Álgebra lineal

Matrices

Mireya Rafaela Bracamonte
Luz Elimar Marchan

0

Índice general

Estas notas se han creado como material de apoyo para los estudiantes de álgebra lineal de la FCNM- ESPOL. Cualquier observación que considere que pudiera contribuir a mejorarla puede enviarla al correo mrbracam@espol.edu.ec.
”Nuestras vidas se definen por las oportunidades incluso las que perdemos”.
Puedes encontrar otros temas en:
`http://blog.espol.edu.ec/mrbracamonte`

Visto como capítulo complementarío, no se presentarán todas las demostraciones de las proposiciones contenidas en cada sección sobre todo, aquellas que pudieran ser muy extensas y que se pueden prescindir sin alterar el objetivo del texto. Sin embargo, no se puede prescindir de todas, ya que sí es importante que el lector desarrolle la habilidad de familiarizarse con demostraciones de algunos enunciados matemáticos.

A lo largo de este texto se trabaja con un campo de números denotado por $\mathbb{K}$, que puede ser $\mathbb{R}$ (Conjunto de los números reales) ó $\mathbb{C}$ (el conjunto de los números complejos) y cualquier afirmación relativa a $\mathbb{K}$ significa que es válida en los dos casos. Se dice que un elemento de $\mathbb{K}$ es un escalar.

Se requiere, para iniciar un curso básico de álgebra lineal, que el lector tenga ciertos conocimientos básicos como: operaciones con números reales y número complejos, métodos de resolver sistemas de ecuaciones (sustitución, igualación y/o reducción); así como también debe poseer habilidades y destrezas básicas para realizar un estudio sistemático e idealmente autónomo.

0.1. Matrices

Definición 1.

Sean m y n números enteros tales que $m, n \geq 1$. Una matriz de orden (o tamaño) $m \times n$ es un arreglo rectangular, de números en $\mathbb{K}$, distribuidos en m filas (o renglones) y n columnas.
Su representación usual es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La definición muestra que se requieren (máximo) dos subíndices, o índices, para identificar un elemento dado: un subíndice de fila y un subíndice de columna.

⇝ Es usual denotar las m filas de A por $A_{1*}, A_{2*}, ..., A_{m*}$ y las n columnas por $A_{*1}, A_{*2}, ..., A_{*n}$.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \text{Fila } A_{3*} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Columna } A_{*3} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

⇝ En algunos casos se usara $[A]_{ij}$, en lugar de a_{ij}, para denotar la entrada ij de la matriz A, lo cual facilita la escritura.

⇝ Las matrices son denotadas usualmente con letras mayúsculas y los elementos del campo $\mathbb{K}$ con minúsculas.

⇝ El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$, cuyas entradas pertenecen a $\mathbb{K}$, será denotado como $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Ejemplo 1.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5-i \\ 4 & -i & 0 \end{pmatrix}$, es una matriz de orden 2×3 donde

☞ sus filas son $A_{1*} = (2, 3, 5-i)$ y $A_{2*} = (4, -i, 0)$ y

☞ sus columnas son $A_{*1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A_{*2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -i \end{pmatrix}$ y $A_{*3} = \begin{pmatrix} 5-i \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.

1. $B = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}$, es una matriz de orden 4×1 con sólo una columna.

2. $C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & \dfrac{2i}{3} \end{pmatrix}$ es una matriz de orden 1×4 con sólo una fila.

A tener en cuenta:

❶ Algunos autores escriben

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

en lugar de

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

En este texto usaremos la segunda expresión.

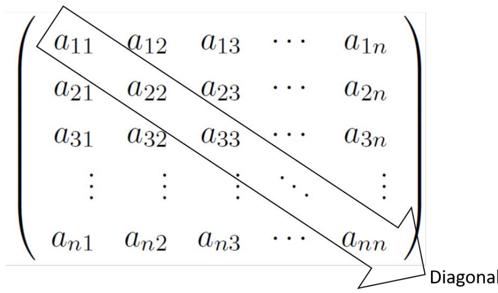
❷ Una matriz cuyo número de filas y de columnas sean iguales se denomina **matriz cuadrada**. Si una matríz es de orden $n \times n$ se dice simplemente de orden n.

Ejemplo 3.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ \pi & -1 & 0 \\ 5 & 1 & i-2 \end{pmatrix}$, es una matriz cuadrada de orden 3.

