Álgebra lineal

Espacios vectoriales

Mireya Rafaela Bracamonte
Luz Elimar Marchan

2

Índice general

Capítulo 1

Espacios vectoriales

Cuando se estudia el conjunto $M_n(\mathbb{K})$, de las matrices de orden n cuyas entradas se encuentran en un campo $\mathbb{K}$, se definen dos operaciones básicas: **adición** y **multiplicación por un escalar** y se estudian algunas propiedades de las matrices con estas operaciones. Entonces, es natural preguntarse si puede hacerse algo similar con otros conjuntos. La respuesta a esta inquietud es afirmativa, y se introduce este capítulo con el objetivo de definir formalmente el concepto de espacio vectorial y presentar algunas consecuencias. Posteriormente, se podrá reconocer que el conjunto de las matrices con las operaciones suma y multiplicación por un escalar, es sólo un ejemplo de un espacio vectorial.

Definición 1.

Un **espacio vectorial** es una cuádrupla $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, donde V es un conjunto no vacío, $\mathbb{K}$ un campo (en este texto $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $+, \cdot$ son operaciones

1. $+ : V \times V \to V,\ (v_1, v_2) \to v_1 + v_2$
2. $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V,\ (k, v) \to kv$

llamadas **adición** y **multiplicación** respectivamente, dotadas de las siguientes propiedades:

1. La adición es conmutativa: $u + v = v + u$, para todo par $u, v \in V$.
2. La adición es asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$, para $u, v, w \in V$
3. Existe un elemento $0_V \in V$, llamado *cero* o *vector nulo*, con la propiedad $u + 0_V = u$ para cada $u \in V$.
4. Para cada $v \in V$, existe un elemento $(-v) \in V$, llamado "el inverso aditivo de v" con la propiedad
$$v + (-v) = 0_V.$$
5. Se satisfacen propiedades distributivas como:
   a) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$, para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $u, v \in V$.
   b) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$, para $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $v \in V$.
6. El producto por un escalar es asociativo, es decir, $(\lambda\, \mu) \cdot v = \lambda \mathbb{K} \cdot (\mu \cdot v)$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y todo $v \in V$.
7. $1 \cdot v = v$, para cada $v \in V$.

Sobre la definición anterior se pueden hacer varias observaciones:

● Los elementos de V son llamados **vectores** y los elementos de $\mathbb{K}$ son llamados **escalares**.

● Por abuso de lenguaje los espacios vectoriales se indican con el conjunto V en lugar de $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, sobre entendiendo el campo y las operaciones. En este texto se utilizará esa notación sólo si es claro el campo y las operaciones definidas para dicho espacio. También es usual escribir "Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial" en lugar de $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, si no hay posibilidad de confusión con las operaciones.

● Como puede notarse, la definición de espacio vectorial tiene cuatro elementos fundamentales: el conjunto no vacío V, un campo $\mathbb{K}$ y las operaciones adición y multiplicación. La primera de estas operaciones se dice que es interna, dado que opera entre elementos del conjunto V, mientras que a la multiplicación se le llama operación externa ya que opera elementos externos de V (en $\mathbb{K}$) con elementos de V.

● Algunos autores optan por denotar estas operaciones como $\oplus$ y $\odot$, para que el lector no confunda entre operaciones ya conocidas. Sin embargo, en este texto se utilizan las notaciones clásicas $+$ y $\cdot$, a menos que se pudiera presentar algún tipo de confusión y de ser el caso se indicará.

● A cada par de vectores $u, v \in V$ le corresponde un nuevo vector $u + v \in V$ el cual es llamado “la suma de u y v”.

● Para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $v \in V$ se tiene que $\lambda \cdot v$, llamado producto de λ por v, es un elemento de V. En general, es usual escribirse λv en lugar de $\lambda \cdot v$ si está clara cuál es la operación de multiplicación utiliada.

