EJERCICIO Nº 4

TEMA IV: Transformadores trifásicos

OBJETIVOS: Circuito equivalente del transformador trifásico, valoración de pérdidas y rendimiento, variación del rendimiento con el índice de carga y el factor de potencia.

ENUNCIADO: Un transformador trifásico de 10.000 kVA, 50 Hz, 132/66 kV y conexión Dy dio en los ensayos de vacío y cortocircuito los siguientes resultados:

- Ensayo de vacío lado de BT: U=66 kV, I=4 A, P=50 kW
- Ensayo de cortocircuito lado de AT: U=5500 V, I=22 A, P=30 kW

DETERMINAR:

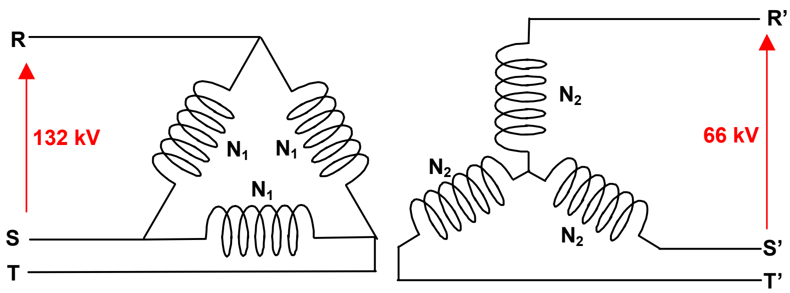
1. Flujo máximo (ϕ_m) sabiendo que el número de espiras del primario (**N$_1$**) es de 450 .
2. Parámetros del circuito equivalente referido al primario (R_{fe}, $X\mu$, R_{cc} y X_{cc}).
3. Tensión en bornes del secundario cuando el transformador alimenta a una carga trifásica equilibrada conectada en estrella de valor 400+200j por fase.
4. Rendimiento en el caso anterior.
5. Índice de carga con el que se obtiene el rendimiento máximo .

SOLUCIÓN:

Previamente a la resolución del problema, y puesto que la conexión de los devanados del transformador presenta el primario en triángulo, se plantearán unas breves consideraciones sobre la forma en que esto afecta al cálculo del circuito equivalente:

En los transformadores trifásicos, debido a la existencia de diferentes formas de conexión es posible que en alguno de los dos devanados el neutro no esté accesible, al no estar conectado en estrella (este el caso en la conexión Dy en la que el primario está en triángulo). **A pesar de ello, cuando se utilice el circuito equivalente se empleará siempre un equivalente fase – neutro, en el que las tensiones que se apliquen serán las tensiones fase – neutro del transformador y las corrientes que circulen serán las de línea.**

En el caso del devanado que esté conectado realmente en estrella las tensiones serán las reales de los devanados. Para el devanado conectado en triángulo las tensiones de fase que se utilicen serán ficticias y corresponderán a la consideración de un neutro también ficticio. Sin embargo, será posible calcular las tensiones de línea reales del devanado en triángulo con sólo multiplicar por $\sqrt{3}$. Además, como el transformador y la carga serán un sistema equilibrado, bastará con estudiar lo que ocurre en una de las fases para determinar las tensiones y corrientes de las otras dos.



1º) La conexión de los devanados Dy implica el primario conectado en triángulo a 132 kV y el secundario en estrella a 66 kV.

En los dos casos las tensiones referidas son las de línea.

Para calcular el flujo máximo se utilizará la expresión: $\mathbf{U_{1ef}} = 4{,}44 \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}_1 \cdot \phi_\mathbf{m}$ a partir de la cual es posible determinar directamente el valor del flujo máximo:

$$\phi_m = \frac{U_{1ef}}{4{,}44 \cdot f \cdot N_1} = \frac{132 \cdot 10^3}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 450} = 1{,}32\ \mathbf{Wb}$$

2º) Los ensayos de vacío y cortocircuito pueden realizarse indistintamente por el lado de baja tensión o por el de alta. **Los resultados deben ser idénticos en la medida de las pérdidas mientras que diferirán en los valores de las corrientes y tensiones ya que estarán afectadas por la relación de transformación del transformador.**

En este sentido, es muy habitual que el ensayo de vacío se realice por el lado de baja tensión y el de cortocircuito por el de alta. Esta forma de llevar a cabo los ensayos es la más simple y económica, ya que en el de vacío al utilizar el lado de baja es necesario aplicar menos tensión y la corriente es muy reducida. En el de cortocircuito, al hacerlo por el lado de alta es necesario aportar menos corriente, ya que la corriente nominal por este lado es más baja que por el de baja tensión y la tensión en este caso no es problema ya que durante el ensayo sólo se aplica un pequeño porcentaje de la tensión nominal.