❸ El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden $n \times n$, cuyas entradas pertenecen a $\mathbb{K}$, será denotado como $M_n(\mathbb{K})$.

❹ La **diagonal principal** de una matriz cuadrada A está constiuida por los elementos de la forma $[A]_{ii}$.



❺ Una matriz que posee una sola fila se denomina **matriz fila** o **matriz unifila**. Es decir, una matriz de la forma: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$.

☞ Esta matriz tiene orden $1 \times n$.

Como ejemplos de matrices filas, se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4\pi & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & \frac{i}{3} & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \sqrt[3]{91} & 5 \end{pmatrix}.$$

❻ Una matriz que posee una sola columna se denomina **matriz columna** o **matriz unicolumna**. Es decir, una matriz de la forma: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

☞ Esta matriz tiene orden $m \times 1$.

Como ejemplo de matrices columnas, están:

$$A = \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ i-5 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2i \\ -5 \\ \sqrt{3} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Definición 2.

Una matriz de orden $m \times n$ se denomina **matriz nula** si todas sus entradas son iguales al elemento nulo para la adición del campo $\mathbb{K}$. Dicha matriz será denotada como $\mathbf{0}_{m\times n}$.

❶ $\mathbf{0}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, es la matriz nula de orden 3.

❷ $\mathbf{0}_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, es la matriz nula de orden 1×3.

❸ $\mathbf{0}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, es la matriz nula de orden 2×3.

Definición 3.

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada. Se dice que:

❶ A es una **matriz triangular superior** si todos los elementos que están bajo la diagonal principal son nulos. Esto es, $[A]_{ij} = 0$ para $i > j$.

❷ A es una **matriz triangular inferior** si todos los elementos que están sobre la diagonal principal son nulos. Esto es, $[A]_{ij} = 0$ para $i < j$.

❸ A es una **matriz diagonal** si todos los elementos que están por encima y por debajo de la diagonal principal son nulos. Esto es, $[A]_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Usualmente, esta matriz se denota por $A = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.

❹ A es una **matriz escalar** si es diagonal y los elementos que conforman la diagonal principal son todos iguales.

❺ A es la **matriz identidad** de $M_n(\mathbb{K})$, denotada por I_n, si es escalar con 1 en cada una de las entradas de la diagonal.

Por ejemplo,

❶ $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1-i \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, es una matriz triangular superior.

❷ $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3+i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, es una matriz diagonal.

❸ $C = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$, es una matriz triangular inferior.

❹ $F = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$, es una matriz escalar.

❺ $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. es la matriz identidad de $M_n(\mathbb{K})$.

Definición 4.

Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se dice que A y B son iguales, si sus elementos correspondientes son iguales, esto es, $A = B$ si y sólo si $[A]_{ij} = [B]_{ij}$ para cada $i = 1, 2, ..., m$ y para cada $j = 1, 2, ..., n$.

Note que no tiene sentido hablar de matrices iguales entre matrices de diferentes tamaños.

Ejemplo 4.

Hallar los valores de a y b para que las matrices $A = \begin{pmatrix} 2a+b & 3 \\ -1 & \frac{b}{2} - a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & i-3 \end{pmatrix}$ sean iguales.

❧**Solución.** De acuerdo a la definición 4, $A = B$ si y sólo si $2a + b = 6$ y $\frac{b}{2} - a = i - 3$. Luego, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2a + b &= 6 \\ \frac{b}{2} - a &= i - 3. \end{cases}$$

☞ Multiplicando por 2 la segunda ecuación del sistema y sumando con la primera, se obtiene que $b = i$.

$$\begin{array}{r} 2a + b = 6 \\ -2a + b = 2i - 6 \\ \hline 2b = 2i \\ \boxed{b = i} \end{array}$$

☞ Multiplicando por -1 a la primera ecuación y por 2 la segunda ecuación del sistema y sumando las ecuaciones resultantes, se obtiene que $a = 3 - \dfrac{i}{2}$.

$$\begin{array}{r} -2a - b = -6 \\ -2a + b = 2i - 6 \\ \hline -4a = -12 + 2i \\ \boxed{a = 3 - \frac{1}{2}i} \end{array}$$

Entonces, los valores buscados son $a = 3 - \dfrac{i}{2}$ y $b = i$.

Ejemplo 5.

Hallar todos los valores de x e y tal que $\begin{pmatrix} x^2 & y-x \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x-y \\ x+1 & 1 \end{pmatrix}$.

