TEORÍA DE GRAFOS

Introducción

En matemáticas, un grafo es un conjunto de elementos llamados vértices o nodos, conectados por medios de enlaces denominados aristas o arcos. Un grafo, desde un punto de vista simple, permite representar una operación binaria interna de un conjunto. Uno de los problemas más representativos de la teoría de grafos es el ejemplo histórico denominado el problema de los puentes de Königsberg, problema que fue resuelto por Leonhard Euler.

Con un poco más de rigurosidad, podemos decir que un grafo G es un par ordenado G = (V, E), donde:

- V es un conjunto de vértices o nodos, y
- E es un conjunto de aristas o arcos, que relacionan estos nodos.

Consideraremos a V como un conjunto finito. Si los arcos poseen una dirección, el grafo de denomina grafo dirigido o dígrafo. En la figura 1 se muestra un grafo dirigido, representando los resultados del Grupo F del mundial de la FIFA Rusia 2018, y cuyos vértices indican a Alemania (GM), Suecia (SW), Corea del Sur (SK) y México (MX), conectados entre sí.

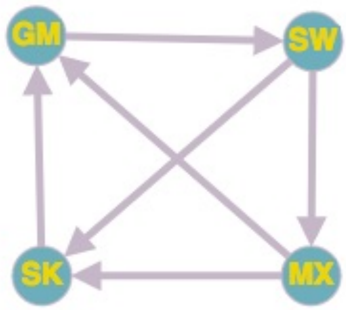


Figura 1: Grafo correspondiente al Grupo F, Mundial Rusia 2018.

Todo grafo dirigido se puede representar mediante una matriz asociada, denominada matriz de adyacencia [1]; como una representación de la conexión entre sus vértices. Para construir una matriz de adyacencia se debe seguir lo siguiente:

- Se crea una matriz cero, cuyas columnas y filas representan los nodos del grafo.
- Por cada arista que une a dos nodos, se coloca 1 al valor que hay actualmente en la ubicación correspondiente de la matriz.

Por ejemplo, para el grafo de nuestro ejemplo, su matriz de adyacencia sería:

Grupo F	*GM*	*SW*	*SK*	*MX*
GM	0	1	0	0
SW	0	0	1	1
SK	1	0	0	0
MX	1	0	1	0

- La primera fila indica que Alemania solo venció a Suecia.
- La segunda fila indica que Suecia ganó a Corea del Sur y a México.
- La tercera fila indica que Corea del Sur solo pudo vencer a Alemania, tal como indica la figura 1.
- La cuarta fila indica que México ganó a Alemania y Corea del Sur.

En un grafo se define una **k-trayectoria** como el camino para ir de un vértice a otro, atravesando por k enlaces. Podemos observar en la imagen de nuestro grafo que en el existe una **1-trayectoria** de GM a SW, una **1-trayectoria** de SW a SK, una **1-trayectoria** de SW a MX, entre otras. Además de las **1-trayectorias**, existen también las **2-trayectorias**, es decir, caminos de un vértice a otro vértice atravesando exactamente 2 enlaces. Por ejemplo, para ir de GM a SK existe una 2-trayectoria, porque se puede ir por el camino de GM hacia SW y de SW hacia SK, atravesando exactamente 2 enlaces.

Teorema 1. Si A es la matriz de adyacencia de una gráfica simple, el elemento ij de A^k es igual al número de k-trayectorias del vértice i al vértice j, para todo k∈N. [3][4]

Lo que nos quiere decir el Teorema 1 es que, el elemento ij de la matriz A del ejemplo anterior, nos proporciona el número de 1-trayetorias que hay del vértice i al vértice j. También nos asegura que en la matriz A^2 el elemento ij nos proporciona el número de 2-trayetorias que hay del vértice i al vértice j [3].

