TEORÍA DE GRAFOS

Introducción

En matemáticas, un grafo es un conjunto de elementos llamados vértices o nodos, conectados por medios de enlaces denominados aristas o arcos. Un grafo, desde un punto de vista simple, permite representar una operación binaria interna de un conjunto. Uno de los problemas más representativos de la teoría de grafos es el ejemplo histórico denominado el problema de los puentes de Königsberg, problema que fue resuelto por Leonhard Euler.

Con un poco más de rigurosidad, podemos decir que un grafo G es un par ordenado G = (V, E), donde:

- V es un conjunto de vértices o nodos, y
- E es un conjunto de aristas o arcos, que relacionan estos nodos.

Consideraremos a V como un conjunto finito. Si los arcos poseen una dirección, el grafo de denomina grafo dirigido o dígrafo. En la figura 1 se muestra un grafo dirigido, representando los resultados del Grupo F del mundial de la FIFA Rusia 2018, y cuyos vértices indican a Alemania (GM), Suecia (SW), Corea del Sur (SK) y México (MX), conectados entre sí.

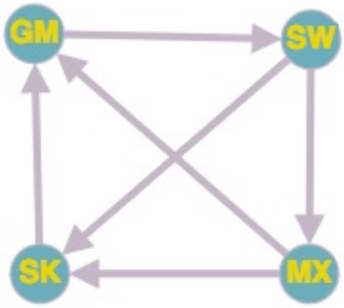

Figura 1: Grafo correspondiente al Grupo F, Mundial Rusia 2018.

Todo grafo dirigido se puede representar mediante una matriz asociada, denominada matriz de adyacencia [1]; como una representación de la conexión entre sus vértices. Para construir una matriz de adyacencia se debe seguir lo siguiente:

- Se crea una matriz cero, cuyas columnas y filas representan los nodos del grafo.
- Por cada arista que une a dos nodos, se coloca 1 al valor que hay actualmente en la ubicación correspondiente de la matriz.

Por ejemplo, para el grafo de nuestro ejemplo, su matriz de adyacencia sería:

Grupo F	*GM*	*SW*	*SK*	*MX*
GM	0	1	0	0
SW	0	0	1	1
SK	1	0	0	0
MX	1	0	1	0

- La primera fila indica que Alemania solo venció a Suecia.
- La segunda fila indica que Suecia ganó a Corea del Sur y a México.
- La tercera fila indica que Corea del Sur solo pudo vencer a Alemania, tal como indica la figura 1.
- La cuarta fila indica que México ganó a Alemania y Corea del Sur.

En un grafo se define una **k-trayectoria** como el camino para ir de un vértice a otro, atravesando por k enlaces. Podemos observar en la imagen de nuestro grafo que en ́el existe una **1-trayectoria** de GM a SW, una **1-trayectoria** de SW a SK, una **1-trayectoria** de SW a MX, entre otras. Además de las **1-trayectorias**, existen también las **2-trayectorias**, es decir, caminos de un vértice a otro vértice atravesando exactamente 2 enlaces. Por ejemplo, para ir de GM a SK existe una 2-trayectoria, porque se puede ir por el camino de GM hacia SW y de SW hacia SK, atravesando exactamente 2 enlaces.

Teorema 1. Si A es la matriz de adyacencia de una gráfica simple, el elemento ij de A^k es igual al número de k-trayectorias del vértice i al vértice j, para todo k∈N. [3][4]

Lo que nos quiere decir el Teorema 1 es que, el elemento ij de la matriz A del ejemplo anterior, nos proporciona el número de 1-trayetorias que hay del vértice i al vértice j. También nos asegura que en la matriz A^2 el elemento ij nos proporciona el número de 2-trayetorias que hay del vértice i al vértice j [3].

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso podemos observar que el elemento $\mathbf{c_{13}}$ es igual a 1 (texto en azul), lo que indica que existe exactamente UNA 2-trayectoria que va de GM hacia SK. En el gráfico podemos notar que se trata de la ruta GM–SW–SK. Además, como ejemplo también podemos decir que el elemento $\mathbf{c_{21}}$, que tiene un valor de 2 (texto en rojo), nos indica que existen exactamente dos 2-trayectorias que van de SW a GM. Estos caminos son SW-SK-GM y SW-MX-GM. Finalmente notamos que no hay 2-trayectorias de SK a MX ya que el elemento $\mathbf{c_{34}}$ es igual a 0.

Por lo tanto, el problema de hallar las **k-trayectorias** dentro de un grafo se resume a hallar la k-ésima potencia de la matriz A. Para hallar la k-ésima potencia de la matriz A podemos usar diagonalización de matrices, ya que si A es diagonalizable se tiene que $D = C^{-1}AC$, donde D es una matriz diagonal semejante a A, y C una matriz invertible, que diagonaliza a A.

Teorema 2. Si A es semejante a una matriz diagonal D, entonces su k-ésima potencia es:

$$A^k = CD^kC^{-1}$$

Gracias al álgebra lineal sabemos que la matriz diagonal D se compone de los valores propios de A y que la matriz C de vectores propios linealmente independientes de la matriz A.

