{12}(-3)\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & m\\0 & 1 & n-3m\end{array}\right)A_{21}(-2)\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 7m-2n\\0 & 1 & n-3m\end{array}\right)$$

*Pero como la regla de correspondencia está en términos de $a$ y $b$ es mejor dejar expresada la respuesta en función de las ya mencionadas variables*

$$\therefore T^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=(7a-2b)+(-3a+b)x$$

**Tema 16**

**Sean** $T_1 : R^3 \to R^3$ **y** $T_2 : R^3 \to R^3$ **dos transformaciones lineales definidas por:**

$$T_1\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ 2a+b \\ a+b+c \end{pmatrix} \qquad T_2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+2c \\ 2a+3b \end{pmatrix}$$

**Encuentre la transformación lineal** $L = 2T_1 - 3(T_2 - T_1) + 5(T_2 \circ T_1)$

*Encontremos por separado cada transformación lineal para al final sumar todas*

- $2T_1$

*Para hallar esta transformación lineal es suficiente con multiplicar la regla de correspondencia de* $T_1$ *por dos a ambos lados, es decir:*

$$(2T_1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a-c \\ 2a+b \\ a+b+c \end{pmatrix} \qquad \to (2T_1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-2c \\ 4a+2b \\ 2a+2b+2c \end{pmatrix}$$

- $-3(T_2 - T_1)$

*Proseguimos de la siguiente manera:*

$$-3(T_2 - T_1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -3\left[ T_2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - T_1\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right]$$

*Reemplazamos las reglas de correspondencias de las respectivas transformaciones lineales y simplificamos las operaciones:*

$$-3(T_2 - T_1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -3\left[ \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+2c \\ 2a+3b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a-c \\ 2a+b \\ a+b+c \end{pmatrix} \right]$$

$$-3(T_2 - T_1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -3\left[ \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+2c \\ 2a+3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a+c \\ -2a-b \\ -a-b-c \end{pmatrix} \right]$$

$$-3(T_2 - T_1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -3\left[ \begin{pmatrix} b+2c \\ -a-2b+2c \\ a+2b-c \end{pmatrix} \right]$$

$$-3(T_2 - T_1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3b-6c \\ 3a+6b-6c \\ -3a-6b+3c \end{pmatrix}$$

- $5(T_2 \circ T_1)$

*El procedimiento es parecido al realizado anteriormente pero para realizar la composición es necesario que el espacio de llegada de la transformación lineal de la derecha sea el mismo espacio de partida de la transformación lineal de la izquierda, es decir:*

$$T_1 : V \to W$$
$$T_2 : W \to U$$

*Como podemos notar* $T_1$ *llega a* $W$ *y* $T_2$ *parte de* $W$*, sólo si esto se cumple se puede realizar la composición. Para el ejercicio no hay problema pues las dos funciones operan dentro del mismo espacio vectorial* $R^3$

$$5(T_2 \circ T_1) = 5\left[T_2\left(T_1\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)\right]$$

*Reemplazando la regla de correspondencia:*

$$5(T_2 \circ T_1) = 5\left[T_2\begin{pmatrix} a-c \\ 2a+b \\ a+b+c \end{pmatrix}\right]$$

*Luego evaluamos en la regla de correspondencia de* $T_2$ *donde hay que recalcar que la variable* $a$ *es ahora* $a-c$*,* $b$ *es* $2a+b$ *y* $c$ *es* $a+b+c$

$$5(T_2 \circ T_1) = 5\begin{bmatrix} (a-c)+(2a+b)+(a+b+c) \\ (a-c)-(2a+b)+2(a+b+c) \\ 2(a-c)+3(2a+b) \end{bmatrix}$$

*Simplificando las operaciones:*

$$5(T_2 \circ T_1) = 5\begin{pmatrix} 3a+2b \\ a+b+c \\ 8a+3b-2c \end{pmatrix}$$
$$5(T_2 \circ T_1) = \begin{pmatrix} 15a+10b \\ 5a+5b+5c \\ 40a+15b-10c \end{pmatrix}$$

*Una vez halladas todas las transformaciones lineales por separado, se procede con realizar la suma de todas ellas*

$$L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2T_1 + \left[-3\left(T_2 - T_1\right)\right] + 5\left(T_2 \circ T_1\right)$$

$$L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - 2c \\ 4a + 2b \\ 2a + 2b + 2c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3b - 6c \\ 3a + 6b - 6c \\ -3a - 6b + 3c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15a + 10b \\ 5a + 5b + 5c \\ 40a + 15b - 10c \end{pmatrix}$$

$$\therefore L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17a + 7b - 8c \\ 12a + 13b - c \\ 39a + 11b - 5c \end{pmatrix}$$

**Tema 17**
**Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas. Justifique formalmente su respuesta.**

**a) Existe una transformación lineal** $T : R^2 \to R^2$ **tal que** $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ **y** $T\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

*Sea* $\alpha = 3$ *y* $v = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$\alpha T(v) = T(\alpha v)$$
$$3T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = T\left[3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right] \quad \rightarrow \quad 3\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}12\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \textit{Falso}$$

**b) La función** $T : R^2 \to R^2$ **definida por** $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\1\end{pmatrix}$ **es una transformación lineal**

*1)* $T(v+w) = T(v) + T(w)$

*Sea* $v = \begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$ *y* $w = \begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix} \in R^2$

$$T\left[\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix}a_1 + a_2\\b_1 + b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 + b_1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_2 + b_2\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a_1 + a_2 + b_1 + b_2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 + a_2 + b_1 + b_2\\2\end{pmatrix}$$

*Contraejemplo*

*Sea* $v = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ *y* $w = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \in R^2$

$$v + w = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$$

$$\therefore \textit{Falso}$$

**c) La función** $T : R^2 \to R^3$ **definido por** $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a \end{pmatrix}$ **es lineal**

*1)* $\forall v, w \in V \quad T(v+w) = T(v) + T(w)$

*Sean* $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ *y* $w = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \in R^2$

$$T\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + b_2 \\ a_2 - b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \\ a_1 + a_2 - b_1 - b_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \\ a_1 + a_2 - b_1 - b_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

*2)* $\forall \alpha \in R \quad \forall v \in V \quad T(\alpha v) = \alpha T(v)$

*Sea* $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in R^2$. *Sea* $\alpha \in R$

$$T\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha a + \alpha b \\ \alpha a - \alpha b \\ \alpha a \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{Verdadero}$$

**d) Si** $T : V \to W$ **es una transformación lineal tal que** $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **es la representación matricial de** $T$ **respecto a las bases** $B_1$ **y** $B_2$**, entonces** $T$ **es un isomorfismo**

*Para saber si T es un isomorfismo bastará con calcular el determinante de la matriz asociada a T*

$$\det(A_T) = 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_T) = 3 + 2(2-9)$$

$$\det(A_T) = 3 - 14$$

$$\det(A_T) = -11$$

$$\therefore \text{Verdadero}$$

**e) Sea** $T: R^2 \to P_2$ **una transformación lineal. Si** $T\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 + x^2$ **y** $T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 + 2x$**, entonces** $T\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = -10 + 4x - x^2$

*Sabemos que:*

$\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ *es una base de* $R^2$*, es decir, que todo vector de* $R^2$ *se puede escribir como combinación lineal de los vectores de esta base.*

*Sea* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in R^2$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha_1 - \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

*Para hallar la regla de correspondencia de* $T$ *debemos expresar los escalares en función de* $a$ *y* $b$. *Planteamos la matriz aumentada y reducimos por Gauss*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & a \\ -1 & 2 & b \end{array}\right) P_{12} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & b \\ 3 & -1 & a \end{array}\right) \begin{matrix} A_{12}(3) \\ M_1(-1) \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -b \\ 0 & 5 & a+3b \end{array}\right) M_2(1/5) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -b \\ 0 & 1 & \dfrac{a+3b}{5} \end{array}\right) A_{21}(2)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{2a+b}{5} \\ 0 & 1 & \dfrac{a+3b}{5} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = \dfrac{2a+b}{5} \\ \alpha_2 = \dfrac{a+3b}{5} \end{matrix}$$