❧**Solución.** De acuerdo a la definición 4, $A = B$ si y sólo si

$$x^2 = 1 \qquad y - x = x - y$$
$$0 = x + 1 \qquad y^2 = 1.$$

De $x^2 = 1$ se obtiene que $x = 1$ o $x = -1$. De forma similar se tiene que de $y^2 = 1$ que $y = 1$ o $y = -1$.

Ahora bien, también deben cumplirse las igualdades $0 = x+1$, es decir, que $x = -1$. Además,

$$\begin{aligned} y - x &= x - y \\ 2y &= 2x \\ y &= x \end{aligned}$$

Esto es, los valores de $x = y = -1$ son los que hacen que se cumpla la igualdad pedida.

0.2. Álgebra de matrices

Se definen a continuación tres operaciones básicas con matrices: multiplicación de un escalar por una matriz, adición de matrices y multiplicación de matrices.

Definición 5 (Adición de matrices)**.**

Sean m y n enteros positivos fijos y mayores o iguales a 1. Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. La suma entre A y B, es la matriz $m \times n$ definida por

$$[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}, \qquad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

De forma más específica, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

entonces $A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$.

Ejemplo 6.

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ i & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} i & 0 & 7 \\ -i & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Determinar la suma de A y B.

❧**Solución.** De acuerdo a la Definición 5 se tiene que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+i & 0+0 & 5+7 \\ i+(-i) & 3+2 & 4+8 \\ 4+2 & 8+4 & 9+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 12 \\ 0 & 5 & 12 \\ 6 & 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

☞ Note que si $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{m\times n}$ es la matriz nula, del mismo orden, entonces es posible verificar que

$$A + \mathbf{0} \;=\; \mathbf{0} + A = A.$$

Definición 6 (Multiplicación de un escalar por una matriz)**.**

Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. La multiplicación del escalar α por A, denotado por αA, es la matriz de orden $m \times n$ que se obtiene multiplicando cada uno de las entradas de la matriz A por el escalar α. Es decir: $[\alpha A]_{ij} = \alpha [A]_{ij}$.

De manera explícita, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ entonces

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 7.

Sea $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -8 \\ 5 & 6 \\ 3 & i \end{pmatrix}$ y $\alpha = \dfrac{1}{2}$, determinar $\dfrac{1}{2}A$.

❧**Solución.** $\dfrac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{8}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{6}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -4 \\ \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$

También es de interés obtener ciertas matrices que resulten de combinar las operaciones definidas anteriormente, cuando esto sea posible.

Ejemplo 8.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} i & -8 \\ 5 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 5 & \pi \\ \frac{2}{3} & 5 \end{pmatrix}$ determinar, de ser posible, $2A - 3iB$.

❧**Solución.** De acuerdo a la definiciones 5 y 6 se tiene

$$
\begin{aligned}
2A - 3iB &= 2\begin{pmatrix} i & -8 \\ 5 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 3i\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 5 & \pi \\ \frac{2}{3} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i-6i & -16+24i \\ 10-15i & 12-3i\pi \\ 6-2i & 10-15i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4i & -16+24i \\ 10-15i & 12-3i\pi \\ 6-2i & 10-15i \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ es evidente que la matriz B definida por $[B]_{ij} = -[A]_{ij}$ también pertenece a $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, donde $-[A]_{ij}$ es el *opuesto* de $[A]_{ij}$ en $\mathbb{K}$, en consecuencia

$$
[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} = [A]_{ij} + (-[A]_{ij}) = 0,
$$

esto significa que $A + B = \mathbf{0}_{m\times n}$.

Esta matriz B recibe el nombre de **matriz opuesta** de A y es denotada por $-A$.

❋ ❋ **Teorema 1.** *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces $-A = (-1)A$.*

La demostración es consecuencia inmediata de la multiplicación de un escalar por una matriz, se deja al lector su verificación.

La forma como están definidas las dos operaciones matriciales anteriores permite establecer un conjunto de propiedades que se muestran a continuación.

❋ ❋ **Teorema 2** (Propiedades)**.** *Sean A, B y C matrices en $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

S1. La suma es conmutativa, es decir $A + B = B + A$.

S2. La suma es asociativa, esto es, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

S3. $A + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n} + A = A$.

S4. Para cada matriz A, $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}_{m\times n}$.

Para α y β escalares y A y B como antes, se tiene que

M1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

M2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

M3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$.