● Se puede extender la operación adición a un número finito de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en el espacio vectorial V. Es allí donde juega un papel primordial la propiedad asociativa. En este caso $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ es denotado por $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i$.

● Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un escalar entonces se tendrá que $\lambda \left(\sum\limits_{i=1}^{n} v_i \right) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda v_i)$.

● De forma similar si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ es una lista finita de escalares y $v \in V$, entonces $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \right) v = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v \right)$.

● A los espacios vectoriales donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se le llaman espacios vectoriales reales o $\mathbb{R}-$espacios vectoriales y a los espacios vectoriales definidos sobre el campo de los complejos se les llamará espacios vectoriales complejos o $\mathbb{C}-$espacios vectoriales.

✻ **Lema 1.** *En todo espacio vectorial, existe sólo un elemento neutro para la adición.*

Demostración. Supóngase que existen dos elementos neutros para la adición en un espacio vectorial $\mathbb{K}-$ espacio vectorial V, dígase 0_1 y 0_2. Entonces

$$0_1 \underset{\substack{\downarrow \\ Axioma(3)}}{=} 0_1 + 0_2 \underset{\substack{\downarrow \\ Axioma(1)}}{=} 0_2 + 0_1 \underset{\substack{\downarrow \\ Axioma(3)}}{=} 0_2.$$

✻ **Lema 2.** *Cada elemento de un espacio vectorial posee sólo un elemento inverso aditivo.*

Demostración. Sea V un $\mathbb{K}-$ espacio vectorial. Suponga que existe un vector $v \in V$

para el cual existen dos inversos aditivos, $(-v)_1$ y $(-v)_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
(-v)_1 &\underset{Axioma(3)}{\underset{\downarrow}{=}} (-v)_1 + 0_V \\
&\underset{Axioma(4)}{\underset{\downarrow}{=}} (-v)_1 + (v + (-v)_2) \\
&\underset{Axioma(2)}{\underset{\downarrow}{=}} ((-v)_1 + v) + (-v)_2 \\
&\underset{Axioma(1)}{\underset{\downarrow}{=}} (v + (-v)_1) + (-v)_2 \\
&\underset{Axioma(4)}{\underset{\downarrow}{=}} 0_V + (-v)_2 \\
&\underset{Axioma(1)}{\underset{\downarrow}{=}} (-v)_2 + 0_V \\
&\underset{Axioma(3)}{\underset{\downarrow}{=}} (-v)_2.
\end{aligned}$$

□

En el siguiente teorema se establecen algunos hechos básicos.

❋ ❋ **Teorema 1.** *Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial. Entonces*

1. $0 \cdot v = 0_V$ *para cada* $v \in V$
2. $(-1)v = -v$ *para cada* $v \in V$
3. $\lambda \cdot 0_V = 0_V$ *para cada* $\lambda \in \mathbb{K}$
4. $-(-v) = v$ *para cada* $v \in V$
5. $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$ *para cada* $\lambda \in \mathbb{K}$ *y* $v \in V$
6. $(-\lambda)(-v) = \lambda v$ *para cada* $\lambda \in \mathbb{K}$ *y* $v \in V$
7. $u + w = v + w$ *implica que* $u = v$, *para todo* $u, v, w \in V$
8. *Si* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ *y* $\lambda u = \lambda v$ *entonces* $u = v$, *para todo* $u, v \in V$
9. *Si* $\lambda \cdot v = 0_V$ *implica que* $\lambda = 0$ *ó* $v = 0_V$.

Demostración. A continuación se presenta la demostración básica para cada uno de los item y se espera que el lector complete los detalles y la justificación de cada paso.

1. $v + 0 \cdot v = 1 \cdot v + 0 \cdot v = (1 + 0) \cdot v = 1 \cdot v = v$. Luego, el lema 1 garantiza que $0 \cdot v = 0_V$.

2. $v + (-1)v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = 0_V$.

