TEMA 4

Funciones ortogonales y series de Fourier

Las series e integrales de Fourier constituyen un tema clásico del Análisis Matemático. Desde su aparición en el siglo XVIII en el estudio de las vibraciones de una cuerda, las series de Fourier se han convertido en un instrumento indispensable en el análisis de ciertos fenómenos periódicos de la Física y la Ingeniería. La idea fundamental se basa en aproximar la función, no por una serie de potencias (desarrollo de Taylor), sino por una serie de funciones periódicas (senos y cosenos).

En lo que sigue consideraremos que las funciones con las que se trabaja son Riemann integrables en el intervalo correspondiente (bastaría, por ejemplo, suponer que son continuas salvo en un número finito de puntos donde presentan discontinuidades de salto).

4.1. Funciones ortogonales

Definición 4.1.1. *El producto escalar de dos funciones f_1 y f_2 definidas en un intervalo $[a,b]$ es el número*

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx$$

Entonces la norma que induce este producto escalar de una función f definida en el intervalo $[a,b]$ es el número

$$\|f\| = \Big(\int_a^b f^2(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Definición 4.1.2. *Dos funciones f_1 y f_2 son ortogonales en el intervalo $[a,b]$ si*

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx = 0$$

Por ejemplo, las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^3$ son ortogonales en el intervalo $[-1,1]$ puesto que

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{-1}^1 x^2x^3\,dx = \int_{-1}^1 x^5\,dx = \Big[\frac{1}{6}x^6\Big]_{-1}^1 = 0$$

Definición 4.1.3. *Se dice que un conjunto de funciones $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ es ortogonal en el intervalo $[a,b]$ si*

$$\langle \phi_m, \phi_n\rangle = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n$$

Si $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a,b]$ con la propiedad de que $\|\phi_n\| = 1$ para cualquier n, entonces se dice que $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ es un conjunto ortonormal en el intervalo $[a,b]$.

Ejemplo 4.1.4. *El conjunto* $\{\phi_n(x) = \cos(nx)\}_{n=0}^{\infty}$ *es ortogonal en el intervalo* $[-\pi, \pi]$. *En efecto,*

$$\langle \phi_0, \phi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos(nx)\, dx = \big[\frac{1}{n}\,\mathrm{sen}(nx)\big]_{-\pi}^{\pi} = 0, \qquad n \neq 0$$

Si m *y* n *son ambos distintos de* 0,

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)\big)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\big[\frac{\mathrm{sen}((m+n)x)}{m+n} + \frac{\mathrm{sen}((m-n)x)}{m-n}\big]_{-\pi}^{\pi} = 0, \qquad m \neq n$$

En este ejemplo, si calculamos las normas de cada función, obtenemos:

$$\|\phi_0\| = \big(\int_{-\pi}^{\pi} dx\big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

y para $n > 0$,

$$\|\phi_n\| = \big(\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx\big)^{\frac{1}{2}} = \big(\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [1 + cos(2nx)]\, dx\big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

De esta forma el conjunto $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \}$ *es ortonormal en* $[-\pi, \pi]$.

Nota 4.1.5. *De manera análoga puede probarse que el conjunto*

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\mathrm{sen}(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\mathrm{sen}(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \}$$

es ortonormal en $[-\pi, \pi]$.

Es conocido que, dada una base ortogonal en un espacio vectorial de dimensión finita, cualquier elemento de dicho espacio vectorial puede representarse como combinación lineal de los elementos de esa base. Nuestro objetivo es extender esta propiedad a un espacio de dimensión infinita.

Sea $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a, b]$ y sea f una función definida en ese intervalo. Los coeficientes $c_m, m = 0, 1, 2, \dots,$ para los que

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) + \dots$$

se calculan multiplicando esta expresión por ϕ_m e integrando en el intervalo $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)\, dx = c_0\int_a^b \phi_0(x)\phi_m(x)\, dx + c_1\int_a^b \phi_1(x)\phi_m(x)\, dx + \dots + c_n\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\, dx + \dots$$

Por ortogonalidad, cada término del lado derecho de la última ecuación es cero, excepto cuando $n = m$. En este caso, se tiene

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\, dx = c_n\int_a^b \phi_n(x)\phi_n(x)\, dx = c_n\int_a^b \phi_n^2(x)\, dx$$

Por tanto,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x)$$

donde los coeficientes c_n vienen dados por

$$c_n = \frac{\int_a^b f(s)\phi_n(s)\, ds}{\int_a^b \phi_n^2(s)\, ds} = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\|\phi_n\|^2}$$

esto es,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\|\phi_n\|^2} \phi_n$$

Este desarrollo se llama desarrollo en serie ortogonal de f (o también, serie de Fourier generalizada).