M4. $1 \cdot A = A$.

Demostración. Se demuestran aquí sólo algunas de las propiedades y las restantes se dejan como ejercicio para el lector.

✓ La propiedad S1 es consecuencia inmediata de la conmutatividad en el campo $\mathbb{K}$.

$$\begin{array}{rrcl} \text{Gracias a la definición 5 se tiene que} & [A+B]_{ij} & = & [A]_{ij}+[B]_{ij} \\ \text{en virtud de la conmutatividad en } \mathbb{K} & & = & [B]_{ij}+[A]_{ij} \\ \text{haciendo uso, nuevamente, la definición 5 se tiene que} & & = & [B+A]_{ij}. \end{array}$$

Por lo tanto, la Definición 2 garantiza que $A+B=B+A$.

✓ Ahora, para demostrar la propiedad S2 considérese tres matrices, A, B y C en $M_{m\times n}(\mathbb{K})$,

$$\begin{array}{rrcl} \text{Usando la definición 5} & [A+(B+C)]_{ij} & = & [A]_{ij}+[B+C]_{ij} \\ \text{nuevamente, por la definición 5} & & = & [A]_{ij}+([B]_{ij}+[C]_{ij}) \\ \text{gracias a la asociatividad en } \mathbb{K} & & = & ([A]_{ij}+[B]_{ij})+[C]_{ij} \\ \text{nuevamente, por la definición 5} & & = & [A+B]_{ij}+[C]_{ij} \\ \text{se tienen estas dos últimas igualades} & & = & [(A+B)+[C]_{ij}. \end{array}$$

Quedando demostrada la propiedad asociativa para la suma de matrices, haciendo uso de la Definición 2.

✓ Para demostrar la propiedad S3, sean las matrices $A, \mathbf{0} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Luego,

$$\begin{array}{rcl} [A+\mathbf{0}]_{ij} & = & [A]_{ij}+[\mathbf{0}]_{ij} \\ & = & [A]_{ij}+0 \\ & = & [A]_{ij}. \end{array}$$

Esto es $A+\mathbf{0}_{m\times n}=A$, segun la Definición 2.

De forma similar se verifica que $\mathbf{0}_{m\times n}+A=A$ y queda así demostrada la propiedad S3.

✓ Para demostrar la propiedad M1 considere las matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{array}{rrcl} \text{Por definición 6} & [\alpha(A+B)]_{ij} & = & \alpha[(A+B)]_{ij} \\ \text{por la definición 5} & & = & \alpha([A]_{ij}+[B]_{ij}) \\ \text{por la distributividad en el campo} & & = & \alpha[A]_{ij}+\alpha[B]_{ij} \end{array}$$

Así, nuevamente la definición 2 garantiza que $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

□

❋ **Observación 1.** ☞ *Las propiedades M1 y M2 pueden ser generalizadas para más de dos matrices y más de dos escalares respectivamente. Es decir: Si* $A_1, A_2, ..., A_k$ *son matrices de orden* $m \times n$ *y* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{K}$*, entonces:*

❶ $\alpha(A_1 + A_2 + ... + A_k) = \alpha A_1 + \alpha A_2 + ... + \alpha A_k$.

❷ $(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)A = \alpha_1 A + \alpha_2 A + ... + \alpha_k A$.

Definición 7.

Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. La **resta** de A y B, que se denotará por $A - B$, es la matriz de orden $m \times n$ que se obtiene al hacer la adición entre la matriz A con la matriz opuesta de B, esto es: $A - B = A + (-B)$.

Ejemplo 9.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} A - B &= A + (-B) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -8 & 3 \\ -1 & -5 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 10.

Si $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 6 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} i & 4 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$ entonces:

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 6 & \sqrt{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & -4 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - i & 5 \\ 1 & \sqrt{5} + 8 \end{pmatrix}.$$

❋ **Observación 2.** ☞ *De la definición 7, es claro que* $[A - B]_{ij} = [A]_{ij} - [B]_{ij}$.

Con lo que se tiene hasta ahora, se pueden resolver ciertas ecuaciones que involucran matrices, aplicando procedimientos “similares” a los aplicados en la resolución de ecuaciones usuales en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 11.