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \color{blue}{1} & 1 \\ \color{red}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso podemos observar que el elemento $\mathbf{c_{13}}$ es igual a 1 (texto en azul), lo que indica que existe exactamente UNA 2-trayectoria que va de GM hacia SK. En el gráfico podemos notar que se trata de la ruta GM–SW–SK. Además, como ejemplo también podemos decir que el elemento $\mathbf{c_{21}}$, que tiene un valor de 2 (texto en rojo), nos indica que existen exactamente dos 2-trayectorias que van de SW a GM. Estos caminos son SW-SK-GM y SW-MX-GM. Finalmente notamos que no hay 2-trayectorias de SK a MX ya que el elemento $\mathbf{c_{34}}$ es igual a 0.

Por lo tanto, el problema de hallar las **k-trayectorias** dentro de un grafo se resume a hallar la k-ésima potencia de la matriz A. Para hallar la k-ésima potencia de la matriz A podemos usar diagonalización de matrices, ya que si A es diagonalizable se tiene que $D = C^{-1}AC$, donde D es una matriz diagonal semejante a A, y C una matriz invertible, que diagonaliza a A.

Teorema 2. Si A es semejante a una matriz diagonal D, entonces su k-ésima potencia es:

$$A^k = CD^kC^{-1}$$

Gracias al álgebra lineal sabemos que la matriz diagonal D se compone de los valores propios de A y que la matriz C de vectores propios linealmente independientes de la matriz A.

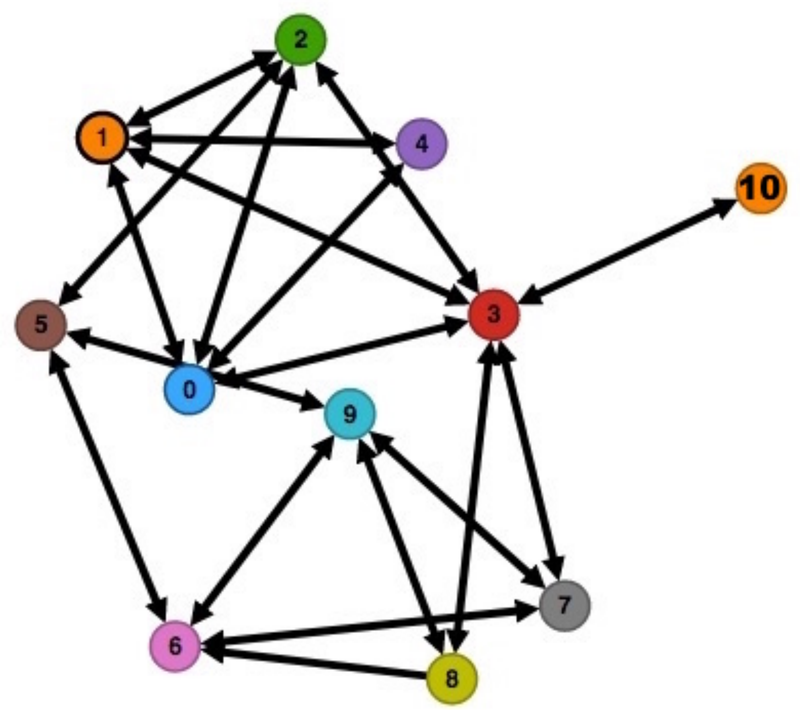
EL PROBLEMA: LA LUCHA CONTRA LA CORRUPCIÓN

En abril de 2013, un consorcio de periodistas reveló detalles sobre 130 mil cuentas bancarias en el exterior, como parte de lo que se conoce como "Offshore Leaks". Algo similar sucedió con los llamados "Panamá Papers", revelados en abril de 2016. Las investigaciones subsecuentes no son fáciles, pues cuentas en el exterior -incluso en paraísos fiscales- pueden ser lícitas, incluso de personas privadas sin enlaces con gobierno alguno. Además, se conoce que personas que practican actividades ilícitas, tales como el lavado de dinero o evasión de impuestos, nunca tienen cuentas a nombre propio, y existen muchos modos de evitar estar directamente involucrado a uno de los archivos revelados. Además, la cantidad de información es enorme, los Panamá papers constan de 11.5 millones de documentos confidenciales con información de cantidades descomunales de cuentas, propiedades y transacciones.

