PROYECTO

Término II · 2017 – 2018

CADENAS DE MARKOV

Vector de probabilidad (DEF).- es un vector de R^n que cumple con tener solo componentes positivas que suman 1 en total.

Matriz de probabilidad (DEF).- es una matriz $n \times n$ que cumple con dos condiciones:

a) $\forall i, j \quad a_{ij} \geq 0$ (sus entradas son todas positivas)

b) La suma de las componentes en cada columna es 1.

Es decir, una matriz de probabilidad tiene en sus columnas solo vectores de probabilidad.

Teorema.- Toda matriz de probabilidad tiene un valor propio igual a 1.

Ejercicio 1.- Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ tal que $a_{ij} \geq 0$, $i = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2$; y $a_{11} + a_{21} = 1$ y $a_{12} + a_{22} = 1$

Demostrar que si $p(\lambda)$ es el polinomio característico de A, entonces $p(1) = 0$.

Las matrices de probabilidad son fundamentales en el modelo matemático conocido como "cadenas de Markov", con muchas aplicaciones en biología, ingeniería, economía, química, etc. Considérese el siguiente ejemplo, el vector:

$$v_o = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.40 \end{bmatrix}$$

indica en miles de personas, el porcentaje de gente que vive en la ciudad (60%) y en el campo (40%) en una región dada en un año dado. Ahora considérese la siguiente matriz que muestra los porcentajes de migración anual entre la ciudad y el campo.

$$\begin{array}{cc} \textit{desde la ciudad} & \textit{desde el campo} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textit{a la ciudad} \\ \textit{al campo} \end{array}$$

Así, en un año dado, el 95% de los habitantes de la ciudad se quedan en la ciudad, pero un 5% migran al campo; por otra parte, el 3% de los habitantes del campo se mudan a la ciudad mientras el 97% se queda en el campo. En total, las columnas consideran el 100% de la población, y constituyen una matriz de probabilidad. Supongamos que la población inicial en una región en el año 2000 es descrita por el vector v_o, ¿cuál es la proyección del porcentaje que vive en el campo y en la ciudad en el año 2001?

$$v_1 = Av_0 = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.582 \\ 0.418 \end{bmatrix}$$

Es decir, en el año siguiente, 58.2% viven en la ciudad, y 41.8% en el campo.

Ejercicio 2.- ¿Cuál es el porcentaje de población en el campo y la ciudad en el 2002?
Ejercicio 3.- ¿Cuál es el porcentaje de población en el campo y la ciudad en el 2016? ¿En el 2050?

La matriz A tiene un valor propio 1, lo que significa que existe un respectivo vector propio v_c tal que $Av_c = v_c$. Este vector se conoce como estado estable del sistema, o vector de equilibrio, pues una vez alcanzado, el sistema permanece en el mismo. Para encontrarlo, hay que resolver el sistema correspondiente a $(A-I)v = \bar{\mathbf{0}}$, y al vector propio correspondiente, convertirlo en un vector de probabilidad multiplicándolo por algún escalar conveniente:

$$(A-I)v = \bar{\mathbf{0}} \equiv \left(\begin{array}{cc|c} -0.05 & 0.03 & 0 \\ 0.05 & -0.03 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -0.05 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donde el espacio solución es:

$$E_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2 \ / \ -5x_1 + 3x_2 = 0 \right\}$$

Un vector propio es $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, o $v = \begin{bmatrix} 3/8 \\ 5/8 \end{bmatrix}$, si queremos un vector característico de probabilidad.

Este vector indica que cuando la población alcanza una distribución de 37.5% en la ciudad (3/8) y 62.5% en el campo (5/8), el sistema alcanza su estado de equilibrio y permanecerá en él.

En conclusión, el modelo de Markov permite modelar transiciones entre estados en un sistema dinámico, y permite calcular el estado del sistema en tiempos posteriores; tanto como estimar el comportamiento en el largo plazo mediante los vectores de equilibrio.

Ejercicios:

1.- En un pequeño pueblo hay solo dos estaciones de radio, una de noticias y una de música. Entre los oyentes de la estación de noticias, 70% permanecerán oyendo noticias luego de la pausa comercial cada media hora; mientras que el 30% cambiará a la estación de música. Entre los oyentes de la estación de música, 60% cambiarán a las noticias luego de la pausa, mientras el 40% permanecerán oyendo música. Suponga que todos están oyendo las noticias a las 8:15 AM, entonces:

a) Construya la matriz de probabilidades que describe cómo los oyentes cambian de estación de radio
b) Muestre el vector de estado inicial
c) ¿Qué porcentaje de oyentes estará sintonizando la radio de música a las 9:25AM?