Nota 4.1.6. *El procedimiento anterior es formal, es decir, no se ha analizado si el desarrollo en serie anterior es convergente.*

4.2. Series de Fourier

El conjunto

$$\{1, \cos(\frac{\pi}{p}x), \cos(\frac{2\pi}{p}x), \ldots, \operatorname{sen}(\frac{\pi}{p}x), \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{p}x), \ldots,\}$$

es ortogonal en $[-p, p]$. Sea f una función que admite un desarrollo en serie del conjunto anterior, es decir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\frac{n\pi}{p}x) + b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{p}x))$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ se determinan del modo que se comentó anteriormente, excepto en el caso de a_0 en el que, por conveniencia en la notación, se escribe $\frac{a_0}{2}$. Entonces

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(s)\, ds$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(s) \cos(\frac{n\pi}{p}s)\, ds, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(s) \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{p}s)\, ds, \quad n = 1, 2, \ldots$$

La serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\frac{n\pi}{p}x) + b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{p}x))$$

se llama serie de Fourier de f, y los números reales a_n y b_n, coeficientes de Fourier.

Nota 4.2.1. *Esta serie no converge para cualquier f. Habrá que imponer condiciones que garanticen la convergencia de la serie de Fourier de una función dada.*

Ejemplo 4.2.2. *En este ejemplo se calcula la serie de Fourier de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 1, & si\ -\frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

De acuerdo con la definición de los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} ds = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(ns)\, ds = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi}, & si\ n\ es\ impar \\ 0, & si\ n\ es\ par \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}(ns)\, ds = \frac{-\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} = \begin{cases} \frac{1}{n\pi}, & si\ n\ es\ impar \\ \frac{1}{n\pi}(-1 + (-1)^{\frac{n}{2}}), & si\ n\ es\ par \end{cases}$$

Por tanto la serie de Fourier es

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi}(\cos(x)+\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(2x)-\frac{1}{3}\cos(3x)+\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)+\dots)$$

4.3. Desarrollos de series de Fourier de funciones pares e impares

Recordemos que una función es par si verifica $f(-x)=f(x)$ para cualquier x, y es impar si $f(-x)=-f(x)$. En un intervalo simétrico como $(-p,p)$ la gráfica de una función par posee simetría respecto al eje y, mientras que la gráfica de una función impar posee simetría con respecto al origen. Estas funciones verifican las siguientes propiedades:

- El producto de dos funciones pares es par.
- El producto de dos funciones impares es par.
- El producto de una función par y una impar es impar.
- La suma o la diferencia de dos funciones pares es par.
- La suma o la diferencia de dos funciones impares es impar.
- Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
- Si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Gracias a estas propiedades el cálculo de los coeficientes de una serie de Fourier se simplifica de manera importante cuando f es una función par o impar.

Si f es una función par en $(-p,p)$, entonces los coeficientes de la serie de Fourier se convierten en:

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(s)\,ds=\frac{2}{p}\int_0^p f(s)\,ds$$

pues $f(x)$ es par.

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(s)\cos(\frac{n\pi}{p}s)\,ds=\frac{2}{p}\int_0^p f(s)\cos(\frac{n\pi}{p}s)\,ds, \quad n=1,2,\dots$$

pues $f(x)\cos(\frac{n\pi}{p}x)$ es par.

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(s)\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{p}s)\,ds=0, \quad n=1,2,\dots$$

pues $f(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{p}x)$ es impar.

De esta forma la serie de Fourier de una función par en $(-p,p)$ será

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi}{p}x)$$

con los coeficientes calculados anteriormente.