*Ahora volvemos a escribir la combinación lineal y aplicamos transformación lineal en ambos lados de la ecuación*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = T\left[\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

*Aplicamos las propiedades de las transformaciones lineales*

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha_1 T\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

*Reemplazamos los escalares por las igualdades encontradas y las transformadas de los vectores de la base con los datos del problema.*

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left(\frac{2a+b}{5}\right)(x^2+4) + \left(\frac{a+3b}{5}\right)(2x-3)$$

*Simplificando nos queda:*

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left(\frac{2a+b}{5}\right)x^2 + \left(\frac{2a+6b}{5}\right)x + \left(\frac{5a-5b}{5}\right)$$

*Y finalmente*

$$T\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}=\left(\frac{-10+5}{5}\right)x^2+\left(\frac{-10+30}{5}\right)x+\left(\frac{-25-25}{5}\right)$$
$$T\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}=-x^2+4x-10$$

$\therefore$ *Verdadero*

**f) Sea $T:P_2\to S_{2x2}$ una transformación lineal con regla de correspondencia:**

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}2c & a+b-c\\ a+b-c & c-b\end{pmatrix}$$

**Entonces, $T$ es un isomorfismo y** $T^{-1}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}=1-x+2x^2$

*Para saber si T es inversible debemos hallar la matriz asociada a T y calcular su determinante, como no nos dan ninguna base nosotros usamos las bases canónicas.*

*Sean* $P=\{1,x,x^2\}$ *y* $M=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ *las bases canónicas de* $P_2$ *y* $S_{2x2}$ *respectivamente.*

$$T(1)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=(0)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+(1)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+(0)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow[T(1)]_M=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$T(x)=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}=(0)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+(1)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow[T(x)]_M=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$T(x^2)=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}=(2)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+(1)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow[T(x^2)]_M=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\to A_T=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\qquad \det(A_T)=-1\begin{vmatrix}0&2\\-1&1\end{vmatrix}=-2\qquad \det(A_T)\neq 0$$

$\therefore T$ *es inversible*

*Sabemos que si T es inversible entonces* $T(v)=w\wedge T^{-1}(w)=v$

$$T(1-x+2x^2)=\begin{pmatrix}2(2) & 1+(-1)-2\\ 1-1-2 & 2+1\end{pmatrix}$$
$$T(1-x+2x^2)=\begin{pmatrix}4&-2\\-2&3\end{pmatrix}$$

$\therefore$ *Verdadero*

# Espacios con Producto Interno

## Producto Interno

*Definición:* Sea $V$ un espacio vectorial. Sea $f: VxV \to R$ una función que asigna a cada par de vectores $v, w \in V$ un único escalar $\alpha \in R$. Se dice que $f$ es un producto interno real en $V$ si cumple con las siguientes condiciones:

1. $\forall v \in V \quad f(v,v) \geq 0$
2. $\forall v \in V \quad f(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = O_V$
3. $\forall v, w \in V \quad f(v,w) = f(w,v)$
4. $\forall \alpha \in R \ \ \forall v, w \in V \quad f(\alpha v, w) = \alpha f(v,w)$
5. $\forall v, w, z \in V \quad f(v+w, z) = f(v,z) + f(w,z)$

*Notaciones:* Sea $V$ un espacio vectorial. Sea $f: VxV \to R$ un producto interno real en $V$, las diferentes notaciones que puede tomar $f$ están dadas por:

1. $f(v,w)$
2. $\langle v / w \rangle$

## Norma de un Vector

*Definición:* Sea $V$ un espacio con producto interno $f$. Sea $v \in V$. La norma o módulo de $v$, que se denota $\|v\|$, se define como:

$$\|v\| = \sqrt{f(v,v)}$$

## Vector unitario

*Definición:* Al vector $v \in V$ se lo llama vector unitario si su norma es igual a $1$

## Teorema 1

Sea $V$ un espacio con producto interno $f$. Entonces se cumple que:

1. $\forall \alpha \in R \ \ \forall v \in V \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
2. $\forall v \in V \quad f(v, O_V) = 0$

## Conjunto Ortonormal de Vectores

*Definición:* Sea $S = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial con producto interno $V$. Se dice que $S$ es un conjunto ortonormal de vectores si:

1. $\forall i \neq j \quad (v_i / v_j) = 0$
2. $\forall i = j \quad (v_i / v_j) = 1$

Si el conjunto $S$ satisface únicamente la primera condición se dice que $S$ es un conjunto ortogonal.

## Teorema 2

Sea $V$ un espacio vectorial con producto interno. Sea $S = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ un conjunto de vectores no nulos de $V$ y ortogonal. Entonces, $S$ es linealmente independiente en $V$

## Distancia entre dos Vectores

*Definición:* Sean $v$ y $w$ dos vectores cualesquiera del espacio con producto interno $V$. La distancia entre $v$ y $w$, denotada por $d(v,w)$, se define como:

$$d(v,w) = \|v - w\|$$

## Medida del ángulo entre dos Vectores

*Definición:* Sea $V$ un espacio con producto interno. La medida del ángulo entre dos vectores $v$ y $w$ cualesquiera no nulos de $V$, se define como:

$$\theta = arcCos\left(\frac{(v/w)}{\|v\| \cdot \|w\|}\right)$$

## Complemento Ortogonal

*Definición:* Sea $W$ un subespacio del espacio vectorial con producto interno $V$. El complemento ortogonal de $W$, denotado por $W^{\perp}$, se define como:

$$W^{\perp} = \{v \in V / (v/w) = 0; \forall w \in W\}$$

## Proyección Ortogonal

*Definición:* Sea $V$ un espacio vectorial con producto interno y $W$ un subespacio de $V$. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ una base ortonormal de $W$. Sea $v \in V$. La proyección de ortogonal de $v$ sobre $W$, denotada por $proy_W v$, se define como:

$$proy_W v = (v/u_1)u_1 + (v/u_2)u_2 + (v/u_3)u_3 + ... + (v/u_n)u_n$$

## Teorema 3

*Sea* $B=\{u_1,u_2,u_3,...,u_n\}$ *una base ortonormal del espacio con producto interno* $V$. *Sea* $v\in V$, *entonces:*

$$v=(v/u_1)u_1+(v/u_2)u_2+(v/u_3)u_3+...+(v/u_n)u_n = proy_V v$$

## Teorema 4

*Sea* $W$ *un subespacio del espacio con producto interno* $V$, *entonces se cumple que:*

1. $W^{\perp}$ *es un subespacio de* $V$
2. $W\cap W^{\perp}=\{O_V\}$
3. $\dim W+\dim W^{\perp}=\dim V$

## Teorema de Proyección

*Sea* $V$ *un espacio con producto interno. Sea* $W$ *un subespacio de* $V$. *Sea* $v\in V$. *Entonces existe un único vector* $h\in W$ *y* $p\in W^{\perp}$, *tal que:*

$$v=h+p$$

*Donde:*

- $h=proy_W v$
- $p=proy_{W^{\perp}} v$

## Matriz Ortogonal

*Definición: La matriz invertible* $Q$ *de* $nxn$ *se dice que es ortogonal si:*

$$Q^{-1}=Q^T$$

## Teorema 5

*Si* $Q$ *es una matriz ortogonal de* $nxn$, *entonces* $\det(Q)=1$ *o* $\det(Q)=-1$

## Teorema 6

*Una matriz* $Q$ *invertible de* $nxn$ *es ortogonal, si y sólo si sus columnas forman una base ortonormal para* $R^n$ *con el producto interno canónico.*

## Teorema de Aproximación de la Norma

*Sea* $V$ *un espacio con producto interno y* $W$ *un subespacio de* $V$. *Sea* $v$ *un vector cualquiera de* $V$. *De todos los vectores que se encuentran en* $W$, *el vector "más cercano" a* $v$ *es el vector* $proy_W v$, *es decir:*

$$\forall w\in[W-\{proy_W v\}]\quad \|v-proy_W v\|<\|v-w\|$$

**Tema 1**

**Sea el espacio vectorial $V = P_1$ donde se ha definido la función:**

$$f\langle p(x) | q(x) \rangle = p(0)q(0)$$

**Determine si ésta función es un producto interno real en $P_1$**

*Escribamos la regla de correspondencia en función de las variables del vector típico de* $P_1$

