Proyecto de Álgebra Lineal
II Término 2017

Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Guayaquil, Octubre de 2017

1. Introducción

Los procesos que evolucionan con el tiempo se denominan sistemas dinámicos. A medida que el tiempo avanza, el proceso o fenómeno estará cambiando su 'estado'. Si consideramos que el tiempo sólo toma valores enteros no negativos (t=0,1,2,3,..) se dice que el tiempo es discreto. Los sistemas dinámicos que cambian con respecto a un tiempo discreto se denominan sistemas dinámicos discretos. Los sistemas dinámicos discretos pueden estar descritos matemáticamente por medio de ecuaciones en diferencias. Una ecuación en diferencias es una ecuación en la cual el valor de una variable depende de valores de la variable en un tiempo anterior.

$$y_t = 2y_{t-1}$$

De esta manera, por ejemplo, en la ecuación anterior el valor de $y_1 = 2y_0$, el valor de $y_2 = 2y_1$, y así sucesivamente. Esta ecuación es una ecuación en diferencia. Como se puede notar, el valor de los siguientes estados de la variable depende del valor inicial y_0, el cual usualmente es un dato conocido.
Ciertos fenómenos son representados por varias ecuaciones en diferencias, por ejemplo, considere que la posición de una partícula en el plano cartesiano está dada por las ecuaciones en diferencia:

$$x_t = 2x_{t-1} + y_{t-1}$$

$$y_t = 3x_{t-1} + 4y_{t-1}$$

Donde la variable t está en minutos. Además se conoce que la posición inicial es $x_0 = 1, y_0 = 1$ El sistema de ecuaciones en diferencia puede ser escrito de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$$

Es decir

$$v_t = Av_{t-1}$$

Donde $v_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ Si observamos con detenimiento esta ecuación matricial recursiva, podemos ver que:

$$v_1 = Av_0$$

$$v_2 = Av_1 = A(Av_1) = A^2 v_0$$

$$v_3 = Av_2 = A(A^2 v_0) = A^3 v_0$$

Se puede probar por inducción que

$$v_t = A^t v_0$$

Por lo tanto, el problema de hallar la posición de la partícula en el cualquier instante t se resume a hallar la t-ésima potencia de la matriz A. Para hallar la t-ésima potencia de la matriz A podemos usar diagonalización de matrices, ya que si A es diagonalizable se tiene lo siguiente

$$D = C^{-1}AC$$

Donde D es una matriz diagonal semejante a A, y C una matriz invertible, que diagonaliza a A. Si A es semejante a una matriz diagonal, entonces su t-ésima potencia es

$$A^t = CD^tC^{-1}$$

Gracias al álgebra lineal sabemos que la matriz diagonal D se compone de los valores propios de A y que la matriz C de vectores propios linealmente independientes de la matriz A. Para nuestro ejemplo, los valores propios y bases de los espacios propios asociados a cada valor propio son:

$$\lambda_1 = 1 \quad B_{E_{\lambda_1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda_2 = 5 \quad B_{E_{\lambda_2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Las matrices D y C son

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Es posible hallar la inversa de C, obteniendo:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Obteniendo así

$$A^t = CD^tC^{-1}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^t & 0 \\ 0 & 5^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4}5^t & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}5^t \\ -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}5^t & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}5^t \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si se quiere la posición a 10 minutos de la partícula se debería realizar la siguiente multiplicación:

$$v_{10} = A^{10} v_0$$

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4}5^{10} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}5^{10} \\ -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}5^{10} & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}5^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}5^{10} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}5^{10} \end{pmatrix}$$

La partícula, después de 10 minutos estará en:

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4882813 \\ 4882812 \end{pmatrix}$$

2. El problema

En un universo perfecto, las bibliotecas de ESPOL pertenecen a un sistema integrado “Archivos Gigantes” (abreviado AG) de préstamos y devolución de libros. El sistema AG, al ser integrado, permite pedir prestado un libro en cualquiera de las bibliotecas que se encuentran en el campus Gustavo Galindo, y además devolverlo en cualquiera de ellas.
Se ha asignado un código que identifica a cada biblioteca con respecto a su unidad académica, siendo estas:

- Biblioteca Central (C)
- Biblioteca FCNM (N)
- Biblioteca FIEC (E)
- Biblioteca FCSH (S)
- Biblioteca FIMCBOR (B)
- Biblioteca FICT (T)
- Biblioteca FIMCP (M)

Al inicio del semestre cada biblioteca cuenta con un stock de libros inicial de la unidad académica. A medida que los días avanzan, los estudiantes piden un libro prestado en la biblioteca X y lo devuelven en la biblioteca Y, lo que causa que al inicio del siguiente día las bibliotecas tengan libros provenientes de bibliotecas de otras unidades académicas.

Cada vez que alguna de las bibliotecarias recibe un libro, al pasar por el sensor notifica la procedencia inmediata (del día anterior) del libro. La Sra. Karina, de la biblioteca Central, nota que cada día una fracción de la cantidad de libros salen de la biblioteca y también, recibe aproximadamente una fraccion de la cantidad de libros del día anterior de cada biblioteca .