   Entonces, en virtud del lema 2 se obtiene que $(-1)v = -v$.

3. $\lambda \cdot 0_V = \lambda(0 \cdot v) = (\lambda \cdot 0) \cdot v = 0 \cdot v = 0_V$

4. $v + (-v) = (-v) + v = 0_V$. Nuevemente haciendo uso del lema 2 se obtiene que $-(-v) = v$.

5. $(-\lambda)v = ((-1)\lambda)\, v = (-1)(\lambda v) = -\lambda v = (\lambda(-1))v = \lambda((-1)v) = \lambda(-v)$.

6. $(-\lambda)(-v) = (-\lambda)((-1)v) = (-\lambda)(-1)v = \lambda v$.

7. En este caso se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} u + w & = & v + w \\ (u + w) + (-w) & = & (v + w) + (-w) \\ u + (w + (-w)) & = & v + (w + (-w)) \\ u + 0_V & = & v + 0_V \\ u & = & v. \end{array}$$

8. En este caso se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \lambda u & = & \lambda v \\ \lambda^{-1}(\lambda u) & = & \lambda^{-1}(\lambda v) \\ (\lambda^{-1}\lambda)u & = & (\lambda^{-1}\lambda)v \\ 1 \cdot u & = & 1 \cdot v \\ u & = & v. \end{array}$$

9. Supóngase que $\lambda v = 0_V$ y $\lambda \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda v &= 0_V \\ \lambda^{-1}(\lambda v) &= \lambda^{-1} 0_V \\ (\lambda^{-1}\lambda)v &= 0_V \\ 1 \cdot v &= 0_V \\ v &= 0_V. \end{aligned}$$

□

1.1. Ejemplos

Ejemplo 1.

Considérese el conjunto $\{v\}$ formado por un solo elemento v. En este conjunto defínanse las operaciones de adición y producto por escalares en un campo $\mathbb{K}$, de la siguiente manera:

$$v + v = v$$

$$\lambda v = v, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

$(\{v\}, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Se deja la verificación como ejercicio al lector.

Ejemplo 2.

Sea $\mathbb{R}^n$ el conjunto de vectores n-cordenadas de números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}, \;\; i = 1, \ldots, n\}.$$

En $\mathbb{R}^n$ se definen las operaciones:

● Adición:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

● Multiplicación

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Para verificar que $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial, considere $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ tres vectores arbitrarios de $\mathbb{R}^n$ y λ, μ dos escalares reales. Entonces

1.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n) \quad \text{por la propiedad de conmutatividad} \\ &= \mathbf{y} + \mathbf{x} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{de la adición en } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esto es, la adición es conmutativa.

2.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1+z_1,y_2+z_2,\ldots,y_n+z_n)\\ &= (x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2),\ldots,x_n+(y_n+z_n)) \qquad \text{(en virtud de}\\ &= ((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,\ldots,(x_n+y_n)+z_n) \quad \text{la propiedad asociativa}\\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)+(z_1,z_2,\ldots,z_n) \qquad \text{de la adición de} \mathbb{R})\\ &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}.\end{aligned}$$

Esto es, la adición es asociativa.

3. Note que para $\mathbf{0}=(0,0,\ldots,0)$ se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{0} &= (x_1+0,x_2+0,\ldots,x_n+0) \quad \text{(por la propiedad neutra para la adición)}\\ &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)=\mathbf{x} \qquad \text{(del cero en } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Esto significa que $\mathbf{0}$ es el elemento neutro para la adición en $\mathbb{R}^n$, es decir, $0_{\mathbb{R}^n}=\mathbf{0}$.

4. Para $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ se define $-\mathbf{x}=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$ el cual es también un elemento de $\mathbb{R}^n$ y para el cual se tiene que

$$\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=(x_1-x_1,x_2-x_2,\ldots,x_n-x_n)=(0,0,\ldots,0)=\mathbf{0}=0_{\mathbb{R}^n}.$$

Por lo tanto se cumple el axioma 4).

