Sistemas de ecuaciones lineales

Dra. Mireya Bracamonte

ESPOL

2019

Rango de una matriz

Teorema

Sean A y B matrices escalonadas equivalentes por filas. Entonces A y B tienen exactamente el mismo número de filas no nulas.

Rango de una matriz

Teorema

Sean A y B matrices escalonadas equivalentes por filas. Entonces A y B tienen exactamente el mismo número de filas no nulas.

Sean A una matriz y C una matriz escalonada equivalente por filas a la matriz A. Entonces se define el **rango** de A, como el número de filas no nulas de C.

El rango lo denotaremos como $\rho(A) = Rang(A)$.

Rango de una matriz

Teorema

Sean A y B matrices escalonadas equivalentes por filas. Entonces A y B tienen exactamente el mismo número de filas no nulas.

Sean A una matriz y C una matriz escalonada equivalente por filas a la matriz A. Entonces se define el **rango** de A, como el número de filas no nulas de C.

El rango lo denotaremos como $\rho(A) = Rang(A)$.

Si A es de orden $m \times n$. Entonces, $Rang(A) \leq \min\{m, n\}$.

❋ *Definición*

Una **ecuación de primer grado** *o* **ecuación lineal** *es una igualdad que involucra una o más variables de potencia uno y no contiene productos entre las variables, es decir, es una expresión de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b. \tag{1}$$

❶ *A* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$ *se les conoce como* **coeficiente** *de la ecuación,*
❷ *El escalar* $b \in \mathbb{K}$ *se le llama* **término independiente** *o constante de la ecuación* (1).
❸ *A* $x_1, x_2, ..., x_n$ *se les llama incógnitas.*

❋ *Definición*

Una **ecuación de primer grado** *o* **ecuación lineal** *es una igualdad que involucra una o más variables de potencia uno y no contiene productos entre las variables, es decir, es una expresión de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b. \tag{1}$$

❶ *A* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ *se les conoce como* **coeficiente** *de la ecuación,*
❷ *El escalar* $b \in \mathbb{K}$ *se le llama* **término independiente** *o constante de la ecuación* (1).
❸ *A* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *se les llama incógnitas.*

Note que si en ecuación (1) todos los coeficientes son iguales a cero y el término independiente no, se dice que la ecuación es **inconsistente** o **imcompatible**.

❋ *Definición*

Una **ecuación de primer grado** *o* **ecuación lineal** *es una igualdad que involucra una o más variables de potencia uno y no contiene productos entre las variables, es decir, es una expresión de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b. \tag{1}$$

❶ *A* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$ *se les conoce como* **coeficiente** *de la ecuación,*
❷ *El escalar* $b \in \mathbb{K}$ *se le llama* **término independiente** *o constante de la ecuación* (1)*.*
❸ *A* $x_1, x_2, ..., x_n$ *se les llama incógnitas.*

Note que si en ecuación (1) todos los coeficientes son iguales a cero y el término independiente no, se dice que la ecuación es **inconsistente** o **imcompatible**.
En caso de que en la ecuación (1) $b = 0$, la ecuación se llama **homogénea** y, en caso contrario, se llama **no homogénea**.

Como ecuaciones homogéneas, se tienen:

1. $5x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0$,
2. $-x + 4y - 5x + 2v = 0$.

Como ecuaciones homogéneas, se tienen:

1. $5x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0,$
2. $-x + 4y - 5x + 2v = 0.$

Como ecuaciones no homogéneas, se tienen:

1. $2x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 5,$
2. $4x - 2y + z - \dfrac{1}{5}v = 2.$

❋ *Definición*

Una **solución** *de la ecuación* (1) *es una secuencia ordenada finita* $s_1, s_2, \cdots, s_n$ *de escalares que al ser reemplazados, simultáneamente, en cada variable respectivamente, satisfacen tal ecuación. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación del tipo* (1) *se denomina* **conjunto solución**.