Es decir, si **t está en días**, después de t días la biblioteca central tiene:

$$C_t = \frac{3}{16}C_{t-1} + \frac{1}{4}N_{t-1} + \frac{1}{16}E_{t-1} + \frac{5}{16}S_{t-1} + \frac{1}{4}B_{t-1} + \frac{1}{8}T_{t-1} + \frac{1}{16}M_{t-1}$$

La ecuación anterior nos dice que en el día t, la biblioteca central mantiene solo el $\frac{3}{16}$ de la cantidad de libros que en el día anterior se encontraban en la misma. Además recibe $\frac{1}{4}$ de los libros que estaban en la biblioteca de la FCNM del día anterior, recibe $\frac{1}{16}$ de los libros que estaban en la biblioteca FIEC en el día anterior. Llegan también a la biblioteca central $\frac{5}{16}$ de los libros que estaban en

FCSH, $\frac{1}{4}$ de los libros de FIMCBOR, $\frac{1}{8}$ de la cantidad de libros de FICT y $\frac{1}{16}$ de los libros de FIMCP.

Al recolectar los datos de todas las bibliotecas se obtienen las siguientes ecuaciones en diferencia:

$$
\begin{aligned}
C_t &= \frac{3}{16}C_{t-1} + \frac{1}{4}N_{t-1} + \frac{1}{16}E_{t-1} + \frac{5}{16}S_{t-1} + \frac{1}{4}B_{t-1} + \frac{1}{8}T_{t-1} + \frac{1}{16}M_{t-1} \\
N_t &= \frac{1}{16}C_{t-1} + \frac{1}{16}E_{t-1} + \frac{1}{16}S_{t-1} + \frac{1}{4}B_{t-1} + \frac{1}{16}T_{t-1} + \frac{1}{16}M_{t-1} \\
E_t &= \frac{1}{8}C_{t-1} + \frac{1}{8}N_{t-1} + \frac{1}{4}E_{t-1} + \frac{1}{8}S_{t-1} + \frac{1}{8}B_{t-1} + \frac{1}{8}T_{t-1} + \frac{1}{4}M_{t-1} \\
S_t &= \frac{3}{16}C_{t-1} + \frac{3}{16}N_{t-1} + \frac{3}{16}E_{t-1} + \frac{1}{16}S_{t-1} + \frac{3}{16}B_{t-1} + \frac{3}{16}T_{t-1} + \frac{1}{8}M_{t-1} \\
B_t &= \frac{1}{8}C_{t-1} + \frac{1}{8}N_{t-1} + \frac{1}{8}E_{t-1} + \frac{1}{8}S_{t-1} + \frac{1}{8}B_{t-1} + \frac{1}{8}T_{t-1} + \frac{1}{8}M_{t-1} \\
T_t &= \frac{1}{4}C_{t-1} + \frac{1}{4}N_{t-1} + \frac{1}{4}E_{t-1} + \frac{1}{4}S_{t-1} + \frac{5}{16}T_{t-1} + \frac{1}{4}M_{t-1} \\
M_t &= \frac{1}{16}C_{t-1} + \frac{1}{16}N_{t-1} + \frac{1}{16}E_{t-1} + \frac{1}{16}S_{t-1} + \frac{1}{16}B_{t-1} + \frac{1}{16}T_{t-1} + \frac{1}{8}M_{t-1}
\end{aligned}
$$

Al empezar el semestre las bibliotecas reportaron que tenían la cantidad mostrada a continuación:

Biblioteca	**Cantidad de libros**
Biblioteca Central (C)	32000
Biblioteca FCNM (N)	15840
Biblioteca FIEC (E)	16000
Biblioteca FCSH (S)	15200
Biblioteca FIMCBOR (B)	12480
Biblioteca FICT (T)	14080
Biblioteca FIMCP (M)	10656

El parcial en la ESPOL dura 8 semanas, más 1 semana de exámenes. El único día que no se prestan ni se devuelven libros, porque las bibliotecas permanecen cerradas, es el día domingo. Con la necesidad de estimación de inventario, su empresa ha sido contratada para predecir la cantidad de libros al final del primer y segundo parcial en cada biblioteca de ESPOL.

3. Entregables

Se necesita que su grupo de trabajo elabore un reporte con su solución a este problema. El reporte es un documento con introducción, fundamento teórico, solución, conclusiones, recomendaciones.

Para la sección solución usted deberá presentar:

- El planteamiento matricial del problema
- El polinomio característico de la matriz
- Los valores propios de la matriz
- Las bases de vectores propios asociados a cada valor propio de la matriz
- La matriz D diagonal y la matriz C que diagonaliza a A
- La matriz A elevado a la t-ésima potencia
- Los valores de la cantidad de libros en cada biblioteca al primer parcial
- Los valores de la cantidad de libros en cada biblioteca al segundo parcial

Todo lo anterior debe estar escrito de una manera secuencial y con sentido completo. Usted puede (y probablemente debe) ayudarse utilizando herramientas de software para resolver este problema, los mismos que deben ser descritos, y detallar su uso, en el reporte.