EL PROBLEMA: CONNECTOMICS

Uno de los temas más recientes en neurobiología es el estudio de los *connectomas*. Un connectoma es un mapa específicamente dedicado a la conectividad de las neuronas, analizando los caminos entre ellas [2]. Se elaboran a partir de datos celulares y con ayuda de microscopios electrónicos. Además del tejido cerebral humano, se han analizado los connectomas de gatos, moscas, macacos, ratones, ratas y gusanos. Por ejemplo, el conectoma de la corteza cerebral de la visión del ratón tiene 29 nodos y 44 aristas; mientras que la médula de la mosca *Drosophila* tiene 1781 nodos y 33641 aristas [5].

El problema se complica pues las conexiones a nivel celular correspondientes a un sistema (por ejemplo el visual), bien interactúan con las redes conectivas de otros sistemas; entonces se habla de connectomas a "pequeña escala", a "meso-escala" y a "gran escala" [6]. En la figura se puede observar dos módulos que están interconectados entre sí [6]:

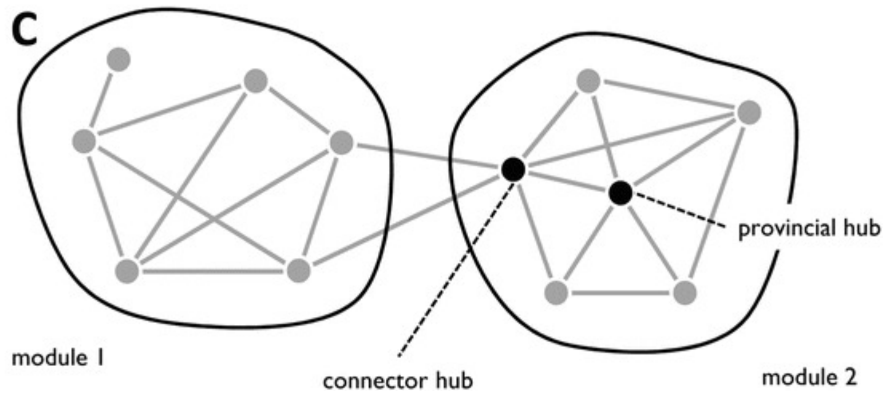

Figura 2. Diagrama de connectomas al interno de dos módulos, y entre los dos módulos.

REFERENCIAS:

[1] Grossman, S: Aplicaciones del Álgebra Lineal, Grupo Editorial Iberoamérica, México DF, pp. 124-132. México.
[2] Fornito, A., Zalesky, A. and Bullmore, T. Fundamentals of Brain Network Analysis. Elsevier 2016. ISBN: 978-0-12-407908-3. https://doi.org/10.1016/C2012-0-06036-X
[3] Duncan, A: Powers of the Adjacency Matrix and the Walk Matrix. CORE, recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/141678246.pdf [1 de enero de 2019]
[4] Knoth, P. and Zdrahal, Z. (2012) CORE: Three Access Levels to Underpin Open Access, D-Lib Magazine, 18, 11/12, Corporation for National Research Initiatives.
[5] Neurodata. Open project: Connectomics. https://neurodata.io/ Accessed 2019.
[6] Kennedy H., Van Essen D.C., Christen Y., editors. Micro-, Meso- and Macro-Connectomics of the Brain. https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK435773/figure/ch8.Fig1. Springer, 2016.

Entregables

Considere lo siguiente:.

- Se debe proveer un reporte con dos secciones. La primera parte se constituye de un marco teórico adecuado, junto con las demostraciones de los Teoremas 1 y 2.
- En la segunda sección debe constar exclusivamente el análisis de las conexiones mostrados en la Figura 2, proveyendo respuestas a las siguientes cuestiones:

1. Construya la matriz de adyacencia correspondiente a los grafos de los módulos 1 y 2, por separado; considerando que todas las conexiones son bidireccionales.
2. Construya la matriz de adyacencia correspondiente a los grafos de los módulos 1 y 2 interconectados, es decir, sin separarlo en módulos.
3. ¿Cuál de los dos módulos, considera que está mejor conectado al interno del mismo? Justifique su respuesta.
4. ¿Qué nodo tiene el menor número de conexiones directos en cada módulo por separado?

Justifique su respuesta.

5. ¿Qué nodo tiene el mayor número de conexiones directos en cada módulo por separado? Justifique su respuesta.
6. ¿Cuántas trayectorias de longitud 2 existen entre los nodos de cada uno de los connectomas, considerándolos por separado? Justifique su respuesta.
7. ¿Cuántas trayectorias de longitud 10 existen entre los nodos de cada uno de los connectomas, considerándolos por separado? Justifique su respuesta.
8. ¿Cuántas trayectorias de longitud 50 existen entre los nodos de cada uno de los connectomas, considerándolos por separado? Justifique su respuesta.
9. Responda las preguntas 6, 7 y 8 considerando como uno solo connectoma la unión de los dos módulos, según el esquema de Figura 2.

NOTA: Es lícito apoyarse en la tecnología, pero si necesita utilizar un software o calculadora (Matlab®, Python, etc), o algún sitio de resolución de matrices online (Online Matrix Calculator de blue-bit), debe ser indicado en el documento a entregar, planteando la fórmula teórica, e indicando si se utilizó para resolver esa ecuación; y repitiendo la indicación para cada una de las ecuaciones así resueltas. Si consultó un libro o artículo, se debe incluir en una sección Bibliografía o Referencias del documento.