5. Ahora,

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \lambda(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\\ &= (\lambda(x_1+y_1),\lambda(x_2+y_2),\ldots,\lambda(x_n+y_n)) \quad \text{(propiedad distributiva}\\ &= (\lambda x_1+\lambda y_1,\lambda x_2+\lambda y_2,\ldots,\lambda x_n+\lambda y_n) \qquad \text{de } \mathbb{R})\\ &= (\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)+(\lambda y_1,\lambda y_2,\ldots,\lambda y_n)\\ &= \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}.\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\,\mathbf{x} &= ((\lambda+\mu)x_1,(\lambda+\mu)x_2,\ldots,(\lambda+\mu)x_n)\\ &= (\lambda x_1+\mu x_1,\lambda x_2+\mu x_2,\ldots,\lambda x_n+\mu x_n) \quad \text{(propiedad distributiva de}\\ &= (\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)+(\mu x_1,\mu x_2,\ldots,\mu x_n) \qquad \mathbb{R})\\ &= \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}.\end{aligned}$$

7. Además,

$$\begin{aligned}(\lambda\,\mu)x &= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, \ldots, (\lambda\mu)x_n)\\ &= (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \ldots, \lambda(\mu x_n)) \quad \text{(propiedad asociativa del producto } \mathbb{R})\\ &= \lambda(\mu x_1, \mu x_2, \ldots, \mu x_n)\\ &= \lambda(\mu x)\end{aligned}$$

8. Finalmente,

$$\begin{aligned}1\cdot\mathbf{x} &= (1\cdot x_1, 1\cdot x_2, \ldots, 1\cdot x_n) \quad \text{(propiedad neutra para el producto del uno en}\mathbb{R}).\\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}\end{aligned}$$

Esto demuestra entonces que $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

● Nota: Al conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,|\, x_i \in \mathbb{R},\;\; i = 1, \ldots, n\}$$

es usual escribirlo de la forma

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix} / \; x_i \in \mathbb{R},\;\; i = 1, \ldots, n \right\}.$$

A continuación se presentan varios ejemplos de espacios vectoriales importantes que se utilizaran en el resto del texto para presentar ejemplos, se deja al lector la demostración de cada uno de los casos.

Ejemplo 3.

El conjunto de las $n-$uplas ordenadas de números complejos $\mathbb{C}^n$ con las operaciones

● Adición:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

● Multiplicación

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

$(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 4.

El conjunto de las $n-$uplas ordenadas de números complejos $\mathbb{C}^n$ con las operaciones

- Adición:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n).$$

- Multiplicación

$$\lambda\mathbf{x}=\lambda(x_1,x_2,...,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n).$$

$(\mathbb{C}^n,\mathbb{R},+,\cdot)$ es un espacio vectorial.

Note que los espacios vectoriales de los ejemplos 3 y 4, aunque tienen el mismo conjunto no vacío de vectores son espacios diferentes dado que difieren en el campo.

Ejemplo 5.

Sea P_n el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que n. Es decir

$$P_n=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \mid a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}\}.$$

En este conjunto, para $p_1(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, $p_2(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ se definen las operaciones

$$\begin{aligned}(p_1+p_2)(x) &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n\\ (\lambda p_1)(x) &= \lambda a_0+\lambda a_1x+\cdots+\lambda a_nx^n.\end{aligned}$$

Se puede verificar fácilmente que $(P_n,\mathbb{R},+,\cdot)$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 6.

Sea $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ el conjunto de todas las matrices de orden $m\times n$ con entradas en $\mathbb{K}$. Es decir,

$$M_{m\times n}(\mathbb{K}) = \left\{ A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}} \mid a_{ij}\in\mathbb{K},\ \ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n \right\}.$$

Para $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ y $\lambda\in\mathbb{K}$ se han definido las operaciones

$$\begin{aligned} A+B &= (a_{ij})+(b_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij}) \\ \lambda\cdot A &= \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}). \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que $(M_{m\times n}(\mathbb{K}),+,\cdot,\mathbb{K})$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 7.