❋ *Definición*

Un **sistema lineal** *de* m *ecuaciones con* n *variables o incógnitas* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *es un conjunto de* m *ecuaciones lineales de la forma*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \right. \tag{2}$$

❶ $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $(i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n)$ *son llamados* **coeficientes** *del sistema* (2),

❷ *Los* $b_1, b_2, ..., b_m$ *son los* **términos constantes** *o independientes.*

✻ *Definición*

Un **sistema lineal** *de m ecuaciones con n variables o incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es un conjunto de m ecuaciones lineales de la forma*

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right. \tag{2}$$

❶ $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $(i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n)$ *son llamados* **coeficientes** *del sistema* (2),

❷ *Los $b_1, b_2, ..., b_m$ son los* **términos constantes** *o independientes.*

En el caso en que $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, es decir todos los téminos independientes son nulos, el sistema (2) es denominado **homogéneo** y si al menos uno de los términos constantes es distinto de cero, el sistema se llama **no homogéneo**.

Escuela Superior Politécnica del Litoral

Considere la matriz cuyos elementos o entradas son los coeficientes del sistema de ecuaciones (2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} .$$

Esta matriz A recibe el nombre de **matriz de coeficientes** del sistema o simplemente matriz del sistema.

Además se consideran las matrices columnas, una cuyas componentes sean los términos independientes del sistema (2), $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$, y la otra la matriz columna cuyas componentes sean las incógnitas del sistema (2) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$.

A la matriz B, definida antes se le llama matriz de términos independientes y a la matriz X se le llama matriz de incógnitas.

Ahora, haciendo uso de la multiplicación de matrices y la definición de igualdad de matrices se puede escribir el sistema (2) como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}. \tag{3}$$

Esta representación del sistema de ecuaciones lineales (2) dada por (3) se denomina **representación matricial** del sistema y puede expresarse como $A \cdot X = B$.

Ahora bien, se considera la matriz $(A|B) \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$ a la matriz que se obtiene añadiendo a la matriz A el vector columna de términos independientes y se le llama **matriz ampliada del sistema**:

$$(A|B): \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ejemplo

Hallar la representación matricial del sistema $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-5z & = & i \\ 3x+5y+z & = & -2 \\ 2x-8z & = & 1. \end{array}\right.$

espol Escuela Superior Politécnica del Litoral

Ejemplo

Escribir el sistema de ecuaciones correspondiente a:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

❋ *Definición*

Una secuencia finita de escalares $s_1, s_2, ..., s_n$ *es una solución del sistema* (2) *si todas las ecuaciones se satisfacen al sustituir* $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ..., $x_n = s_n$.
El conjunto formado por todas las soluciones de (2) *se le llama* **conjunto solución** *del sistema.*

❋ *Definición*

Una secuencia finita de escalares $s_1, s_2, ..., s_n$ *es una solución del sistema* (2) *si todas las ecuaciones se satisfacen al sustituir* $x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n$.
El conjunto formado por todas las soluciones de (2) *se le llama* **conjunto solución** *del sistema.*

● *Ejemplo*

El lector puede fácilmente verificar que $x = 2, y = 1$ *y* $z = 2$ *es una solución del sistema*

$$\begin{cases} x + 3y & = & 5 \\ 4x + 5y - 3z & = & 7 \\ -x + z & = & 0 \end{cases}.$$

❋ *Definición*

1. *Un sistema de ecuaciones lineales se dice* **consistente** *o* **compatible** *si tiene alguna solución.*
2. *Un sistema de ecuaciones lineales se dice* **determinado** *si tiene una única solución.*
3. *Un sistema de ecuaciones lineales se dice* **indeterminado** *si existe más de una solución.*
4. *Un sistema se dice* **inconsistente** *o* **incompatible** *si no tiene solución alguna.*

Observación

Ahora veremos los sistemas homogéneos $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times 1}$, es decir, un sistema de la forma

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Es fácil verificar que $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times 1}$ es solución del sistema; por lo tanto un sistema homogéneo <u>nunca</u> es inconsistente. Entonces un sistema homogéneo no puede sino tener la solución de ceros (se llama también **solución trivial**) o tener infinito número de soluciones.