La diferencia entre realizar el ensayo por el lado de alta y hacerlo por el de baja estriba en la estimación de los parámetros del circuito equivalente que se haga a partir de los resultados de los ensayos. Si, como es habitual, se pretende determinar el circuito equivalente del transformador referido al primario, los ensayos deberían realizarse por dicho devanado. **Si en cambio se hubiesen realizado por el secundario, las impedancias calculadas a partir de los resultados del ensayo deberían ser referidas al primario multiplicando por la relación de transformación al cuadrado.** De hecho, esa es la situación que se da en este problema:

El ensayo de vacío está realizado por el secundario, por tanto:

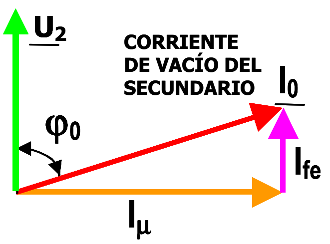
$$\frac{\mathbf{P}_0}{3} = \frac{\left[\frac{\mathbf{U}_{2n}}{\sqrt{3}}\right]^2}{\mathbf{R}_{fe}} \rightarrow \mathbf{R}_{fe} = \frac{\mathbf{U}_{2n}^{\;2}}{\mathbf{P}_0} = \frac{66000}{50000} = 87{,}12\,\mathbf{\Omega}$$

La resistencia de pérdidas en el hierro obtenida de este modo estará referida al secundario. Como se pretende obtener el circuito equivalente reducido al primario es necesario multiplicar por $\mathbf{r_t^2}$: $\mathbf{R}_{fe}^{\;1} = \mathbf{R}_{fe}\cdot\mathbf{r}_t^{\;2} = 87{,}12\cdot 4 = 348{,}48\,\mathbf{\Omega}$.

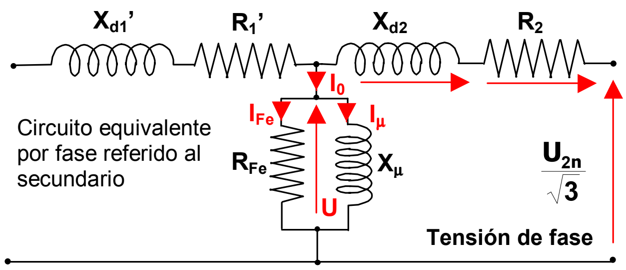
Por otro lado: $\mathbf{P}_0 = \sqrt{3}\cdot\mathbf{U}_2\cdot\mathbf{I}_0\cdot\mathbf{Cos}\varphi_0 \rightarrow \mathbf{Cos}\varphi_0 = \dfrac{\mathbf{P}_0}{\sqrt{3}\cdot\mathbf{U}_2\cdot\mathbf{I}_0} = \dfrac{50000}{\sqrt{3}\cdot 66000\cdot 4} = 0{,}109\ \mathbf{A}$.

Entonces: $\mathbf{I}_{fe} = \mathbf{I}_0\cdot\mathbf{Cos}\varphi_0 = 4\cdot 0{,}109 = 0{,}436\ \mathbf{A}$

$\mathbf{I}_\mu = \mathbf{I}_0\cdot\mathbf{Sen}\varphi_0 = 3{,}98\ \mathbf{A}$



Una vez que se conocen las dos componentes de la corriente de vacío es posible determinar el valor de la reactancia magnetizante de una forma casi directa:



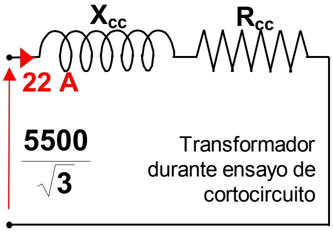
Este esquema muestra el circuito equivalente del transformador durante el ensayo de vacío realizado por el secundario. Puesto que se trata de un equivalente entre fase y neutro, la tensión que lo alimenta será la de fase es decir, **habrá que dividir la tensión nominal por $\sqrt{3}$.**

Obsérvese que se han marcado con ' las variables del primario, ya que en esta ocasión el ensayo se realizó por el secundario y, por este motivo, las variables que se deduzcan de él estarán reducidas a este devanado.