*Sea* $p(x) = ax + b$ *y* $q(x) = cx + d \in P_1$

$$f\langle ax + b | cx + d \rangle = (a(0) + b)(c(0) + d)$$
$$f\langle ax + b | cx + d \rangle = bd$$

*1.* $\forall v \in V \quad f\langle v | v \rangle \geq 0$

*Sea* $v = ax + b \in P_1$

$$f\langle ax + b | ax + b \rangle = bb = b^2$$

$b^2$ *siempre será mayor igual a cero*

$\therefore$ *Se cumple el primer punto*

*2.* $\forall v \in V \ \ f\langle v | v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = O_V$

*Sea* $v = ax + b \in P_1$

$$f\langle ax + b | ax + b \rangle = bb = b^2$$
$$b^2 = 0 \rightarrow b = 0$$

*Entonces la función será cero cuando* $b = 0$*, lo que nos dice que la variable* $a \in R$ *y no necesariamente deberá ser cero. Veamos un ejemplo:*

*Sea* $v = 2x + 0$

$$f\langle 2x + 0 | 2x + 0 \rangle = 0$$
$$(0)(0) = 0$$
$$0 = 0$$

*Se cumple la igualdad* $2x + 0 \neq O_V$

$\therefore$ $f$ *no es un producto interno real en* $P_1$

**Tema 2**

**Sea el espacio vectorial $V = P_1$ donde se ha definido la función:**

$$f\left\langle p(x) \middle| q(x) \right\rangle = \sum_{i=-1}^{1} p(i)q(i)$$

**Determine si ésta función es un producto interno real en $P_1$**

*Desarrollamos la sumatoria:*

$$\sum_{i=-1}^{1} p(i)q(i) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

*Es decir:*

$$f\left\langle p(x) \middle| q(x) \right\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

*Evaluamos de manera general para reducir un poco la regla de correspondencia:*

*Sea* $p(x) = ax + b$ *y* $q(x) = cx + d \in P_1$

$$f\left\langle ax+b \middle| cx+d \right\rangle = \left(a(-1)+b\right)\left(c(-1)+d\right) + \left(a(0)+b\right)\left(c(0)+d\right) + \left(a(1)+b\right)\left(c(1)+d\right)$$
$$f\left\langle ax+b \middle| cx+d \right\rangle = \left(-a+b\right)\left(-c+d\right) + \left(bd\right) + \left(a+b\right)\left(c+d\right)$$
$$f\left\langle ax+b \middle| cx+d \right\rangle = ac - ad - bc + bd + bd + ac + ad + bc + bd$$
$$f\left\langle ax+b \middle| cx+d \right\rangle = 2ac + 3bd$$

*1.* $\forall v \in V \quad f\left\langle v \middle| v \right\rangle \geq 0$

*Sea* $v = ax + b \in P_1$

$$f\left\langle ax+b \middle| ax+b \right\rangle \geq 0$$
$$2(a)(a) + 3(b)(b) \geq 0$$
$$2a^2 + 3b^2 \geq 0$$

$\therefore$ *Se cumple el primer punto*

*2.* $\forall v \in V \quad f\left\langle v \middle| v \right\rangle = 0 \Leftrightarrow v = O_V$

*Sea* $v = ax + b \in P_1$

$$f\left\langle ax+b \middle| ax+b \right\rangle = 0$$
$$2(a)(a) + 3(b)(b) = 0$$
$$2a^2 + 3b^2 = 0$$

*La única solución posible para que la ecuación anterior sea cero es que* $a = b = 0$*, es decir, que* $ax + b = 0x + 0 = O_V$

$\therefore$ *Se cumple el segundo punto*

3. $\forall v, w \in V \quad f\langle v|w\rangle = f\langle w|v\rangle$

Sea $v = ax + b$ y $w = cx + d \in P_1$

$$f\langle ax+b|cx+d\rangle = f\langle cx+d\,|ax+b\rangle$$
$$2ac+3bd = 2ca+3db$$
$$2ac+3bd = 2ac+3bd$$

$\therefore$ Se cumple el tercer punto

4. $\forall v, w, z \in V \quad f\langle v+w|z\rangle = f\langle v|z\rangle + f\langle w|z\rangle$

Sea $v = ax + b$ , $w = cx + d$ y $z = mx + n \in P_1$

$$f\langle (ax+b)+(cx+d)|mx+n\rangle = f\langle ax+b|mx+n\rangle + f\langle cx+d\,|mx+n\rangle$$
$$f\langle (a+c)x+(b+d)|mx+n\rangle = 2am+3bn+2cm+3dn$$
$$2(a+c)m+3(b+d)n = 2(a+c)m+3(b+d)n$$

$\therefore$ Se cumple el cuarto punto

5. $\forall \alpha \in R \ \ \forall v, w \in V \quad f\langle \alpha v|w\rangle = \alpha f\langle w|v\rangle$

Sea $\alpha \in R$ . Sea $v = ax + b$ y $w = cx + d \in P_1$

$$f\langle \alpha(ax+b)|cx+d\rangle = \alpha f\langle ax+b|cx+d\rangle$$
$$f\langle (\alpha a)x+(\alpha b)|cx+d\rangle = \alpha(2ac+3bd)$$
$$2(\alpha a)(c)+3(\alpha b)d = \alpha(2ac+3bd)$$
$$\alpha(2ac+3bd) = \alpha(2ac+3bd)$$

$\therefore$ $f$ es un producto interno real en $P_1$

**Tema 3**

**En $R^3$ se consideran los siguientes conjuntos:**

$$S = gen\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad L = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

**Expresar el vector $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in R^3$ como la suma de dos vectores, uno de $S$ y uno de $L$**

*Siempre se aconseja en este tipo de ejercicios escoger la base con menor número de vectores puesto que el proceso de ortonormalización es más difícil mientras más vectores hallan*

$$B_L = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \to v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

*Ahora hay que ortonormalizar la base:*

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \bullet v_1$$

$$\|v_1\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{(1)(1) + (0)(0) + (1)(1)} \qquad \to B_{OL} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{2}$$

*Se aconseja dejar la base ortonormal expresada de la manera anterior. Finalmente para hallar esos dos vectores hallamos la proyección del vector $v$ sobre el subespacio $L$ y el otro lo obtenemos por diferencia*

$$l = \Pr oy_L v$$

$$l = \langle v \mid u_1 \rangle \bullet u_1$$

$$l = \left(\frac{1}{2}\right)\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \bullet \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

*Cabe recalcar que los escalares en un producto interno real pueden salir sin ningún problema*

$$l=\left(\frac{1}{2}\right)\left[(x)(1)+(y)(0)+(z)(1)\right]\bullet\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$l=\left(\frac{x+z}{2}\right)\bullet\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore l=\begin{pmatrix}\frac{x+z}{2}\\0\\\frac{x+z}{2}\end{pmatrix}$$

*Para hallar el otro vector despejamos de:*

$$v=l+s$$

$$s=v-l$$

$$s=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{x+z}{2}\\0\\\frac{x+z}{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore s=\begin{pmatrix}\frac{x-z}{2}\\y\\\frac{x-z}{2}\end{pmatrix}$$

**Tema 4**

**Sea** $V = R_3$ **y** $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 / 3x - 2y + 6z = 0 \right\}$ **un subespacio de** $V$

**Determine:**

**a) El complemento ortogonal de** $W$

**b) La proyección de** $v$ **sobre** $W$ **si se conoce que** $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

*Para calcular el complemente primero necesitamos una base de W*

$$3x - 2y + 6z = 0$$
$$2y = 3x + 6z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x + 6z \\ 2z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Sea* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in W^{\perp}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$2a + 3b = 0 \qquad 3b + c = 0$$
$$2a = -3b \qquad c = -3b$$

$$\therefore W^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in R^3 / 2a + 3b = c + 3b = 0 \right\}$$