Sea Ω un conjunto no vacío. Se considera el conjunto

$$\mathbb{K}^{\Omega} = \{f:\Omega\to\mathbb{K}/ f \text{ es una función}\}$$

y se definen las operaciones

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \qquad \text{para todo } \ x\in\Omega,\ \text{ y} \\ (\lambda f)(x) &= \lambda(f(x)) \qquad \text{para todo } \ x\in\Omega. \end{aligned}$$

Entonces $(\mathbb{K}^{\Omega},+,\cdot,\mathbb{K})$ es un espacio vectorial.

Se pueden definir en algunos conjuntos de espacios conocidos algunas operaciones no convencionales para definir un espacio vectorial, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.

Sea $V=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : b>0\}$. Se definen las operaciones

$$\begin{aligned} (a,b)\oplus(c,d) &= (ad+bc, bd) \\ \lambda\odot(a,b) &= (\lambda ab^{\lambda-1}, b^{\lambda}) \end{aligned}$$

Entonces $(V,\oplus,\odot,\mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

Se deja al lector para verificar.

1.2. Subespacios

Si V es un $\mathbb{K}-$espacio vectorial, del ejemplo 1 se obtiene que $\{0_V\}$ también es un $\mathbb{K}-$ espacio ectorial. Entonces, es natural preguntarse si dado cualquier subconjunto de V (donde V, es un $\mathbb{K}-$espacio vectorial), es también un $\mathbb{K}-$espacio vectorial. La respuesta es negativa, como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.

En el ejemplo 2, se ha demostrado que $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial. Sea

$$W = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y \geq 0\}.$$

En este caso, note que $(1, 2)$ y $(-3, -1)$ son vectores en W, sin embargo,

$$(1, 2) + (-3, -1) = (1 + (-3), 2 + (-1)) = (-2, 1) \notin W.$$

Por lo tanto, $(W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ no puede ser un espacio vectorial.

Entonces, dado un espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ y $W \subseteq V$, ¿bajó qué condiciones $(W, +, \cdot, \mathbb{K})$ sea un espacio vectorial?.

Se comienza dando nombre a este nuevo espacio, en caso de ser un espacio vectorial.

Definición 2.

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y W un subconjunto de V. Se dice que W es un subespacio de V si $(W, +, \cdot, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial.

Todo espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ tiene al menos dos subespacios, a saber, el subespacio V y $\{0_V\}$. A éstos se les llamará **subespacios triviales** de $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.

En principio, para poder saber si un subconjunto $W \subseteq V$ es subespacio de V, habrá que verificar (la cerradura de las operaciones en W y) los axiomas que definen a un espacio vectorial en el subconjunto W.

Sin embargo, el teorema siguiente dice que tal verificación requiere de mucho menos trabajo.

❋ ❋ Teorema 2. *Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sea W un subconjunto no vacío de V. Entonces W es un subespacio de V si, y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

a) $u, v \in W$ *entonces* $u + v \in W$,

b) $v \in W,\ \lambda \in \mathbb{K}$ *entonces* $\lambda v \in W$.

Demostración. Si W es un subespacio de V es claro que debe ser cerrado bajo la adición y multiplicación por un escalar. Recíprocamente, supongamos que W es cerrado bajo la adíción y multipliacación por un escalar, entonces para cualquier $w \in W$[1] se tiene que $0_V = 0 \cdot w \in W$ y $-w = (-1)w \in W$. Las demás condiciones se cumplen por ser W un subconjunto de V.