Si en el circuito anterior, dado que sólo circula la corriente de vacío, se supone que la tensión U coincide con la de alimentación del transformador, la reactancia de magnetización se puede obtener directamente: $\mathbf{X}_\mu = \dfrac{\frac{\mathbf{U}_{2n}}{\sqrt{3}}}{\mathbf{I}_\mu} = \dfrac{\frac{66000}{\sqrt{3}}}{3{,}98} = 9574\,\mathbf{\Omega}$.

Esta reactancia está referida al secundario, para referirla al primario hay que multiplicarla por $\mathbf{r_t^2}$: $\mathbf{X}_\mu^{\;1} = \mathbf{X}_\mu\cdot\mathbf{r}_t^{\;2} = 9574\cdot 4 = 38296\,\mathbf{\Omega}$.

Ahora se calcularán la resistencia R_{cc} y la reactancia X_{cc}. En este caso, se utilizará el ensayo de cortocircuito, el cual al haber sido realizado por el primario permitirá determinar directamente los parámetros referidos al dicho devanado.



En el cálculo se despreciará la rama en paralelo al considerar que durante el ensayo de cortocircuito la corriente que circula por esta rama es muy baja (la tensión es muy reducida, por tanto, el flujo será bajo y la corriente de magnetización también).

$$\mathbf{P_{cc}} = \sqrt{3} \cdot \mathbf{U_{cc}} \cdot \mathbf{I_{cc}} \cdot \mathbf{Cos\varphi_{cc}} \rightarrow \mathbf{Cos\varphi_{cc}} = \frac{\mathbf{P_{cc}}}{\sqrt{3} \cdot \mathbf{U_{cc}} \cdot \mathbf{I_{cc}}}$$

$$\mathbf{Cos\varphi_{cc}} = 0{,}143 .$$

Por otro lado, la potencia también pude calcularse como:

$$\mathbf{P_{cc}} = 3 \cdot \mathbf{R_{cc}} \cdot \mathbf{I_{cc}}^2 \rightarrow \mathbf{R_{cc}} = \frac{\mathbf{P_{cc}}}{3 \cdot \mathbf{I_{cc}}^2} = \frac{30000}{3 \cdot 22^2} = 20{,}66\ \mathbf{\Omega} .$$

La reactancia se podrá obtener como: $\mathbf{X_{cc}} = \mathbf{R_{cc}} \cdot \mathbf{Tg\varphi_{cc}} = 143\mathbf{\Omega}$.

Téngase en cuenta que aunque el transformador tiene el primario en triángulo se ha aplicado como tensión 5500/$\sqrt{3}$, es decir, una tensión ficticia fase – neutro, ya que se utiliza el circuito equivalente.

3º) Para calcular la tensión del secundario del transformador se utilizará el circuito equivalente simplificado. La carga que alimentará el transformador es una carga que en forma compleja vale: 400+200j y, por tanto, tiene un módulo de 447Ω.

Puesto que la tensión del secundario es de 66 kV y la carga está en estrella, la corriente por el secundario del transformador con esta carga se podrá obtener como: $\frac{\frac{66000}{\sqrt{3}}}{447} = 85{,}2\ \mathbf{A}$.

La corriente nominal del secundario se puede calcular de la siguiente forma:

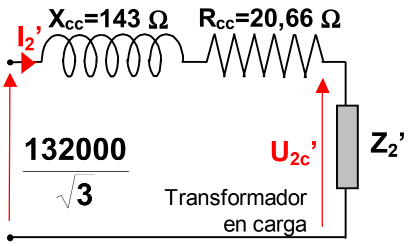
$$\mathbf{S_n} = \sqrt{3} \cdot \mathbf{U_{2n}} \cdot \mathbf{I_{2n}} \rightarrow \mathbf{I_{2n}} = \frac{\mathbf{S_n}}{\sqrt{3} \cdot \mathbf{U_{2n}}} = \frac{10000 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 66000} \cong 87{,}5\ \mathbf{A}$$

Considerando que con la carga que se plantea el problema el transformador está prácticamente en condiciones de carga nominal, **para realizar todos los cálculos se despreciará la corriente de vacío y, por lo tanto, en el circuito equivalente se eliminará la rama en paralelo.**

Debe tenerse en cuenta también que al usar el circuito equivalente referido al primario, la carga se debe conectar a él también referida al primario. Puesto que se pretende determinar la caída de tensión del transformador, se utilizará el circuito equivalente para calcular la corriente y a partir de ella se obtendrá la tensión en el secundario en carga:

La impedancia de carga se referirá al primario: $\underline{\mathbf{Z}}_2' = \underline{\mathbf{Z}}_2 \cdot \mathbf{r_t}^2 = [400 + 200\mathbf{j}] \cdot 4 = 1600 + 800\mathbf{j}$.