Determinar, de ser posible, la matriz X que satisface la igualdad $3A-2X=B$, donde $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

❧**Solución.** El objetivo es determinar a la incógnita matricial X.

$$\begin{array}{rrcl} & 3A-2X & = & B \\ \text{sumando a ambos lados } -3A, & (3A-2X)+(-3A) & = & B+(-3A) \\ \text{usando la propiedad S1}, & -3A+(3A-2X) & = & B+(-3A) \\ \text{usando la definición 7}, & -3A+(3A+(-2X)) & = & B+(-3A), \\ \text{usando ahora S2}, & (-3A+3A)+(-2X) & = & B+(-3A), \\ \text{aplicando S4}, & \mathbf{0}_{2\times 3}+(-2X) & = & B+(-3A), \\ \text{aplicando S3 y definición 7 se obtiene} & -2X & = & B-3A, \\ \text{multiplicando por } -\dfrac{1}{2} & X & = & -\dfrac{1}{2}(B-3A). \end{array}$$

Sustituyendo se tiene que:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 3 & 12 & 15 \end{pmatrix}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & -6 & 9 \\ 4 & -4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 3 & -\frac{9}{2} \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hasta ahora, se puede observar que es posible realizar adición sólo entre matrices de igual tamaño. Ahora,

Definición 8.

Sean A una matriz de orden $1\times k$ y B una matriz de orden $k\times 1$. Se define la **multiplicación** de A y B, denotada por $A\cdot B$ o simplemente AB, a la matriz de orden 1×1 dada por:

$$AB=\sum_{i=1}^{k}[A]_{1i}[B]_{i1}.$$

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{k1} \end{pmatrix},$$

entonces

$$AB = \; a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1k}b_{k1}.$$

Nótese que la multiplicación que se está definiendo exige que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de filas de la matriz B.

Ejemplo 12.

Sean $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, determinar MN.

❧**Solución.** De acuerdo a la Definición 8 se tiene que

$$\begin{aligned} MN &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + (-6) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{33}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 13.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$. Determinar AB.

❧**Solución.** De acuerdo a la definición 8 se tiene que:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + (-i) \cdot (-5) = 2 + 30 + 5i) = 32 + 5i. \end{aligned}$$

Definición 9.

Sean las matrices $A \in M_{m\times p}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{p\times n}(\mathbb{K})$ la multiplicación de A por B, se denota por $A.B$ o simplemente por AB, es una nueva matriz en $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida como

$$[AB]_{ij} = [A]_{i*}[B]_{*j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj}, \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Note que, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$, se tiene que

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{1*}B_{*1} & A_{1*}B_{*2} & \cdots & A_{1*}B_{*n} \\ A_{2*}B_{*1} & A_{2*}B_{*2} & \cdots & A_{2*}B_{*n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m*}B_{*1} & A_{m*}B_{*2} & \cdots & A_{m*}B_{*n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 14.

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, entonces $AI_n = A$.

❧**Solución.** Por la definición

$$[AI_n]_{ij} = [A]_{i*}[I_n]_{*j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[I_n]_{kj}.$$

Ahora bien, $[I_n]_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq j \\ 1 & \text{si} \quad k = j, \end{cases}$ en consecuencia

$$[AI_n]_{ij} \quad = \quad [A]_{i*}[I_n]_{*j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[I_n]_{kj} = [A]_{ij}[I_n]_{jj} = [A]_{ij} \cdot 1 = [A]_{ij}.$$

Así, $AI_n = A$ (Ver definición 2).

✱ **Observación 3.** *Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $m \neq n$, entonces AB y BA tienen diferentes tamaños y en consecuencia es posible afirma que la multiplicación no es conmutativa.*

Cabe preguntarse entonces, ¿Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $m = n$, entonces $AB = BA$?, o dicho de otra manera, ¿La multiplicación de matrices cuadradas, es conmutativa?. Considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.

Determinar las matrices AB y BA donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -i \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

❧**Solución.**

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -i \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-i)\cdot 0 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-i) & 2\cdot(-1) + 1\cdot(-3) + (-i)\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 0 & -1\cdot 2 + 3\cdot 1 + 3\cdot(-1) & -1\cdot(-1) + 3\cdot(-3) + 3\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + 1\cdot(-3) + 2\cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5+i & -5-2i \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -i \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot(-i) + 2\cdot 3 + (-1)\cdot 2 \\ 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) + (-3)\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot 3 + (-3)\cdot 1 & 1\cdot(-i) + 1\cdot 3 + (-3)\cdot 2 \\ 0\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 1 & 0\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 1 & 0\cdot(-i) + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
BA = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 4-i \\ -2 & 1 & -3-i \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Como puede observarse en este ejemplo, la multiplicación resulta no ser conmutativa, aún siendo matrices cuadradas.