Ejemplo 4.3.1. *La función $f(x)=x^2$ es par en el intervalo $(-2,2)$ y por tanto su desarrollo de Fourier será en serie de cosenos. De acuerdo con la definición de los coeficientes de Fourier:*

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 s^2\,ds=\frac{8}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 s^2\cos(\frac{n\pi}{2}s)\,ds=\frac{16(-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad n=1,2,\dots$$

$$b_n=0, \quad n=1,2,\dots$$

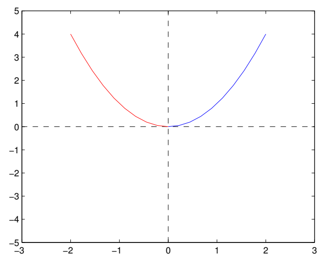

FIGURA 1. Simetría par para $f(x) = x^2$ en $x \in (0, 2)$

Entonces la serie de Fourier es

$$\frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(\frac{n\pi}{2} x)$$

De manera similar, cuando f es impar en el intervalo $(-p, p)$,

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(s) \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{p} s)\, ds, \quad n = 1, 2, \ldots$$

y la serie de Fourier es

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{p} x)$$

Ejemplo 4.3.2. *La función $f(x) = x$ es impar en el intervalo $(-2, 2)$ y por tanto su desarrollo de Fourier será en serie de senos. De acuerdo con la definición de los coeficientes de Fourier:*

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2} s)\, ds = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Entonces la serie de Fourier es

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2} x)$$

Nota 4.3.3. (Desarrollos en semi-intervalos)

En todo lo anterior hemos considerado intervalos centrados en el origen, es decir, de la forma $(-p, p)$. Sin embargo, en ocasiones serí interesante representar una función que se define sólo para el intervalo $(0, p)$ mediante una serie trigonométrica. Esto puede hacerse de muchas formas distintas, suministrando una definición ficticia de la función en el intervalo $(-p, 0)$. Por brevedad se presentan los tres casos más comunes. Así, si $y = f(x)$ está definida en el intervalo $(0, p)$, podemos

1. *(Reflexión par) reflejar la gráfica de la función respecto al eje y, es decir, $f(x) = f(-x)$ para $x \in (-p, 0)$ (la función es ahora par en el intervalo $(-p, p)$, y por tanto se tendrá un desarrollo en serie de cosenos).*
2. *(Reflexión impar) reflejar la gráfica de la función respecto al origen, es decir, $f(x) = -f(-x)$ para $x \in (-p, 0)$ (la función es ahora impar en el intervalo $(-p, p)$, y por tanto se tendrá un desarrollo en serie de senos).*

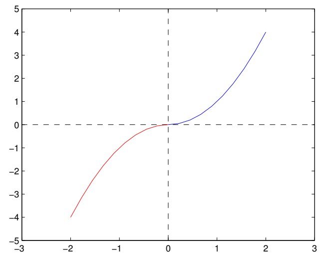

FIGURA 2. Simetría impar para $f(x) = x^2$ en $x \in (0, 2)$

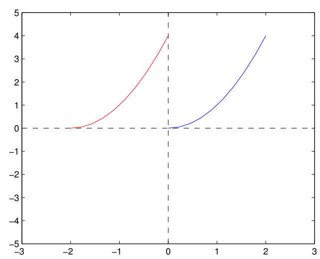

FIGURA 3. Traslación para $f(x) = x^2$ en $x \in (0, 2)$

3. *(Traslación) definir la función mediante $f(x) = f(x+p)$ para $x \in (-p, 0)$, lo que dará origen a una serie de Fourier general.*

4.4. Convergencia

El siguiente teorema expresa las condiciones suficientes de convergencia de una serie de Fourier en un punto.

Teorema 4.4.1. *Sean f y f' continuas a trozos en el intervalo $(-p, p)$, es decir, continuas excepto en un número finito de puntos donde presentan discontinuidades de tipo finito. Entonces la serie de Fourier de f en el intervalo converge a $f(x)$ en los puntos x en los que la función es continua.*

En los puntos x en los que la función es discontinua la serie de Fourier converge al promedio:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

donde $f(x^+)$ y $f(x^-)$ denotan los límites de f en x por la derecha y por la izquierda, respectivamente.

Si la función es periódica de período $2p$ el resultado anterior se tiene para cualquier $x \in \mathbb{R}$, no sólo para el intervalo $(-p, p)$.