El circuito equivalente en carga quedará, por tanto, de la siguiente forma:



En el circuito se cumple:

$$\mathbf{I}_2' = \frac{132000 / \sqrt{3}}{\sqrt{(1600 + 20{,}66)^2 + (800 + 143)^2}} = 40{,}64\ \mathbf{A} .$$

Por tanto:

$$\mathbf{U_{2c}}' = \mathbf{Z}_2' \cdot \mathbf{I}_2' = \sqrt{1600^2 + 800^2} \cdot 40{,}64 = 72700\ \mathbf{V}$$

La tensión que se acaba de obtener es la tensión de fase del secundario en carga referida al primario. Para obtener la tensión real del secundario hay que multiplicar por $\sqrt{3}$ para convertirla en tensión de línea y dividir por la relación de transformación para referirla al secundario: $\mathbf{U_{2clínea}}' = \mathbf{U_{2c}}' \cdot \sqrt{3} = 125900\ \mathbf{V}$ y $\mathbf{U_{2clínea}} = \dfrac{\mathbf{U_{2clínea}}'}{\mathbf{r_t}} = 62690\ \mathbf{V}$.

Se ha obtenido, por tanto, una tensión de 62.960 V en el secundario cuando trabaja con la carga que se indicó en el enunciado.

Una vez más en la resolución de este apartado se ha aplicado al circuito equivalente del transformador una tensión de 132000/ $\sqrt{3}$, es decir, una tensión ficticia fase – neutro, ya que se utiliza el circuito equivalente.

Otra forma de resolver este apartado, más larga y complicada que la anterior, pero que permite observar el grado de imprecisión de las expresiones matemáticas utilizadas en el cálculo de las caídas de tensión consiste en determinar el índice de carga del transformador a partir del valor de I_2', a continuación, se calculan las tensiones de cortocircuito relativas ε_{RCC} y ε_{XCC}, conocidos estos dos parámetros, y puesto que la carga es un dato, se determinará el valor de la caída de tensión ε_C y a partir de ella la tensión en el secundario del transformador.

Seguidamente, se resolverá de este modo:

$$\mathbf{S_n} = \sqrt{3} \cdot \mathbf{U_{1n}} \cdot \mathbf{I_{1n}} \rightarrow \mathbf{I_{1n}} = \frac{\mathbf{S_n}}{\sqrt{3} \cdot \mathbf{U_{1n}}} = \frac{10000 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 132000} \cong 43{,}8\ \mathbf{A} \qquad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{I_2}'}{\mathbf{I_1}} = \frac{40{,}64}{43{,}8} \cong 0{,}93$$

$$\varepsilon_{\mathbf{Rcc}} = \frac{\mathbf{U_{Rcc}}}{\mathbf{U_{1n}}} = \frac{\mathbf{I_{1n}} \cdot \mathbf{R_{cc}}}{\mathbf{U_{1n}}} = \frac{43{,}8 \cdot 20{,}66}{132000/\sqrt{3}} = 0{,}012$$

$$\varepsilon_{\mathbf{Xcc}} = \frac{\mathbf{U_{Xcc}}}{\mathbf{U_{1n}}} = \frac{\mathbf{I_{1n}} \cdot \mathbf{X_{cc}}}{\mathbf{U_{1n}}} = \frac{43{,}8 \cdot 143}{13200/\sqrt{3}} = 0{,}082$$

La carga es 400+200j por lo tanto, se cumple que: $\mathbf{Tg\varphi} = 0{,}5 \rightarrow \mathbf{Cos\varphi} = 0{,}89; \mathbf{Sen\varphi} = 0{,}45$

$$\varepsilon_{\mathbf{c(\%)}} = \mathbf{C} \cdot [\varepsilon_{\mathbf{RCC}} \cdot \mathbf{Cos\varphi} + \varepsilon_{\mathbf{XCC}} \cdot \mathbf{Sen\varphi}] = 0{,}93 \cdot [0{,}012 \cdot 0{,}89 + 0{,}082 \cdot 0{,}45] = 0{,}044$$

$$\mathbf{U_{2c}} = \mathbf{U_{2n}} \cdot [1 - \varepsilon_{\mathbf{c}}] = 66000 \cdot [1 - 0{,}044] = 63096\ \mathbf{V}$$

Tal y como se desprende de los resultados, existe mediante este procedimiento una diferencia del 2 por mil aproximadamente con respecto al cálculo realizado sobre el circuito equivalente. Esta pequeña discrepancia es consecuencia de que las expresiones para el cálculo de las caídas de tensión son aproximadas, sin embargo, producen errores despreciables.