*Para hallar la proyección del vector que nos piden es mejor calcularla sobre* $W^{\perp}$ *debido a que la base de este subespacio tiene un solo vector y ortonormalizarla será más sencillo.*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3b \\ 2b \\ -6b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow B_{W^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

*Ahora procedemos a ortonormalizar esta base:*

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \bullet v_1$$

$$\|v_1\| = \sqrt{(v_1 / v_1)}$$
$$\|v_1\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle}$$
$$\|v_1\| = \sqrt{9+4+36}$$
$$\|v_1\| = \sqrt{49} = 7$$

$$\therefore B^*{}_{W^\perp} = \left\{ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

*Vamos a suponer que* $v$ *se puede escribir como la suma de dos vectores* $h \in W$ *y* $p \in W^\perp$*, hallaremos* $p$ *y luego contestaremos la pregunta al encontrar* $h = v - p$

$$p = \operatorname{Pr} oy_{W^\perp} v$$
$$p = (v \mid u_1) u_1$$

$$p = \left(\frac{1}{49}\right) \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$p = \left(\frac{1}{49}\right)(9+2-24) \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$p = \left(\frac{13}{49}\right) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^{-39}\!/_{49} \\ {}^{26}\!/_{49} \\ {}^{52}\!/_{49} \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} {}^{-186}\!/_{49} \\ {}^{75}\!/_{49} \\ {}^{248}\!/_{49} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \operatorname{Pr} oy_W v = \begin{pmatrix} {}^{-186}\!/_{49} \\ {}^{75}\!/_{49} \\ {}^{248}\!/_{49} \end{pmatrix}$$

**Tema 5**

**Sea** $H=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in R^3 / c=-2a+3b\right\}$ **un subespacio del espacio euclidiano** $R^3$ **con operaciones usuales y producto interno canónico:**

a) **Encuentre una base y determine la dimensión de** $H^{\perp}$

b) **Si** $v=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\in R^3$**, encuentre dos vectores** $h\in H$ **y** $p\in H^{\perp}$ **tales que** $v=h+p$

c) **Determine el** $\cos(\theta)$**, donde** $\theta$ **es la medida del ángulo formado entre** $v$ **y** $p$

*Primero obtenemos la base de* $H$

*Sea* $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in H$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\-2a+3b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow B_H=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\} \qquad \dim(H)=2$$

*Por definición:*

$H^{\perp}=\{v\in V/\langle v|h\rangle=0; h\in H\}$

*Sea* $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in H^{\perp}$

$$\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right\rangle=0 \qquad \left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle=0$$

$$a-2c=0 \qquad b+3c=0 \qquad \to H^{\perp}=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in R^3/a=2c\wedge b=-3c\right\}$$

$$a=2c \qquad b=-3c$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c\\-3c\\c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore B_{H^{\perp}}=\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad \dim(H^{\perp})=1$$

*Hay que recordar que por el teorema de proyección* $v = h + p$ *donde:*

$$h = \Pr oy_H v \;\; y \;\; p = \Pr oy_{H^{\perp}} v$$

*Y que estas proyecciones siempre se realizan sobre bases ortonormales, lo que quiere decir que hay que ortonormalizar las bases ya encontradas. Pero se recomienda ortonormalizar la base del subespacio con menor número de vectores para simplificar los cálculos y hallar el otro vector despejando de la ecuación antes mencionada. Para este ejercicio es aconsejable hallar la base ortonormal de* $H^{\perp}$ *y obviamente el vector* $p$

*Sea* $B_1 = \{u_1\}$ *una base ortonormal de* $H^{\perp}$

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 \;\; donde \;\; v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{(2)(2) + (-3)(-3) + (1)(1)}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{4 + 9 + 1}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{14}$$

$$\to u_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Se recomienda dejar la multiplicación expresada pues más adelante se simplificará*

$$p = \Pr oy_{H^{\perp}} v$$

$$p = \langle v | u_1 \rangle u_1$$

$$p = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \left( \frac{1}{\sqrt{14}} \right) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p = \left( \frac{1}{14} \right) \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p = \left( \frac{1}{14} \right) (2 - 3 + 2) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 2/14 \\ -3/14 \\ 1/14 \end{pmatrix}$$

*Para hallar* $h$ *despejamos de la ecuación original, es decir:* $h = v - p$

$$h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/14 \\ -3/14 \\ 1/14 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/14 \\ 3/14 \\ -1/14 \end{pmatrix} \qquad \therefore h = \begin{pmatrix} 12/14 \\ 17/14 \\ 27/14 \end{pmatrix}$$

*Finalmente por definición:*

$$Cos(\theta)=\frac{\langle v|w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

*Hallamos cada parte de fracción por separado:*

$$\langle h|\,p\rangle=\left\langle \begin{pmatrix}12/14\\17/14\\27/14\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}2/14\\-3/14\\1/14\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\langle h|\,p\rangle=\left\langle \frac{1}{14}\begin{pmatrix}12\\17\\27\end{pmatrix}\middle|\frac{1}{14}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\langle h|\,p\rangle=\left(\frac{1}{14}\right)\left(\frac{1}{14}\right)\left\langle \begin{pmatrix}12\\17\\27\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\langle h|\,p\rangle=\left(\frac{1}{196}\right)\left[(12)(2)+(17)(-3)+(27)(1)\right]$$

$$\langle h|\,p\rangle=0$$

*Como el producto interno de* $h$ *con* $p$ *salió* $0$*, un resultado esperado debido a que* $h$ *y* $p$ *son ortogonales entre sí:* $h\in H$ *y* $p\in H^{\perp}$*. Por definición el producto interno de cualquier vector de* $H$ *con cualquiera de* $H^{\perp}$ *es cero, entonces la expresión se simplifica a:*

$$Cos(\theta)=0$$
$$\theta=Cos^{-1}(0)$$
$$\theta=90^{\circ}$$

**Tema 6**

**En el espacio vectorial $P_1$ está definido el siguiente producto interno:**

$$(p(x)/q(x)) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

a) **Encuentre un vector $p(x)$ tal que su norma sea igual a $\sqrt{30}$ y la medida del ángulo con el vector $q(x) = 1 + x$ sea $\frac{\pi}{2}$ radianes.**

b) **Sea el subespacio de $P_1 : W = \{a + bx / a + b = 0\}$ ¿Cuál es el vector de $W$ que está "más cerca" de $r(x) = 1 - 2x$ ?**

*a) Para resolver este literal hay que tener en cuenta el polinomio $p(x)$ es una incógnita por ese motivo debemos suponer un $p(x)$ genérico.*

*Sea $p(x) = a + bx \in P_1$*

*El ejercicio nos da como información que la norma de $p(x)$ es $\sqrt{30}$, por tanto:*

$$\|p(x)\| = \sqrt{(p(x)|p(x))} = \sqrt{30}$$

$$(a + bx|a + bx) = 30$$

$$(a - b)(a - b) + a^2 + (a + b)(a + b) = 30$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + a^2 + 2ab + b^2 = 30$$

$$3a^2 + 2b^2 = 30$$

*Y así obtuvimos una primera ecuación, la otra que nos falta la obtenemos del segundo dato del literal, el cual nos dice que la medida del ángulo con el vector $q(x)$ es $\frac{\pi}{2}$*

$$Cos(\theta) = \frac{(p(x)|q(x))}{\|p(x)\| \cdot \|q(x)\|}$$

$$Cos(90) = \frac{(a + bx|1 + x)}{\|p(x)\| \cdot \|q(x)\|}$$

$$0 = \frac{(a - b)(0) + a + (a + b)(2)}{\|p(x)\| \cdot \|q(x)\|}$$

$$a + 2a + 2b = 0$$

$$3a + 2b = 0$$

*Ahora ya tenemos dos ecuaciones que nos relacionan las variables $a$ y $b$. Resolviendo el sistema*

$$\begin{cases} 3a^2 + 2b^2 = 30 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$3a = -2b \qquad a = \frac{-2}{3}b$$

$$3\left(\frac{-2}{3}b\right) + 2b^2 = 30$$
$$3\left(\frac{4}{9}b^2\right) + 2b^2 = 30$$
$$4b^2 + 6b^2 = 90$$
$$10b^2 = 90$$
$$b^2 = 9$$
$$b = \pm 3$$

$$a = \frac{-2}{3}(3) \qquad a = -2$$

*Existen dos vectores que cumplen las condiciones especificadas, así que escogemos sólo uno de ellos y nos queda:*