4.5. Transformada de Fourier

Hasta el momento se ha utilizado el sistema ortogonal formado por las funciones reales $\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{p}x)$ y $\cos(\frac{n\pi}{p}x)$. Se puede considerar un sistema ortogonal de funciones con valores complejos. El producto interior que se considera en este caso es:

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{C}} = \int_{-p}^{p} f_1(x)\overline{f_2(x)}\, dx$$

El conjunto de funciones $\{e^{j\frac{n\pi}{p}x}\}$ constituyen un sistema ortogonal con respecto al producto escalar anterior, teniendo en cuenta que para cada $t \in \mathbb{R}$, $\cos(t) = \dfrac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}$ y $\operatorname{sen}(t) = \dfrac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}$, como consecuencia de la relación de Euler $e^{jt} = \cos(t) + j\operatorname{sen}(t)$.

La serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{n\pi}{p}x}$$

se llama serie de Fourier compleja de f, donde los coeficientes son:

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(s)e^{-j\frac{n\pi}{p}s}\,ds$$

La serie de Fourier compleja de una función y la serie de Fourier de una función son en realidad la misma. es decir, dos maneras distintas de escribir lo mismo.

De la definición de c_n, a_n y b_n se tiene que, para cada número $n > 0$

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

y

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

Las series de Fourier representan funciones definidas en un intervalo de la recta o, equivalentemente, funciones periódicas en la recta. Para representar funciones definidas en toda la recta y no periódicas, se sustituye por la transformada de Fourier. Ahora es conveniente trabajar en forma compleja, como hemos indicado que se puede hacer para las series. Formalmente se puede deducir una expresión de la transformada de Fourier a partir de la serie. Supongamos que f es una función periódica de período $2p$, entonces su serie de Fourier en forma compleja es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(s)e^{-j\frac{n\pi}{p}s}\,ds\right)e^{j\frac{n\pi}{p}x}$$

Llamando $\omega_n = \dfrac{n\pi}{p}$ y

$$h(\omega) = \int_{-p}^{p} f(s)e^{-j\omega s}\,ds$$

la expresión anterior se escribe:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\omega_n - \omega_{n-1})h(\omega_n)e^{j\omega x}$$

que tiene el aspecto de una suma de Riemann. En el límite tendríamos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j\omega s}\,ds\right)e^{j\omega x}\,d\omega$$

que contiene lo que se llama transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j\omega s}\,ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cos(-\omega s)\,ds + j\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\operatorname{sen}(-\omega s)\,ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cos(\omega s)\, ds - j\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\mathrm{sen}(\omega s)\, ds$$

y la fórmula de inversión que dará f a partir de la transformada:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\omega)e^{j\omega x}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\omega)\cos(\omega x)\, d\omega + j\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega x)\, d\omega\right)$$

Nota 4.5.1. *La definición varía según los gustos en la aparición de ciertas constantes, por ejemplo el exponente puede ser $-2jx\pi\xi$; en ese caso, la fórmula de inversión no lleva el factor $1/2\pi$ multiplicando. Además, el exponente casi siempre lleva signo $-$, pero algunos autores usan signo $+$(en este caso, el signo $-$ aparece en la fórmula de inversión).*

Nota 4.5.2. *Una condición suficiente para que exista la transformada de Fourier es que f sea absolutamente integrable en $(-\infty,\infty)$ y que f y f' sean continuas en todo intervalo finito.*

Como consecuencia de la linealidad de la integral, se tiene que

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\omega) = \alpha\mathcal{F}(f)(\omega) + \beta\mathcal{F}(g)(\omega)$$

Además, bajo condiciones suficientes de regularidad se obtiene que

$$\mathcal{F}(f^{(n}})(\omega) = (j\omega)^n\,\mathcal{F}(f)(\omega)$$

La transformada de Fourier de una función definida como $\int_{-\infty}^{t} f(s)ds$ es $\frac{\mathcal{F}(f)(\omega)}{j\omega}$.

Otras propiedades interesantes son:

- Escalado:

  La transformada de Fourier de $f(at), a \neq 0$ es $\frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)(\frac{\omega}{a})$.

- Desplazamiento:

  La transformada de Fourier de $f(t-t_0)$ es $e^{-j\omega t_0}\mathcal{F}(f)(\omega)$.