4º) Para el cálculo del rendimiento utilizaremos la expresión que incluye el índice de carga y el factor de potencia, ya que ambos datos son conocidos: $\eta = \dfrac{\mathbf{C} \cdot [1 - \varepsilon_{\mathbf{c}}] \cdot \mathbf{S_n Cos\varphi}}{\mathbf{C} \cdot [1 - \varepsilon_{\mathbf{c}}] \cdot \mathbf{S_n Cos\varphi} + \mathbf{P_0} + \mathbf{P_{cc} C^2}}$

Al aplicar la expresión anterior hay que tener en cuenta que la corriente nominal del primario del transformador $\mathbf{I_{1n}}$ es de **43,8 A**. Si se observan los resultados del ensayo de cortocircuito, se puede apreciar que en dicho ensayo no se llegó hasta la corriente nominal sino hasta 22 A. Por tanto, las pérdidas obtenidas en este ensayo no son las nominales. **Es necesario corregir el valor de las pérdidas para obtener la P_{cc} que aparece en la expresión del rendimiento**.

Para ello, se planteará que: $\mathbf{P_{cc}} = 3 \cdot \mathbf{R_{cc}} \cdot \mathbf{I_{cc}}^2 \rightarrow \dfrac{\mathbf{P_{cc}}}{\mathbf{I_{cc}}^2} = 3 \cdot \mathbf{R_{cc}}$.

Como tenemos la potencia P_{cc} correspondiente al ensayo con 22 A y la corriente nominal (43,8 A) a la que queremos calcular la P_{cc} nominal basta plantear que el cociente entre potencia y corriente debe mantenerse constante: $\dfrac{\mathbf{P_{ccNominal}}}{43{,}8^2} = \dfrac{30000}{22^2} \rightarrow \mathbf{P_{cc}} = 118586\mathbf{W}$.

Se podría haber llegado a este resultado directamente, planteando que las pérdidas medidas durante el ensayo de cortocircuito, realizado para un cierto índice de carga **C** (**P_{cc}'**), son: $\mathbf{P_{cc}}' = \mathbf{C^2} \cdot \mathbf{P_{ccNominal}}$.

El índice de carga con el que se realizó el ensayo es: $\mathbf{C} = \frac{22}{43{,}8} = 0{,}502$, por tanto, las pérdidas en condiciones de carga nominal serán: $\mathbf{P_{ccNominal}} = \frac{\mathbf{P_{cc}}'}{\mathbf{C}^2} = 118586\ \mathbf{W}$

A partir de este dato ya es posible calcular el rendimiento, ya que la caída de tensión ε_C se calculó en un apartado anterior:

$$\eta = \frac{\mathbf{C} \cdot [1-\varepsilon_\mathbf{c}] \cdot \mathbf{S_n Cos\varphi}}{\mathbf{C} \cdot [1-\varepsilon_\mathbf{c}] \cdot \mathbf{S_n Cos\varphi} + \mathbf{P}_0 + \mathbf{P_{cc} C}^2} = \frac{0{,}93 \cdot [1-0{,}044] \cdot 10000 \cdot 10^3 \cdot 0{,}89}{0{,}93 \cdot [1-0{,}044] \cdot 10000 \cdot 10^3 \cdot 0{,}89 + 50000 + 118586} = 0{,}978\ .$$

Si se hubiese despreciado la caída de tensión, el resultado obtenido habría sido prácticamente el mismo:

$$\eta = \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{S_n Cos\varphi}}{\mathbf{C} \cdot \mathbf{S_n Cos\varphi} + \mathbf{P}_0 + \mathbf{P_{cc} C}^2} = \frac{0{,}93 \cdot 10000 \cdot 10^3 \cdot 0{,}89}{0{,}93 \cdot 10000 \cdot 10^3 \cdot 0{,}89 + 50000 + 118586} = 0{,}98$$