$\therefore\ p(x) = -2 + 3x$

*b) Primero necesitamos extraer una base de* $W$ *, luego debemos ortonormalizarla*
*Sea* $a + bx \in W$

$a + bx = -b + bx = b(-1 + x)$

$\rightarrow B_W = \{-1 + x\}$

*Debido a que la base sólo tiene un vector, ortonormalizarla consistirá únicamente en dividir el vector para su norma*

$$\|-1 + x\| = \sqrt{(1 - x|1 - x)}$$
$$\|-1 + x\| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow B_{NW} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-1 + x)\right\}$$

*Entonces para hallar el vector cercano debemos calcular su proyección sobre W*

$$\mathrm{Proy}_W\, r(x) = \left\langle r(x) \middle| \frac{1}{\sqrt{5}}(-1 + x)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-1 + x)\right)$$
$$\mathrm{Proy}_W\, r(x) = \left(\frac{1}{5}\right)\langle 1 - 2x | -1 + x\rangle(-1 + x)$$
$$\mathrm{Proy}_W\, r(x) = \left(\frac{1}{5}\right)[(3)(-2) + (1)(-1) + (-1)(0)](-1 + x)$$
$$\mathrm{Proy}_W\, r(x) = \left(\frac{-7}{5}\right)(-1 + x)$$

*Por lo tanto el vector más cercano a* $r(x) = 1 - 2x$ *es:* $\frac{7}{5} - \frac{7}{5}x$

**Tema 7**

**Sea** $V = M_{2x2}$**, considere el producto interno:**

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right\rangle = ae + 2bf + 2cg + dh$$

**Sea** $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} / a, c \in R \right\}$ **un subespacio de** $V$

a) **Determine el complemento ortogonal de** $H$

b) **Escriba la matriz** $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **como la suma de dos vectores** $A \in H$ **y** $B \in H^{\perp}$ **tales que** $C = A + B$

c) **Determine la medida del ángulo entre los vectores** $C$ **e** $I$ **si se sabe que** $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) **Determine la distancia entre los vectores** $C$ **e** $I$

e) **Encuentre una base ortonormal de** $V$

*a) Para resolver este literal primero debemos encontrar una base de* $H$*, como ya tenemos el vector típico:*

$$\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow B_H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Para hallar el complemento ortogonal, el vector típico de* $H^{\perp}$ *le aplicamos producto interno con cada uno de los vectores de la base de* $H$ *y lo igualamos a cero*

*Recuerden utilizar el producto interno definido en el ejercicio durante todo su desarrollo*

*Sea* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H^{\perp}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$a + 2b = 0 \qquad d + 2c = 0$$

$$\therefore H^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} / a + 2b = d + 2c = 0 \right\}$$

*Obtenemos su base:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b & b \\ c & -2c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow B_{H^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

*b) Debemos hallar la proyección de la matriz $C$ sobre el subespacio cuya base tenga el menor número de vectores, pero en este caso ambos subespacios tienen dimensión $2$, por lo tanto escogemos cualquiera de las dos bases para ortonormalizarla.*

*Las proyecciones siempre se calculan sobre bases ortonormales*

*Vamos a ortonormalizar $B_H$ y a esta nueva base la denotaremos como $B_1$*

$$B_H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad\qquad B_1 = \{u_1, u_2\}$$

*Supóngase que* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

*Utilizamos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt*

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \bullet v_1$$

*Recuerden para todo el ejercicio utilizamos el producto interno definido en el planteamiento del problema*

$$\|v_1\| = \sqrt{(v_1 \mid v_1)}$$
$$\|v_1\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \qquad\qquad \to u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\|v_1\| = \sqrt{(1)(1) + 2(1)(1) + 2(0)(0) + (0)(0)}$$
$$\|v_1\| = \sqrt{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2'\|} \bullet v_2'$$

$$v_2' = v_2 - (v_2 \mid u_1) \bullet u_1$$
$$v_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{3}\right) \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$v_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{3}\right) [(0)(1) + 2(0)(1) + 2(1)(0) + (1)(0)] \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$v_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|v_2'\| = \sqrt{(v_2 \mid v_2)}$$
$$\|v_2'\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \qquad \to u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\|v_2'\| = \sqrt{(1)(1) + 2(1)(1) + 2(0)(0) + (0)(0)}$$
$$\|v_2'\| = \sqrt{3}$$

$$\therefore B_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Cabe recalcar que no era necesario realizar todo el proceso debido a que los vectores de* $B_H$ *son ortogonales, es decir,* $(v_1 \mid v_2) = 0$

*Así que para ortonormalizar la base sólo era necesario dividir cada vector para su norma, pero realizamos todo el proceso para practicar más; pero en adelante, de ser posible, nos saltaremos los pasos innecesarios*

*Sabemos que:*

$$A = \mathrm{Pr}\,oy_H C$$
$$A = (C \mid u_1) \bullet u_1 + (C \mid u_2) \bullet u_2$$
$$A = \left(\frac{1}{3}\right) \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right) \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A = \left(\frac{1}{3}\right) [(1)(1) + 2(2)(1) + 2(3)(0) + (4)(0)] \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right) [(1)(0) + 2(2)(09 + 2(3)(1) + (4)(1)] \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A = \left(\frac{5}{3}\right) \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{10}{3}\right) \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 5/3 & 5/3 \\ 10/3 & 10/3 \end{pmatrix}$$

*Y para obtener la matriz* $B$ *despejamos de:*

$$C = A + B$$
$$B = C - A$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/3 & 5/3 \\ 10/3 & 10/3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

*c) Para determinar la medida del ángulo nos remitimos a la fórmula:*

$$Cos(\theta) = \frac{(C \mid I)}{\|C\| \cdot \|I\|}$$

*Pero por comodidad de cálculo la resolveremos por partes y al final reemplazaremos todos los valores*

$$(C \mid I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$(C \mid I) = (1)(1) + 2(2)(0) + 2(3)(0) + (4)(1)$$
$$(C \mid I) = 5$$

$$\|C\| = \sqrt{(C \mid C)}$$
$$\|C\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle}$$
$$\|C\| = \sqrt{(1)(1) + 2(2)(2) + 2(3)(3) + (4)(4)}$$
$$\|C\| = \sqrt{43}$$

$$\|I\| = \sqrt{(I \mid I)}$$
$$\|I\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$
$$\|I\| = \sqrt{(1)(1) + 2(0)(0) + 2(0)(0) + (1)(1)}$$
$$\|I\| = \sqrt{2}$$

*Finalmente reemplazando nos queda:*

$$Cos(\theta) = \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{43}}$$
$$\theta = ArcCos\left[\frac{5}{\sqrt{86}}\right]$$

*d) Para hallar la distancia también utilizamos una fórmula conocida:*

$$d(C,I) = \|C - I\|$$
$$d(C,I) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|$$
$$d(C,I) = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right\|$$
$$d(C,I) = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle}$$
$$d(C,I) = \sqrt{(0)(0) + 2(2)(2) + 2(3)(3) + (3)(3)}$$
$$d(C,I) = \sqrt{35}$$

*e) Para este último literal recordaremos aquel teorema que nos indica que para obtener una base ortonormal de $V$ basta con unir una base ortonormal de un subespacio $H$ cualquiera con la base ortonormal de su complemente ortogonal, es decir, $H^{\perp}$*