□

Es usual redactar el teorema anterior como sigue:

❋ ❋ Teorema 3. *Sea* $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y sea* W *un subconjunto de* V. *Entonces* W *es un subespacio de* V *si, y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:*

a) $0_V \in W$,

b) $u, v \in W$ *entonces* $u + v \in W$,

c) $v \in W,\ \lambda \in \mathbb{K}$ *entonces* $\lambda v \in W$.

Note que la diferencia entre los teoremas 2 y 3 es que en el primero se pide que W sea no vacío, mientras que en el segundo se pide explícitamente que $0_V \in W$, lo cual garantiza lo no vacío de W.

Con la ayuda del Teorema 3 será una tarea más simple verificar si un subconjunto $W \subseteq V$ es un subespacio vectorial de V.

Ejemplo 10.

Sea L subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\},$$

donde a y b son dos escalares fijos, no ambos cero.
Se afirma que W es un subespacio de $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ con las operaciones usuales en $\mathbb{R}^2$.

En primer lugar, dado que $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$ se tiene que $(0, 0) \in L$, el cual es el vector nulo de $\mathbb{R}^2$.

[1] Es posible elegir $w \in W$ ya que por hipótesis, W no es vacío.

Además, si $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ dos vectores de L, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ y

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = \underbrace{(ax_1 + by_1)}_{\substack{=0 \\ \text{ya que } (x_1, y_1) \in L}} + \underbrace{(ax_2 + by_2)}_{\substack{=0 \\ \text{dado que } (x_2, y_2) \in L}} = 0,$$

lo que significa que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in L$.

Por otra parte si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \mathbf{u} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ y

$$a(\lambda x_1) + b(\lambda y_1) = \lambda(ax_1 + by_1) = \lambda 0 = 0,$$

lo cual se verifica que $\lambda u \in L$.

Geométricamente el subespacio L es una recta en el plano xy que pasa por el origen.

Ejemplo 11.

El lector puede verificar que el subconjunto U de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$U = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0\},$$

donde a, b y c son tres escalares fijos en $\mathbb{R}$, no todos iguales a cero, es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$, definido en el ejemplo 2.

Ejemplo 12.

Considere el sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas $AX = \mathbf{0}$.

Considere, entonces, el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^n$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle/ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ es solución de } A\mathbf{x} = 0_{\mathbb{R}^m} \right\}.$$

S es un subespacio de $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, definido en el ejemplo 2.

● En efecto, es claro que una solución del sistema es la trivial, en consecuencia el vector nulo de $\mathbb{K}^n$ está en S.

Por otra parte, suponga que $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son soluciones del sistema $A\mathbf{x} = 0_{\mathbb{R}^m}$, entonces

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = 0_{\mathbb{R}^m} + 0_{\mathbb{R}^m} = 0_{\mathbb{R}^m}.$$

Esto significa que $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ es también solución del sistema.

Asimismo, si λ es un escalar, se tiene

$$A(\lambda \mathbf{x}_1) = \lambda A\mathbf{x}_1 = \lambda\, 0_{\mathbb{R}^m} = 0_{\mathbb{R}^m},$$

lo cual verifica que $\lambda \mathbf{x}_1$ es solución del sistema. Entonces, en virtud del teorema 3, S es un subespacio de $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, el cual es llamado *espacio de soluciones* (o espacio solución) del sistema $A\mathbf{x} = 0_{\mathbb{R}^m}$.

Ejemplo 13.

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sea $v \in V$. Entonces, $S = \{\lambda v : v \in \mathbb{K}\}$ es un subespacio de V.
A este subespacio se le denomina subespacio generado por v y usualmente es denotado por $genv$ o $gen\{v\}$.

Se deja la verificación al lector.

Ejemplo 14.