Sin embargo, hay otras propiedades de la multiplicación que se cumplen, tal como se verá en el siguiente teorema.

❋ ❋ Teorema 3 (Propiedades de la multiplicación de matrices)**.** *Sean* $A \in \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathbb{M}_{p\times r}(\mathbb{K})$, $D \in \mathbb{M}_{r\times m}(\mathbb{K})$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,*entonces:*

(a) La multiplicación de matrices es asociativa, esto es, $(AB)D = A(BD)$.

(b) La multiplicación de matrices es distributiva por la izquierda con respecto a la suma, esto es, $A(B + C) = AB + AC$.

(c) La multiplicación de matrices es distributiva por la derecha con respecto a la suma, esto es, $(A + B)C = AC + BC$.

(d) Existen la identidad por la derecha y la identidad por la izquierda de la multiplicación de matrices $\mathrm{I}_n A = A = A\mathrm{I}_p$.

(e) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

(f) $\mathbf{0}_{m\times n}A = \mathbf{0}_{m\times p}$ *y* $A\mathbf{0}_{p\times n} = \mathbf{0}_{m\times n}$.

Demostración. Se deja de ejercicios para el lector.

□

Una vez definida la multiplicación entre matrices se puede presentar la potencia de matrices, la cual se obtiene de forma natural.

Definición 10 (Potencias de una matriz)**.**

Sea A una matriz cuadrada de orden n y k un entero no negativo, se define la **k-ésima potencia de** A, denotada por A^k, por la fórmula de recurrencia:

(i) $A^0 := \mathrm{I}_n$,

(ii) $A^k := A^{k-1}\,A$ para $k \geq 1$.

Ejemplo 16.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Determinar A^2.

❧**Solución.** De acuerdo a la definición 10 se tiene que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 17.

Sea $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determinar N^3.

❧**Solución.**

$$\begin{aligned} N^3 &= N^2 \cdot N = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note, en este ejemplo, que existen matrices no nulas con alguna potencia nula, lo cual es una propiedad que no cumple el conjunto de los números reales. Estas matrices reciben un nombre particular, como se indica a continuación.

Definición 11.

Una matriz cuadrada A de orden n se dice **nilpotente**, si existe un entero positivo k tal que $A^k = \mathbf{0}_n$.
$\ast$ Al menor entero que satisface la igualdad $A^k = \mathbf{0}_n$, se le llama **índice de nilpotencia** de A. También se dice que la matriz es nilpotente de índice o de orden k.

Ejemplo 18.

Las matrices triangulares con todos los elementos de su diagonal principal nulos son matrices nilpotentes.

Otras definiciones relacionadas con la potencia, se presentan de inmediato.

Definición 12.

Una matriz A es **idempotente** si $A = A^2$.

Ejemplo 19.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son idempotentes.

$\ast\ast$ **Teorema 4.** *Para enteros m, n no negativos se tiene que*

$$A^n \cdot A^m = A^{n+m} \qquad y \qquad (A^n)^m = A^{nm}.$$

$\ast\ast$ **Teorema 5.** *Sean A y B dos matrices cuadradas, tales que $A \cdot B = B \cdot A$ entonces se cumple:*

(a) $(A \cdot B)^n = A^n \cdot B^n$.

(b) $A^n \cdot B^m = B^m \cdot A^n$.

Otra noción relativa a una matriz se define a continuación.

Definición 13.

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. La **traspuesta** de A, denotada por A^t ó ${}^tA$, es la matriz de $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ definida por $[A^t]_{ij} = [A]_{ji}$ para todo i, j.

El considerar la traspuesta de una matriz equivale a intercambiar filas por columnas y viceversa, esto es, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ entonces } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 20.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ i & 0 & 4 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & i \end{pmatrix}$,

hallar A^t, B^t y C^t.

❧**Solución.** De acuerdo a la Definición 13 se tiene que

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C^t = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & i & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 2 & 3 & 4 & i \end{pmatrix}.$$

❋ ❋ **Teorema 6** (Propiedades de la traspuesta de una matriz)**.** *Sean A y B matrices de orden adecuados de tal manera que existan las operaciones de suma y multiplicación. Sea α un escalar. Entonces:*

❶ $(A + B)^t = A^t + B^t$,

❷ $(\alpha A)^t = \alpha A^t$,

❸ $(AB)^t = B^t \cdot A^t$,

❹ $(A^t)^t = A$.