*Como ya tenemos la base ortonormal de $H$ solo falta ortonormalizar la base de $H^{\perp}$, la cual denotaremos como $B_2$*

$$B_{H^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\} \qquad B_2 = \{u_1, u_2\}$$

*Supóngase que* $v_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

*Pero estos dos vectores ya son ortogonales, solo falta que sean unitarios, así que dividiremos cada uno de ellos para su respectiva norma*

$$\|v_1\| = \sqrt{(v_1 \mid v_1)}$$
$$\|v_1\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$$
$$\|v_1\| = \sqrt{(-2)(-2) + 2(1)(1) + 2(0)(0) + (0)(0)}$$
$$\|v_1\| = \sqrt{6}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{(v_2 \mid v_2)}$$
$$\|v_2\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle}$$
$$\|v_2\| = \sqrt{(0)(0) + 2(0)(0) + 2(1)(1) + (-2)(-2)}$$
$$\|v_2\| = \sqrt{6}$$

$$B_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

*La base ortonormal de $V$ la denotaremos como $B_3$, entonces:*

$$B_3 = B_1 \cup B_2$$

$$B_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\therefore B_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

**Tema 8**
**Califique como verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Justifique formalmente su respuesta**

**a) Sea** $f : R^2 x R^2 \to R$ **una función con regla de correspondencia:**

$$f\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2a_1 b_2 - 6a_2 b_1$$

**Entonces** $f$ **es un producto interno real en** $R^2$

*Para averiguar si la función dada es un producto interno habrá que averiguar si se cumplen las condiciones del producto interno*

*I)* $\forall v \in V \quad f(v|v) \geq 0$

*Sea* $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in R^2$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0$$
$$2ab - 6ab \geq 0$$
$$-4ab \geq 0$$
$$ab \leq 0$$

*No se cumple el primer punto*

*Pero hay que plantear el contraejemplo aunque ya esté demostrado formalmente que no es un producto interno*

*Sea* $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^2$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0$$
$$2(1)(1) - 6(1)(1) \geq 0$$
$$-4 \geq 0$$

$\therefore$ $f$ *no es un producto interno*

$\therefore$ *Falso*

**b)** $\forall r,t \in R:\ A = \begin{pmatrix} rSen(t) & Cos(t) \\ Cos(t) & -rSen(t) \end{pmatrix}$ **es ortogonal**

*Para que la matriz sea ortogonal, el producto interno entre sus columnas debe ser igual a* $0$ *y al mismo tiempo el producto interno de cada columna consigo misma debe ser igual a* $1$. *Entonces, utilizando el producto interno canónico:*

$$\left\langle \begin{pmatrix} rSen(t) \\ Cos(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} Cos(t) \\ -rSen(t) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$
$$rSen(t)Cos(t) - rSen(t)Cos(t) = 0$$
$$0 = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} rSen(t) \\ Cos(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} rSen(t) \\ Cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$
$$r^2Sen^2(t) + Cos^2(t) = 1$$
$$r^2Sen^2(t) + 1 - Sen^2(t) = 1$$
$$Sen^2(t)\left[r^2 - 1\right] = 0$$

$$Sen^2(t) = 0$$
$$Sen(t) = 0$$
$$t = 0 \wedge t = 2\pi$$

$$r^2 - 1 = 0$$
$$r^2 = 1$$
$$r = \pm 1$$

*Por lo tanto la igualdad sólo se cumple para los valores de* $r$ *y* $t$ *encontrados y no para todos los reales. Se igual procedimiento para la segunda columna*

$$\therefore\ Falso$$

**c) Sea** $V$ **un espacio vectorial real con producto interno. Sean** $u, v \in V$ **dos vectores ortonormales. Si los vectores** $\alpha u + \beta v$ **y** $\alpha u - \beta v$ **son ortogonales, entonces** $|\alpha| = |\beta|$

$$(\alpha u + \beta v / \alpha u - \beta v) = 0$$
$$(\alpha u / \alpha u) + (\alpha u / -\beta v) + (\beta v / \alpha u) + (\beta v / -\beta v) = 0$$
$$\alpha^2 (u/u) - \alpha\beta(u/v) + \alpha\beta(u/v) - \beta^2(v/v) = 0$$

*Pero como los vectores* $u$ *y* $v$ *son ortonormales, sabemos que:* $(u/u) = (v/v) = 1$

$$\alpha^2(u/u) - \beta^2(v/v) = 0$$
$$\alpha^2 - \beta^2 = 0$$
$$\alpha^2 = \beta^2$$
$$|\alpha| = |\beta|$$

$$\therefore Verdadero$$

# Valores y Vectores Propios

*Valor y Vector Propio de una Matriz:* Sea $A$ una matriz de $nxn$. Se dice que $\lambda$ es un valor propio de $A$ si existe un vector no nulo $X \in R^n$, tal que $AX = \lambda X$. En tal caso se dice que $X$ es un vector propio de $A$ asociado al valor propio $\lambda$

*Valor y Vector Propio de una Transformación Lineal:* Sea $V$ un espacio vectorial y $T: V \to V$ una transformación lineal. Se dice que $\lambda$ es un valor propio de de $T$, si existe un vector propio no nulo $v \in V$, tal que $T(v) = \lambda v$. En tal caso se dice que $v$ es un vector propio de $T$ asociado al valor propio $\lambda$

## Teorema 1

Sea $A$ una matriz de $nxn$. Entonces $\lambda$ es un valor propio de $A$ si y sólo si:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

## Matriz Semejante

*Definición:* Las matrices $A$ y $B$ de $nxn$ se dice que son semejantes si existe una matriz invertible $C$ de $nxn$ tal que:

$$B = C^{-1} \cdot A \cdot C$$

## Teorema 2

Sean $A$ y $B$ dos matrices semejantes de $nxn$. Entonces se cumple que:

1. $\det(A) = \det(B)$
2. $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$

Y por tanto $A$ y $B$ tienen los mismos valores propios pero no necesariamente los mismos vectores propios

## Teorema 3

Sea $\lambda$ un valor propio de la matriz $A$ de $nxn$. Entonces:

$$E_\lambda = \{X \in C^n \,/\, AX = \lambda X\}$$

Es un subespacio de $C^n$ y es llamado espacio propio de $A$ asociado al valor propio $\lambda$

## Teorema 4

Sea $\lambda$ un valor propio de la transformación lineal $T: V \to V$. Entonces:

$$E_\lambda = \{v \in V \,/\, T(v) = \lambda v\}$$

Es un subespacio de $V$ y es llamado espacio propio de $T$ asociado al valor propio $\lambda$

## *Multiplicidad Geométrica*

*Definición:* Sea $E_\lambda$ el espacio propio de la matriz $A$ de $nxn$ o de una transformación lineal $T:V \to V$ asociado al valor propio $\lambda$. Se define la multiplicidad geométrica de $\lambda$, denotada por $mg(\lambda)$, como:

$$mg(\lambda) = \dim E_\lambda$$

### *Teorema 5*

Sea $\lambda$ un valor propio de la matriz $A$ de $nxn$ o de una transformación lineal $T:V \to V$ en el espacio de dimensión finita $V$. Entonces, se cumple que:

$$1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$$

### *Teorema 6*

Vectores propios asociados a valores propios diferentes son linealmente independientes.

### *Teorema 7*

Sea $A$ una matriz simétrica de $nxn$ con componentes reales. Si $\lambda$ es un valor propio de $A$, entonces $\lambda$ es un número real

### *Teorema 8*

Sea $A$ una matriz de $nxn$ simétrica. Sea $X_1$ un vector propio de $A$ asociado al valor propio $\lambda_1$ y $X_2$ un vector propio de $A$ asociado al valor propio $\lambda_2$.

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $X_1$ y $X_2$ son ortogonales.