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Se define

$$S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n : \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}\}.$$

Se deja al lector verificar que S es un subespacio de V. El cual es llamado subespacio generado por $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ y denotado por $gen\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

1.3. Operaciones con subespacios

Dado $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y subonjuntos W_1 y W_2 de V, se pueden considerar los siguientes subconjuntos de V:

1. la *intersección* de W_1 y W_2

$$W_1 \cap W_2 = \{v \in V \mid v \in W_1 \;\text{ y }\; v \in W_2\},$$

2. la *unión* de W_1 y W_2

$$W_1 \cup W_2 = \{v \in V \mid v \in W_1 \;\text{ o }\; v \in W_2\},$$

3. la adición de W_1 y W_2, denotada por $W_1 + W_2$ y definida por

$$W_1 + W_2 = \{v \in V \mid v = w_1 + w_2, \quad w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

En el caso en que W_1 y W_2 sean subespacios de V, es natural preguntarse si $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cup W_2$ y $W_1 + W_2$ son también subespacios de V.

Esta sección se dedica a dar respuesta a esta cuestión.

✻ ✻ **Teorema 4.** *Dado $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y W_1 y W_2 subespacios de V. Entonces, $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V.*

Demostración. Dado que W_1 y W_2 son subespacios de V, entonces 0_V está en ambos, en consecuencia está en $W_1 \cap W_2$.

En segundo lugar, Si $u, v \in W_1 \cap W_2$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces $u, v \in W_1$ y $u, v \in W_2$. Por ser W_1 y W_2 subespacios de V, se tiene $u + v \in W_1$, $u + v \in W_2$, $\lambda u \in W_1$ y $\lambda u \in W_2$ es decir, $u + v \in W_1 \cap W_2$ y $\lambda u \in W_1 \cap W_2$, lo que demustra que $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V, según el Teorema 3.

$\square$

✻ **Observación 1.** *Note que $W_1 \cap W_2$ puede ser considerado también como subespacio de W_1 (o W_2).*

La demostración de este hecho es similar a la dada anteriormente y se deja como ejercicio para el lector.

Ejemplo 15.

En $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ el espacio vectorial definido en el ejemplo 6. Se consideran los subconjuntos

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \text{ y } W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

W_1 y W_2 son subespacios de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Dado que toda matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in W_1$ y $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$, entonces $W_1 + W_2 = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

- Note que $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
- Por otra parte, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in W_1$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$, sin embargo,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2$$

De modo que la unión de dos subespacios de un espacio vectorial V no es en general un subespacio de V.

1.4. Subespacios generados por un conjunto de vectores

Como se ha visto en el ejemplo 14, se puede obtener un subespacio generado por un subconjunto de vectores. Parte del álgebra lineal es la noción de estos subespacios generados por un conjunto de vectores.

En esta sección se presentan las definiciones involucradas en este nuevo subespacio.

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sea S un subconjunto (no vacío) de V. Es entonces natural preguntar si S es un subespacio. En caso de no ser, ¿ existe un subespacio de V que contiene a S? La respuesta a esta última pregunta es afirmativa, dado que se tiene que V es un subespacio de $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$. Entonces surge otra pregunta, ¿ existe un menor subespacio de V que contenga a S?.

Definición 3.

Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores de V. Se dice que el vector $v \in V$ es una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n.$$

Ejemplo 16.

El vector $(14, 12, 2)$ en $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores $(1, 2, -1)$ y $(3, 2, 1)$ puesto que

$$(14, 12, 2) = 2(1, 2, -1) + 4(3, 2, 1).$$

Ejemplo 17.

Toda matriz antisimétrica de orden dos, con entradas reales, es combinación lineal de la matriz
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta afirmación se cumple dado que toda matriz antisimétrica de orden dos es de la forma
$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$
para un cierto número real a. Entonces se tiene,
$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = -\frac{a}{4}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 4.