Demostración. ❶ Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entoces

$$[(A + B)^t]_{ij} = [A + B]_{ji} = [A]_{ji} + [B]_{ji} = [A^t]_{ij} + [B^t]_{ij}.$$

❶ Se deja de ejercicio para el lector.

❷ Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ se tiene que

$$[(AB)^t]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{jk}[B]_{ki} = \sum_{k=1}^{n}[A^t]_{kj}[B^t]_{ik} = \sum_{k=1}^{n}[B^t]_{ik}[A^t]_{kj} = [B^tA^t]_{ij}.$$

Esto implica que $(AB)^t = B^t \cdot A^t$.

❸ Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces

$$[(A^t)^t]_{ij} = [A^t]_{ji} = [A]_{ij},$$

esto es $(A^t)^t = A$. □

Ejemplo 21.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Verificar que $(AB)^t = B^t \cdot A^t$.

❧**Solución.** El lector puede verificar que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 & -16 & 22 \\ 19 & 18 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, $(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 16 & 18 \\ -16 & -1 \\ 22 & 0 \end{pmatrix}$.

Por otra parte,

$$B^tA^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 16 & 18 \\ -16 & -1 \\ 22 & 0 \end{pmatrix} = (A \cdot B)^t.$$

Definición 14.

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. La **conjugada** de A, denotada por $\overline{A}$ se define por $[\overline{A}]_{ij} = \overline{[A]_{ij}}$.
Además, la **traspuesta conjugada** o traspuesta hermitiana, denotada por A^*, se define como $A^* = \overline{A^t}$.

Es claro que, si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ entonces $A^* = A^t$.

Ejemplo 22.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i & i \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 5-i & 2i \end{pmatrix}$ tiene traspuesta conjugada

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2+i & 3 & 5+i \\ -i & 2 & -2i \end{pmatrix}.$$

❋ ❋ **Teorema 7** (Propiedades de las matrices conjugadas)**.** *Sean A y B matrices de los órdenes adecuados. Entonces*

❶ $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$,

❷ $(A^*)^* = A$,

❸ $(A+B)^* = A^* + B^*$,

❹ $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$,

❺ $(AB)^* = B^*A^*$,

❻ *Si A es invertible, entonces A^* es invertible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Demostración. Se demuestra aquí las dos últimas partes del teorema y se deja al lector las demás.

❺ Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$, entonces

$$(AB)^* = \overline{(AB)^t} = \overline{B^tA^t} = \overline{B^t}\ \overline{A^t} = B^*A^*.$$

❻ Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertible, entonces

$$\begin{aligned} (A^{-1})^*A^* &= (A(A^{-1}))^* = I^* = I, \\ &\text{y} \\ A^*(A^{-1})^* &= ((A^{-1})A)^* = I^* = I, \end{aligned}$$

Esto implica que A^* es invertible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. □

Note que en el caso de matrices cuadradas se puede comparar la matriz A con su traspuesta A^t, algunas veces una matriz puede coincidir con su traspuesta (o con el opuesto de su traspuesta); este tipo de matrices reciben nombres particulares, tal como lo establece la siguiente definición.

Definición 15.

Una matriz A se dice que:

❶ **simétrica**, si $A = A^t$.

❷ **antisimétrica**, si $A = -A^t$.

Note el lector que las matrices simétricas o antisimétricas son necesariamente cuadradas.

Ejemplo 23.

Determinar si las siguientes matrices son simétricas o antisimétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 9 & 7 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ -9 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

❧**Solución.** ☞ La matriz A no es cuadrada, luego no puede ser simétrica ni antisimétrica.

☞ Para las matrices B y C se tiene que:

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = B \quad y \quad C^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -9 & -7 \\ -2 & 0 & -3 & -2 \\ 9 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -C.$$

Esto es, B es simétrica y C es antisimétrica.

☞ Por su parte, $D^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, esto significa D no es simétrica, ni antisimétrica.

❋ **Observación 4.** ☞ *En una matriz simétrica, podría considerarse la diagonal principal como un eje de simetría y es fácil notar que en este caso poca importancia tienen los elementos de la diagonal principal.*

☞ *En el caso de las matrices antisimétricas necesariamente los elementos de la diagonal principal son ceros.*

☞ *Una matriz que sea simétrica y antisimétrica a la vez tiene que ser la matriz nula.*

Ejemplo 24.