### *Teorema 9*

Sea $A$ una matriz de $nxn$. Si $A$ tiene exactamente $n$ valores propios diferentes, entonces $A$ es diagonalizable

## *Matriz Diagonalizable*

*Definición:* Se dice que la matriz $A$ de $nxn$ es diagonalizable si existe una matriz inversible $C$ de $nxn$ tal que:

$$D = C^{-1}AC$$

Es decir, una matriz $A$ de $nxn$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal $D$ de $nxn$ tal que $A$ y $D$ son semejantes

### *Teorema 10*

Una matriz de $nxn$ es diagonalizable si tiene $n$ vectores propios linealmente independientes

## Transformación Lineal Diagonalizable

*Definición:* La transformación lineal $T: V \to V$, donde $V$ es un espacio vectorial de dimensión finita, se dice que es diagonalizable si existe una base $B$ de $V$ respecto de la cual la representación matricial de $T$ es una matriz diagonal

Teorema 11
Una matriz $A$ de $nxn$ es diagonalizable si cumple que, por cada valor propio de $A$:

$ma(\lambda) = mg(\lambda)$

## Matriz Diagonalizable Ortogonalmente

*Definición:* Una matriz $A$ de $nxn$ se dice que es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal $Q$ de $nxn$ tal que;

$$D = Q^T AQ$$

Donde $D$ es una matriz diagonal semejante a la matriz $A$

### Teorema 11

Una matriz $A$ de $nxn$ es diagonalizable ortogonalmente, si y sólo si, $A$ es una matriz simétrica

**Tema 1**
**Halle los valores y vectores propios de la siguiente matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

*Para hallar los valores propios debemos encontrar el polinomio característico y extraer sus raíces, muchas veces es necesario utilizar la división sintética para poder factorizar la expresión*

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \\
&(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 1\right] + (-1)(1-\lambda) = 0 \\
&(1-\lambda)(2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1) - 1 + \lambda = 0 \\
&(1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) - 1 + \lambda = 0 \\
&\lambda^2 - 3\lambda + 1 - \lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 1 + \lambda = 0 \\
&\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0 \\
&\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0
\end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \begin{aligned} &\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ &(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 3$$

$$\therefore \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= 3 \end{aligned}$$

*Finalmente debemos encontrar los vectores propios y para ello debemos hallar una base de los espacios* $E_\lambda$
*El procedimiento consiste en reemplazar cada valor propio en la matriz* $A - \lambda I$ *y resolver el siguiente sistema homogéneo:*

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Entonces para hallar cada espacio planteamos el sistema mencionado y reducimos la matriz hasta obtener la mayor cantidad de ceros posibles*

- $E_{\lambda 1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2-0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) A_{13}(-1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) A_{23}(1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

*De donde extraemos las siguientes igualdades:*

$$\begin{array}{ll} a+c=0 & b-c=0 \\ a=-c & b=c \end{array}$$

*Reemplazando en el vector típico*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $E_{\lambda 2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2-1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} A_{21}(1) \\ A_{23}(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} -c=0 & a-b=0 \\ c=0 & a=b \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $E_{\lambda 3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2-3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) A_{31}(2) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} A_{21}(-1) \\ A_{23}(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} -2b-c=0 & a+b=0 \\ c=-2b & a=-b \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ -2b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \therefore v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Tema 2**

**Encuentre, de ser posible, la matriz $C$ que diagonaliza a la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

*El procedimiento para encontrar la matriz C consiste en calcular el determinante de $A-\lambda I$ e igualarlo a cero para finalmente hallar los valores propios de la matriz, recuerden que en muchos casos es necesario usar división sintética para factorizar.*

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 & 2 \\ 4 & -3-\lambda & 2 \\ 4 & -3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$p(\lambda)=0$

$\det(A-\lambda I)=0$

$(5-\lambda)[(-3-\lambda)(2-\lambda)+6]-4[-4(2-\lambda)+6]+4[-8-2(-3-\lambda)]=0$

$(5-\lambda)[-6+3\lambda-2\lambda+\lambda^2+6]-4[-8+4\lambda+6]+4[-8+6+2\lambda]=0$

$(5-\lambda)(\lambda^2+\lambda)+32-16\lambda-24-32+24+8\lambda=0$

$5\lambda^2+5\lambda-\lambda^3-\lambda^2-8\lambda=0$

$\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda=0$

$\lambda(\lambda^2-4\lambda+3)=0$

$$\lambda=0 \qquad (\lambda-3)(\lambda-1)=0 \qquad \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=1 \\ \lambda_3=3 \end{cases}$$

$$\lambda=3 \quad \lambda=1$$

*Ahora debemos hallar una base para cada espacio propio asociado con cada uno de los valores propios, recuerden que por lo general los valores propios se los ordena de menor a mayor*

$E_{\lambda 1};\lambda_1=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5-0 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & -3-0 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 2-0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} A_{21}(-1) \\ A_{23}(-1) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) A_{12}(-3) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$a-b=0 \qquad a+2c=0$$

$$a=b \qquad c=-\tfrac{1}{2}a$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -\tfrac{1}{2}a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\tfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \to B_{E\lambda 1} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

*No hay ningún problema si multiplicamos al vector por cualquier número para eliminar la fracción*

$E_{\lambda 2}; \lambda_2 = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5-1 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & -3-1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 2-1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} A_{21}(-1) \\ A_{23}(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) A_{12}(2) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} 2a - c = 0 & b - c = 0 \\ a = \frac{1}{2}c & b = c \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_{E\lambda 2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$E_{\lambda 3}; \lambda_3 = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5-3 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & -3-3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 2-3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} A_{12}(-2) \\ A_{13}(-2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) A_{21}(1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} a - c = 0 & b - c = 0 \\ a = c & b = c \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_{E\lambda 3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Finalmente las columnas de la matriz $C$ que diagonaliza a la matriz $A$ están dadas por los vectores que conforman las bases de cada uno de los espacios propios*

$$\therefore C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Tema 3**

**Determine los valores característicos y base para cada espacio propio de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 - 1\right] - 1\left[(a-\lambda) - 1\right] + 1\left[1 - (a-\lambda)\right] = 0$$
$$(a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 - 1\right] - (a-\lambda) + 1 + 1 - (a-\lambda) = 0$$
$$(a-\lambda)^3 - 3(a-\lambda) + 2 = 0$$

*Ahora realizamos un cambio de variable para facilitar la factorización del polinomio*

$$x = a - \lambda$$
$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

*Aplicando división sintética:*

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ \hline & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x^2 + x - 2) = 0$$
$$(x-1)(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = 1 \qquad x = -2$$
$$a - \lambda = 1 \qquad a - \lambda = -2$$
$$\lambda = a - 1 \qquad \lambda = a + 2$$

*Y finalmente hallamos cada espacio propio reemplazando cada $\lambda$ en la matriz $A - \lambda I$*

$E_{\lambda = a-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ a = -b - c \end{array} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B_{E_\lambda} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$E_{\lambda = a+2}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} -b + c = 0 & a - c = 0 \\ b = c & a = c \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore B_{E_\lambda} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Tema 4**
**Determine la matriz ortogonal $Q$ que diagonaliza ortogonalmente a la matriz:**

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 0\\ 5 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

*Para encontrar la matriz Q realizamos el mismo procedimiento aplicado en los ejercicios anteriores sólo que cuando hallemos las bases de los espacios propios debemos ortonormalizarlas, y esas serán las columnas de la matriz en cuestión*

*Hay que recordar que las columnas de esta matriz forman una base ortonormal para* $R^3$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-1-\lambda & 5 & 0\\ 5 & -1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 4-\lambda\end{pmatrix}$$

$$p(\lambda)=0$$
$$\det(A-\lambda I)=0$$
$$(4-\lambda)\left[(-1-\lambda)(-1-\lambda)-25\right]=0$$
$$(4-\lambda)\left[(-1-\lambda)^2-25\right]=0$$

*Cuando se calcula el determinante por medio de cofactores es mejor utilizar la fila o columna con mayor cantidad de ceros presentes en la misma*