❋ *Definición*

Supongamos que $A \cdot X = B$ *y* $C \cdot X = D$ *son dos sistemas de* m *ecuaciones y* n *variables. Diremos que éstos son* **sistemas equivalentes** *si* $(A|B)$ *y* $(C|D)$ *son equivalentes por filas.*

Escuela Superior Politécnica del Litoral

✻ *Definición*

Supongamos que $A \cdot X = B$ *y* $C \cdot X = D$ *son dos sistemas de* m *ecuaciones y* n *variables. Diremos que éstos son* **sistemas equivalentes** *si* $(A|B)$ *y* $(C|D)$ *son equivalentes por filas.*

❍ *Teorema*

Si dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, entonces tienen el mismo conjunto solución.

Escuela Superior Politécnica del Litoral

Teorema *(Teorema de Rouché-Frobenius)*

Sea A una matriz de orden $m \times n$ y consideremos el sistema $A \cdot X = B$ de m ecuaciones con n variables y sea $(A|B)$ la matriz ampliada del sistema. Entonces:

1. *El sistema es consistente si y sólo si $rang(A) = rang((A|B))$.*
2. *El sistema es consistente determinado si y sólo si $rang(A) = rang((A|B)) = n$.*
3. *El sistema es consistente indeterminado si y sólo si$rang(A) = rang((A|B)) = r < n$. En este caso, existen $n - r$ variables libres.*
4. *El sistema es inconsistente si y sólo si$rang(A) \neq rang((A|B))$.*

Ejemplo

Utilizar el método de Gauss-Jordan para resolver, de ser posible, el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -11 \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ -5x_1 - 12x_2 + 8x_3 + 13x_4 = -34 \end{cases}$$

Ejemplo

Utilizar el método de Gauss-Jordan para resolver, de ser posible, el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Observación

Si obtenemos una matriz donde todos las entradas de una fila, correspondientes a los coeficientes de las variables es son iguales a cero y el término constante diferente de cero, entonces el sistema no tiene solución o es inconsistente. Por ejemplo, si se obtiene una matriz de la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

la última ecuación se lee $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3$; la cual no tiene solución, porque el sistema no tiene solución o es inconsistente.

espol Escuela Superior Politécnica del Litoral

Ejemplo

Estudiar el sistema $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y+4x=5 \\ 2x-y+3x=4 \end{cases}$

Ejemplo

Estudiar el sistema $\begin{cases} 2x-4y+16z-14v=10 \\ -x+5y-17z+19v=-2 \\ x-3y+11z-11v=4 \\ 3x-4y+18z-13v=17. \end{cases}$

Ejemplo

Discutir y resolver en $\mathbb{R}$ *según los valores del parámetro real* a *el sistema lineal*

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a. \end{cases}$$

espol Escuela Superior Politécnica del Litoral

Ejercicios

* Determine, de ser posible el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ para los diferentes valores de λ.
* Resolver el sistema $\begin{cases} 2ix+(1+i)y & = & \dfrac{2}{3} \\ 6ix+(9+3i)y & = & 5-3i \end{cases}$


QUIZ

❋ Determine, de ser posible, el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ de tal forma que su gráfica contenga los puntos $(0,1),(1,-1),(2,5)$ y $(3,37)$.

❋ Una compañia tiene tres plantas de producción P_1, P_2, P_3. En cada una de estas plantas se fabrican tres productos $A; B; C$. Supongamos que de una unidad de insumo se sabe que. La primera planta produce 4 de A; 2 de B y 4 de C; la segunda planta produce 5 de A; 4 e B y 2 de C; la tercera planta produce 2 de A; 4 e B y 5 de C. Las demandas a la compañia de estos tres productos son 1700 de A; 1600 de B y 1550 de C. ¿Cuántas unidades de insumo requiere producir cada planta para satisfacer la demanda?.

espol Escuela Superior Politécnica del Litoral