Por ejemplo, si se busca los archivos de Ilham Aliyev, presidente de Azerbaiján, aparece como presidente y accionista de Rosamund International Ltd., desde el 2003, y tal compañía aparece en cese de actividades. Sin embargo, los investigadores piensan que, en 2003, cuando Aliyev era miembro del Parlamento, podría haber violado la provisión contra operar y poseer negocios mientras dure el servicio público [2]. La teoría de grafos puede ayudar a aclarar las cosas, si se toma en cuenta conexiones de su núcleo familiar:

Red financiera de la familia Aliyev [2][5].

0. Ilham Aliyev
1. Mehriban (esposa)
2. Arzu (hija)
3. Leyla (hija)
4. Rosamund Int. Ltd.
5. Arbor Investments Ltd.
6. Portcullis Trustnet Ltd.
7. LaBelleza Holdings Ltd.
8. Harvard Management Ltd.
9. Naziq & Co.
10. Crovelent Holdings Ltd.



Se puede observar que la única conexión directa del presidente Aliyev con una compañía es con Rosamund Int. Ltd, declarada en cese de actividades; sin embargo, su núcleo familiar mantiene conexiones directas con otras empresas. El grafo corresponde a la red financiera de la familia Aliyev.

REFERENCIAS:

[1] Grossman, S: Aplicaciones del Álgebra Lineal, Grupo Editorial Iberoamérica, México DF, pp. 124-132. México.
[2] Villedieu, J: Analyzing the Offshore Leaks with Graphs, Linkurious, recuperado de: https://linkurio.us/blog/analysing-the-offshore-leaks-with-graphs/ [1 de enero de 2019]
[3] Duncan, A: Powers of the Adjacency Matrix and the Walk Matrix. CORE, recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/141678246.pdf [1 de enero de 2019]
[4] Knoth, P. and Zdrahal, Z. (2012) CORE: Three Access Levels to Underpin Open Access, D-Lib Magazine, 18, 11/12, Corporation for National Research Initiatives.
[5] Directed Graph Editor, accessible en http://bl.ocks.org/rkirsling/5001347

Entregables

Antes de proseguir, tenga presente que la presente es una técnica que se usa en las investigaciones, pero no constituye una evidencia de ilícitos en sí misma, sino que provee indicios para dirigir mayores investigaciones.

- Se debe proveer un reporte con dos secciones. La primera parte se constituye de un marco teórico adecuado, junto con las demostraciones de los Teoremas 1 y 2.
- En la segunda sección debe constar exclusivamente el análisis de las conexiones financieras de la familia del presidente Aliyev, proveyendo respuestas a las siguientes cuestiones:

1. Construya la matriz de adyacencia correspondiente al grafo dado, considerando que todas las conexiones son bidireccionales.
2. ¿Qué persona mantiene un mayor número de contactos directos con compañías? Justifique su respuesta.
3. ¿Qué persona tiene el menor número de contactos directos con compañías? Justifique su respuesta.
4. ¿Cuántas trayectorias de longitud 2 existen entre los nodos de la red mostrada? Justifique su respuesta.
5. ¿Cuántas trayectorias de longitud 27 existen entre los nodos de la red mostrada? Justifique su respuesta.
6. ¿Cuántas trayectorias de longitud 300 existen entre los nodos de la red mostrada? Justifique su respuesta.
7. Basado en la información dada, y en resultados de sus cálculos, ¿cuántas trayectorias de longitud 2 conectan al presidente Aliyev con alguna de las compañías de su red financiera? ¿Cuántas de longitud 3?

NOTA: Es lícito apoyarse en la tecnología, pero si necesita utilizar un software o calculadora (Matlab®, Python, etc), o algún sitio de resolución de matrices online (Online Matrix Calculator de blue-bit), debe ser indicado en el documento a entregar, planteando la fórmula teórica, e indicando si se utilizó para resolver esa ecuación; y repitiendo la indicación para cada una de las ecuaciones así resueltas. Si consultó un libro o artículo, se debe incluir en una sección Bibliografía o Referencias del documento.