(Luego de las pausas de las 8:30AM y 9:00AM)

2.- En Guayaquil, Isaac's-rent-a-car tiene una flota de 2000 autos, que pueden ser rentados y retornados en las oficinas en el Centro, el Terminal y el Aeropuerto. El patrón de rentas y devoluciones es descrito por la matriz dada:

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} \textit{autos rentados} & \textit{en:} & \\ \textit{Aeropuerto} & \textit{Centro} & \textit{Terminal} \end{array} & \textit{devueltos en:} \\
A = \begin{bmatrix} 0.90 & 0.01 & 0.09 \\ 0.01 & 0.90 & 0.01 \\ 0.09 & 0.09 & 0.90 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \textit{Aeropuerto} \\ \textit{Centro} \\ \textit{Terminal} \end{array}
\end{array}
$$

En un día típico, ¿cuántos carros serán rentados/disponibles para rentar en la oficina del Centro de la ciudad?

PARTICIPACIÓN DE MERCADO EN LA INDUSTRIA DE AUTOMÓVILES

La industria automotriz ejemplificó por mucho tiempo la capacidad de manufactura estadounidense desde principios del siglo XX. Desde el final de la Segunda Guerra Mundial durante la década de 1960, con pocas excepciones, el mercado estaba prácticamente cerrado, con nula competencia externa. Los tres grandes (Ford, General Motors y Chrysler) tenían todo para sí mismos. Como resultado, crecieron confiados descuidando la calidad mientras se concentraban en el volumen de producción y las ganancias. En 1972, el primer Honda Civic llegó a los EE.UU., seguido por los coches compactos de Datsun (ahora Nissan), Toyota y otros. Estos coches eran de calidad modesta, y de bajo precio. Su impacto fue mínimo ya que los estadounidenses estaban cautivados con coches más grandes y potentes (el V-8 era el motor estándar). Sin embargo, las cosas cambiaron a fines de 1973 con el primer Embargo de Petróleo Árabe. En menos de un mes, las colas en las gasolineras aparecieron, los precios se triplicaron, y conducir se convirtió en una aventura. La eficiencia en combustibles de los automóviles extranjeros llamó la atención como posible solución (Honda Civics obtener 35 mpg, mientras que el V-8 a duras penas lograba 20 mpg.) El Ford Pinto era el mejor coche de la economía americana, pero afectado de baja calidad del motor, óxido, y la versión sedán era propensa a incendiarse si era impactado por la parte posterior. Así, una combinación de factores de tres continentes cambió permanentemente la industria automotriz estadounidense.

PARTICIPACIÓN DE MERCADO.- Durante el mismo período de tiempo, los métodos de medir el éxito de un negocio cambiaron. En lugar de medir el éxito de una empresa en términos sólo del beneficio neto, una métrica diferente, la CUOTA DE MERCADO, se hizo popular. Como su nombre indica, la cuota de mercado de una empresa es la fracción de las ventas de un producto que la empresa ha hecho. Por ejemplo, en 1972, GM tenía aproximadamente el 40% de los clientes para los coches nuevos, Ford tenía el 30%, Chrysler tenía un cuarto, y el total para todos los fabricantes japoneses era solamente el 5%. A finales de ese mismo año, estudios sobre el cambio de preferencia del consumidor mostraron los porcentajes de los consumidores que cambiaron su preferencia de una marca a otra en el lapso de un año:

	Desde			
	GM	*Ford*	*Chrys*	*Japan*
Hacia :				
GM	75%	10%	10%	10%
Ford	10%	70%	5%	10%
Chrys	5%	10%	65%	5%
Japan	10%	10%	20%	75%

Entregables:

- Se debe presentar dos secciones. La primera parte consta de la resolución de los dos ejercicios planteados, respondiendo a las preguntas dadas.
- En la segunda sección debe constar exclusivamente el análisis participación de mercados de la industria automovilística, proveyendo respuestas a las siguientes cuestiones:

1. Escriba la matriz de probabilidad (transición) correspondiente del año 1972.
2. ¿Qué compañía es la mejor reteniendo sus propios clientes? Justifique su respuesta.
3. ¿Qué compañía es la mejor atrayendo los clientes de otras compañías? Justifique su respuesta.
4. ¿Qué compañía está perdiendo la mayor cantidad de clientes? Justifique su respuesta.
5. Basado en la información dada, prediga cuál será la participación de mercado en el año 1982, y en 1987. Justifique su respuesta.
6. ¿Qué ocurrirá con las participaciones de mercado en el largo plazo? Justifique su respuesta.
7. Suponga que queremos separar por categorías, de modo que cada marca tenga un mercado de autos "regulares" y otro de autos "de lujo". ¿Qué forma tomaría la nueva matriz? Sabiendo que no hay valores numéricos para tal matriz, ¿qué información necesitaría para poder llenarla?
8. Si leyó o consultó un libro o artículo, debe poner al final del documento una sección Bibliografía o Referencias y hacer una lista de cada trabajo consultado, incluyendo título, autor(es), Capítulo/Volumen, páginas.

NOTA: Es lícito apoyarse en la tecnología, pero si necesita utilizar un software o calculadora (Matlab®, Phyton, etc), o algún sitio de resolución de matrices online (Online Matrix Calculator de blue-bit), debe ser indicado en el documento a entregar, planteando la fórmula teórica, e indicando si se utilizó para resolver esa ecuación; y repitiendo la indicación para cada una de las ecuaciones así resueltas.