  La transformada de Fourier de $e^{j\omega_0 t}f(t)$ es $\mathcal{F}(f)(\omega-\omega_0)$.

  La transformada de Fourier de $f(t)\cos(\omega_0 t)$ es $\frac{\mathcal{F}(f)(\omega-\omega_0)+\mathcal{F}(f)(\omega_0+\omega)}{2}$.

- Convolución:

  La transformada de Fourier de $f(t)g(t)$ es $\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(f)(u)\mathcal{F}(g)(\omega-u)du$

  La transformada del producto de convolución $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds$ es $\mathcal{F}(f)(\omega)\mathcal{F}(g)(\omega)$

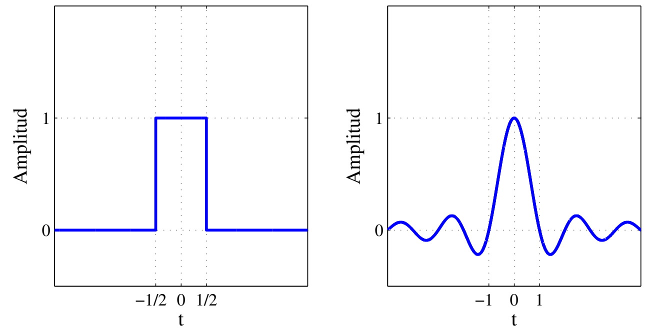

FIGURA 4. Pulso rectangular y su transformada

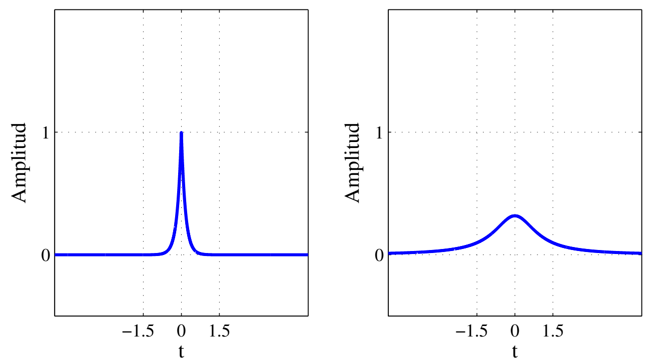

FIGURA 5. La función $g(x) = e^{-2\pi|x|}$ y su transformada

Ejemplo 4.5.3. *Sea f el pulso rectangular dado por la función característica del intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, es decir,*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

entonces

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j\omega s}\, ds =$$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\omega s}\, ds =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(\omega s)\, ds - j\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(\omega s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\omega}(\operatorname{sen}(\omega\frac{1}{2}) - \operatorname{sen}(-\omega\frac{1}{2})) + j\frac{1}{\omega}(\cos(\omega\frac{1}{2}) - \cos(-\omega\frac{1}{2})) =$$

$$= \frac{2}{\omega}\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2})$$

La función del segundo miembro se suele llamar seno cardinal y se representa por sinc.

Ejemplo 4.5.4. *La transformada de $g(x) = e^{-2\pi|x|}$ es la función*

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{4\pi}{4\pi^2 + \omega^2}$$

4.6. Boletín

1. Calcula la serie de Fourier de la función
$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \le 1 \\ 0, & \text{si } 1 < |x| \le 2 \end{cases}$$
2. Calcula la serie de Fourier de la función
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \le x < 0 \\ \pi - x, & \text{si } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$
3. Calcula las series de Fourier de las funciones $|\operatorname{sen}(x)|$ y $|\cos(x)|$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.
4. Se define la función $f(x) = x(1-x)$ para $0 \le x \le 1$. Calcula la serie de Fourier de la reflexión impar de f.
5. Se define la función $f(x) = 1 - 2x$ para $0 \le x \le 1$. Calcula la serie de Fourier de la reflexión par de f.
6. Se define la función $f(x) = x$ para $0 \le x \le 1$. Calcula la serie de Fourier de la traslación de f, definida por $f(x) = f(1+x)$, para $-1 \le x < 0$.
7. Calcula mediante integración la transformada de Fourier de la función triángulo definida por:
$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \le 1 \\ 0, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$
8. Calcula mediante integración la transformada de Fourier de la función decaimiento exponencial truncado definida por:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \le 0 \\ e^{-x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$