*También hay que tener en cuenta que el procedimiento se puede simplificar por la presencia de ciertos artificios, por ejemplo en este caso la expresión dentro del corchete es una diferencia de cuadrados perfectos y su factorización es sencilla*

$$\begin{array}{llll} 4-\lambda=0 & \left[(-1-\lambda)+5\right]\cdot\left[(-1-\lambda)-5\right]=0 & 4-\lambda=0 & -6-\lambda=0\\ \lambda=4 & (4-\lambda)(-6-\lambda) & \lambda=0 & \lambda=-6\end{array}$$

$$\begin{cases}\lambda_1=-6\to ma(\lambda_1)=1\\ \lambda_2=4\to ma(\lambda_2)=2\end{cases}$$

*Ahora encontramos las bases de cada espacio propio*

$E_{\lambda 1};\lambda_1=-6$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1-(-6) & 5 & 0 & 0\\ 5 & -1-(-6) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4-(-6) & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}5 & 5 & 0 & 0\\ 5 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}A_{12}(-1)\\ M_1(1/5)\\ M_3(1/10)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} a+b=0 & \\ & c=0\\ a=-b & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow B_{E\lambda 1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

*Hay que ortonormalizar esta base para obtener la primera columna de la matriz* $Q$*, pero como solo es un vector bastará con dividirlo para su norma, en este caso usamos el producto interno canónico*

$$\|v\| = \sqrt{(v \mid v)}$$

$$\|v\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \qquad \therefore B_{O_N E\lambda 1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\|v\| = \sqrt{(-1)(-1) + (1)(1) + (0)(0)}$$

$$\|v\| = \sqrt{2}$$

$E_{\lambda 2}; \lambda_2 = 4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & -1-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} A_{12}(-1) \\ M_1(1/5) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$-a + b = 0$$
$$a = b$$

*Si no aparece la variable* $c$ *significa que es libre y no hay condición de la que esté sujeta*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow B_{E\lambda 2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Igualmente debemos ortonormalizar esta base, pero antes hay que notar que estos vectores ya son ortogonales y de paso el segundo ya es unitario, así que bastará con dividir el primer vector para su norma con lo que obtendremos la base buscada y las dos últimas columnas de nuestra matriz* $Q$

$$\|v_1\| = \sqrt{(v_1 \mid v_1)}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \qquad \rightarrow B_{O_N E\lambda 2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{(1)(1) + (1)(1) + (0)(0)}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{2}$$

$$\therefore Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Tema 5**

**Sea $A$ una matriz cuadrada de tamaño $2x2$ que representa a una transformación lineal $T: R^2 \to R^2$, respecto a la base canónica de $R^2$**

**a) Si $traza(A) = -5$ y $\det(A) = 4$, ¿cuáles son los valores propios de $T$?**

**b) Encuentre, de ser posible, una base de $R^2$ respecto de la cual la matriz asociada a $T$ sea una matriz diagonal, si se conoce que $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$**

*a) Sabemos que para cualquier matriz de orden $2$ el polinomio característico está dado por:*

$$p(\lambda) = \lambda^2 - traza(A)\lambda + \det(A) = 0$$

*Entonces:*

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \qquad \lambda + 4 = 0 \qquad \lambda + 1 = 0$$
$$(\lambda + 4)(\lambda + 1) = 0 \qquad \lambda = -4 \qquad \lambda = -1$$

*Y con esto queda resuelto el primer literal*

*b) Para hallar dicha base necesitamos diagonalizar cualquier matriz asociada a $T$, pero como no tenemos la regla de correspondencia tendremos que buscar otro camino para encontrar una matriz asociada*

*Para este ejercicio tenemos suficientes datos para hallar la representación matricial de $T$ respecto a la base canónica. Conocemos su segunda columna por el dato del literal b, así que tenemos:*

$$A_T = \begin{pmatrix} x & -6 \\ y & 2 \end{pmatrix}$$

*Además conocemos el valor de la traza y del determinante, por lo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x + 2 = -5 \to x = -7 \\ 2x + 6y = 4 \to x + 3y = 2 \to 3y = 9 \to y = 3 \end{cases} \qquad \therefore A_T = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

*Y de aquí en adelante el procedimiento es el mismo que en ejercicios anteriores:*

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -7-\lambda & -6 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

*Pero como ya conocemos los valores propios de esta matriz simplemente hallamos los espacios propios*

$E_{\lambda 1};\lambda_1 = -4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -7+4 & -6 & 0 \\ 3 & 2+4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} A_{21}(1) \\ M_2(1/3) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} a+2b=0 \\ a=-2b \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow B_{E\lambda 1} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Al mismo tiempo este vector representa las coordenadas de los vectores propios de la transformación lineal respecto a la base de donde nació la matriz asociada, es decir, son las coordenadas de los vectores propios del operador lineal respecto a la base canónica de* $R^2$ *para este caso.*

$$\therefore v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E_{\lambda 2};\lambda_2 = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -7+1 & -6 & 0 \\ 3 & 2+1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} A_{21}(2) \\ M_2(1/3) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} a+b=0 \\ a=-b \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow B_{E\lambda 2} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\therefore v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Y estos dos vectores encontrados forman parte una base respecto de la cual la matriz asociada a T es una matriz diagonal*

$$\therefore B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Hay que tener en cuenta que si el espacio donde opera la transformación lineal es diferente a* $R^n$, *entonces los vectores de la base tendrán la forma de dicho espacio, ya sean matrices, polinomios, etc.*

**Tema 6**
**Califique como verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Justifique formalmente su respuesta**

**a) Si $A$ es una matriz triangular, los valores propios de $A$ son los elementos de su diagonal principal**

*Sea la matriz* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *una matriz triangular de* $nxn$. *Entonces:*

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

*Cuando se tiene una matriz triangular el determinante de la misma está dado por la multiplicación de los elementos de la diagonal principal.*

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)...(a_{nn}-\lambda)=0$$

*De donde obtenemos que:*

$$a_{11}-\lambda=0 \qquad a_{22}-\lambda=0 \qquad a_{33}-\lambda=0 \qquad \dots \qquad a_{nn}-\lambda=0$$
$$a_{11}=\lambda_1 \qquad a_{22}=\lambda_2 \qquad a_{33}=\lambda_3 \qquad \dots \qquad a_{nn}=\lambda_n$$

*Por lo tanto* $\lambda_i=a_{ii}$ *para* $i=1,2,3,...,n; n\in N$

$$\therefore \text{Verdadero}$$

**b) Sea $A\in M_{2x2}$. Si $\det(A)=1$ y $traza(A)=-1$, entonces los valores propios de $A$ son números reales**

*Sabemos que:*

$$p(\lambda)=\lambda^2-traza(A)\lambda+\det(A)=0$$
$$\lambda^2+\lambda+1=0$$

*Aplicando el discriminante a la ecuación determinaremos el tipo de raíces de la misma*

$$a=1 \qquad \Delta=b^2-4ac$$
$$b=1 \qquad \Delta=1-4$$
$$c=1 \qquad \Delta=-3$$

*El discriminante es menor que cero, por tanto las raíces son números complejos*

$$\therefore \text{Falso}$$

**c) Si $\lambda$ es un valor propio de $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, entonces $\left(A+A^{-1}\right)^{\lambda}=2^{\lambda}A$**

*Observemos que la matriz $A$ es ortogonal debido a que el producto interno entre sus columnas es cero y al mismo tiempo el producto interno de cada columna consigo misma es uno, entonces:*

$$A^{-1}=A^{T}\rightarrow A^{-1}=A$$

*También como $A$ es una matriz diagonal, sus valores propios son los elementos de la diagonal principal, es decir:*

$$\lambda=1$$
$$\lambda=-1$$

*Finalmente:*

$$\begin{aligned}\left(A+A^{-1}\right)^{\lambda}&=2^{\lambda}A\\ \left(A+A\right)^{1}&=2^{1}A\\ 2A&=2A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(A+A^{-1}\right)^{\lambda}&=2^{\lambda}A\\ \left(A+A\right)^{-1}&=2^{-1}A\\ (2A)^{-1}&=\frac{1}{2}A\\ (2)^{-1}(A)^{-1}&=\frac{1}{2}A\\ \frac{1}{2}A&=\frac{1}{2}A\end{aligned}$$

$\therefore$ *Verdadero*