5º) Para el cálculo del índice de carga con el que se obtiene el rendimiento máximo basta con aplicar directamente la expresión: $\mathbf{C_{\eta max}} = \sqrt{\frac{\mathbf{P}_0}{\mathbf{P_{cc}}}} = \sqrt{\frac{50000}{118586}} = 0{,}65$

RESUMEN

- **Conceptos utilizados para la resolución del problema**
  - Formas de conexión devanados en transformadores trifásicos.
  - Relación entre flujo máximo y tensión.
  - Formas de realización ensayos vacío y cortocircuito: diferencias entre realizarlos por el primario y por el secundario.
  - Componentes de la corriente de vacío
  - Utilización del circuito equivalente para el cálculo de tensiones y corrientes.
  - Magnitudes de fase y de línea.
  - Índice de carga.
  - Caída de tensión interna.
  - Tensiones de cortocircuito relativas.
  - Variación del rendimiento con el factor de potencia y el índice de carga.
  - Índice de carga de rendimiento máximo.

- **Expresiones matemáticas utilizadas en la resolución del problema**
  - $\mathbf{U_{1ef}} = 4{,}44 \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{\phi_m}$
  - $\mathbf{I_{fe}} = \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{Cos\varphi}_0 \quad \mathbf{I}_\mu = \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{Sen\varphi}_0$
  - $\mathbf{P_{cc}} = \sqrt{3} \cdot \mathbf{U_{cc}} \cdot \mathbf{I_{cc}} \cdot \mathbf{Cos\varphi_{cc}} \to \mathbf{Cos\varphi_{cc}} = \frac{\mathbf{P_{cc}}}{\sqrt{3} \cdot \mathbf{U_{cc}} \cdot \mathbf{I_{cc}}}$
  - $\mathbf{P_{cc}} = 3 \cdot \mathbf{R_{cc}} \cdot \mathbf{I_{cc}}^2 \to \mathbf{R_{cc}} = \frac{\mathbf{P_{cc}}}{3\mathbf{I_{cc}}^2}$
  - $\mathbf{X_{cc}} = \mathbf{R_{cc}} \cdot \mathbf{Tg\varphi_{cc}}$
  - $\mathbf{Z}_2' = \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{r_t}^2$
  - $\mathbf{P}_2 = \sqrt{3} \cdot \mathbf{U_{2Clínea}} \cdot \mathbf{I_{2Clínea}} \cdot \mathbf{Cos\varphi}$

- $C = \frac{I_{2C}}{I_{2n}} \quad P_2 = C \cdot \sqrt{3} \cdot U_{2C\,línea} \cdot I_{2n\,línea} \cdot Cos\varphi$
- $S_n = \sqrt{3} \cdot U_{2n\,línea} \cdot I_{2n\,línea}$
- $C = \frac{I_2'}{I_1}$
- $\varepsilon_{cc} = \frac{U_{cc}}{U_{1n}} \quad \varepsilon_{Rcc} = \frac{U_{Rcc}}{U_{1n}} \quad \varepsilon_{Xcc} = \frac{U_{Xcc}}{U_{1n}}$
- $\varepsilon_{c(\%)} = C \cdot [\varepsilon_{RCC} \cdot Cos\varphi + \varepsilon_{XCC} \cdot Sen\varphi] \quad \varepsilon_{Rcc} = \frac{U_{Rcc}}{U_{1n}} = \frac{I_{1n} \cdot R_{cc}}{U_{1n}}$
- $\varepsilon_{c(\%)} = \frac{U_{2n} - U_{2C}}{U_{2n}} = \frac{U_{1n} - U_{2C}'}{U_{1n}} \quad U_{2c} = U_{2n} \cdot [1 - \varepsilon_c]$
- $\varepsilon_{Xcc} = \frac{U_{Xcc}}{U_{1n}} = \frac{I_{1n} \cdot X_{cc}}{U_{1n}} \quad \varepsilon_{Xcc} = \frac{I_{2n} \cdot X_{cc}}{U_{2n}}$
- $\eta = \frac{C \cdot [1 - \varepsilon_c] \cdot S_n Cos\varphi}{C \cdot [1 - \varepsilon_c] \cdot S_n Cos\varphi + P_0 + P_{cc} C^2}$
- $\eta = \frac{C \cdot S_n Cos\varphi}{C \cdot S_n Cos\varphi + P_0 + P_{cc} C^2}$
- $C_{\eta max} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}}$