Sea S un subconjunto no vacío de un espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, se denota por $genS$ o por $gen(S)$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S, es decir,
$$genS = \{c_1v_1 + \cdots + c_kv_k \mid c_i \in \mathbb{K},\ v_i \in S,\ i = 1, \ldots, k,\ \ k \in \mathbb{N}\}.$$
Se define
$$gen\emptyset = \{0_V\}.$$

Es claro que si S es un subconjunto no vacío de elementos del espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ entonces $S \subseteq genS$, dado que, para cada $i = 1, 2, ..., n$ se tiene que
$$v_i = c_1v_1 + \cdots + c_iv_i + \cdots + c_kv_k,$$
donde $c_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$

También es claro que $0_V \in genS$.

Ejemplo 18.

Sea $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Considerando $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ definido en el ejemplo 2, determine $genA$.

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in genA$ si y sólo si, existen constantes α y β tales que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Es decir, $genA = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}; b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Se puede demostrar que $genS$ es un subespacio de V y que además, es el subespacio que resuelve el problema planteado inicialmente.

❋ ❋ **Teorema 5.** *Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial, y sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n vectores de V. Entonces el conjunto*

$$gen\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \{c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \mid c_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n\}$$

formado por todas las combinaciones lineales de $v_1, \ldots, v_n$ es un subespacio de V y además, es el menor de todos los subespacios de V que contienen a los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Demostración. ● Para $c_1 = \cdots = c_n = 0$ se tiene que $0_V = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \in gen\{v_1, \ldots, v_n\}$.

● Por otra parte, sean $x, y \in gen\{v_1, \ldots, v_n\}$. Entonces existen $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$x = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$$
$$y = d_1v_1 + \cdots + d_nv_n$$

Luego,

$$x + y = (c_1 + d_1)v_1 + \cdots + (c_n + d_n)v_n$$

lo que demuestra que $x + y \in gen\{v_1, \ldots, v_n\}$.

● En forma similar, si $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene

$$\lambda x = \lambda(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = (\lambda c_1)v_1 + \cdots + (\lambda c_n)v_n,$$

lo que demuestra que $\lambda x \in gen\{v_1, \ldots, v_n\}$. Entonces, $gen\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un subespacio de V.

Para finalizar la demostración, suponga que W un subespacio de V que contiene a $v_1, \ldots, v_n$.

Si $x \in gen\{v_1, \ldots, v_n\}$ entonces $x = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$.

Ahora bien, dado que W un subespacio de V y $v_1, \ldots, v_n \in W$ se tiene que $c_1v_1, c_2v_2, \ldots, cv_n \in W$ y en consecuencia $x = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \in W$.

Esto es, $gen\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq W$, completando la demostración. □

Ejemplo 19.

Determine $gen\{2 - x + 2x^2; 2 - 2x + 6x^2; x - 4x^2\}$ en el espacio vectorial real $(P_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

Nótese que $ax^2 + bx + c \in gen\{2 - x + 2x^2; 2 - 2x + 6x^2; x - 4x^2\}$ si, y sólo si, existen escalares $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= c_1(2 - x + 2x^2) + c_2(2 - 2x + 6x^2) + c_3(x - 4x^2) \\ &= (2c_1 + 6c_2 - 4c_3)x^2 + (-c_1 - 2c_2 + c_3)x + (2c_1 + 2c_2). \end{aligned}$$

Entonces, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2c_1 + 6c_2 - 4c_3 = a \\ -c_1 - 2c_2 + c_3 = b \\ 2c_1 + 2c_2 = c. \end{cases}$$

La matriz de representación del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -4 & a \\ -1 & -2 & 1 & b \\ 2 & 2 & 0 & c \end{array}\right)$$

y se puede demostrar que la matriz es equivalente a la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & b \\ 0 & 2 & -2 & a + 2b \\ 0 & 0 & 0 & a + 4b + c \end{array}\right).$$

Observe que el sistema tiene solución si $a + 4b + c = 0$, en consecuencia

$$gen\{2 - x + 2x^2; 2 - 2x + 6x^2; x - 4x^2\} = \{ax^2 + bx + c \in P_2 : \ a + 4b + c = 0\}.$$