Demuestre que matriz $A + A^t$ es simétrica.

En efecto,

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t,$$

luego $A + A^t$ es una matriz simétrica.

❋ **Ejercicio 1.** *Se deja de ejercicios al lector Verificar que la matriz $A - A^t$ es antisimétrica.*

0.3. Ejercicios resueltos

1. Sean A y B matrices simétricas del mismo orden. Entonces la matriz AB es simétrica si y sólo si $AB = BA$.

   Demostración.

   $(\Longrightarrow)$ Suponga que AB es una matriz simétrica, se debe demostrar que $AB = BA$.

   $$\begin{array}{rrcl} \text{Por hipótesis} & AB & = & (AB)^t, \\ \text{por el Teorema 6} & & = & B^t A^t, \\ \text{ya que } A \text{ y } B \text{ son simétricas} & & = & BA. \end{array}$$

   En consecuencia, $A \cdot B = B \cdot A$, como se deseaba demostrar.

   $(\Longleftarrow)$ Recíprocamente, suponga que $AB = BA$, debe demostrarse ahora que AB es simétrica.

   $$\begin{array}{rrcl} \text{Por hipótesis} & (AB)^t & = & (BA)^t, \\ \text{por el Teorema 6} & & = & A^t B^t, \\ \text{dado que } A \text{ y } B \text{ son simétricas} & & = & AB. \end{array}$$

   Esto verifica que si $AB = BA$, entonces $(AB)^t = AB$, esto es $A \cdot B$ es simétrica. □

2. Demuestre que toda matriz A se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

   Demostración. Dado que $A + A^t$ es simétrica (Ver Ejemplo 24) y $A - A^t$ es una matriz antisimétrica (Ver ejercicio 1), el Teorema 6 (❷) garantiza que $\frac{1}{2}\left(A + A^t\right)$ y $\frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$ son matrices simétrica y antisimétrica respectivamente.

   Luego, $A = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$, completando la demostración. □

Definición 16.

Sea A una matriz cuadrada de orden n. La **traza** de A, la cual es denotada por $tr(A)$, es la suma de los elementos de la diagonal principal de A, esto es $tr(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} [A]_{ii}$.

Ejemplo 25.

La traza de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & i \end{pmatrix}$ está dada por $tr(A) = 1+1+i = 2+i$.

❋ ❋ **Teorema 8.** *Sean A y B matrices de órdenes adecuados y $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces:*

❶ $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

❷ $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$.

❸ $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

❹ $tr(A^t) = tr(A)$.

Demostración. ❶ Sean A y B matrices en $M_n(\mathbb{K})$, entonces, de acuerdo a la Definición 16:

$$tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} [A+B]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} ([A]_{ii} + [B]_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii} + \sum_{i=1}^{n} [B]_{ii} = tr(A) + tr(B).$$

❷ Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces

$$tr(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n} ([\alpha A]_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha [A]_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii} = \alpha tr(A).$$

❸ Para determinar la traza de AB,

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [B]_{ki} \right) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n}} [A]_{ik} [B]_{ki}. \tag{1}$$

De forma similar, se tiene que

$$tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} [B]_{ik} [A]_{ki} \right) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n}} [B]_{ik} [A]_{ki}. \tag{2}$$

De (1) y (2) se obtiene la igualdad deseada, por lo cual se concluye que $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

❹ Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces

$$tra(A^t), = \sum_{i=1}^{n} [A^t]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii} = tr(A).$$

□

0.4. La inversa de una matriz

De cursos básicos de cálculo se conoce, que dado cualquier número real x con $x \neq 0$, existe un único número real x^{-1} tal que $xx^{-1} = x \cdot x^{-1} = x^{-1}x = x^{-1} \cdot x = 1$, donde 1 es el elemento identidad de la multiplicación en los números reales. ¿Será que dada cualquier matriz cuadrada de orden n, dígase A, es posible hallar siempre otra matriz cuadrada B de orden n, al que $AB = BA = I_n$?. Para responder esta interrogante se requiere de ciertas herramientas previas que ayudaran a dar respuesta.

Definición 17.

Una matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ se dice que es **invertible** (llamada también **no singular**) si existe una matriz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, tal que:

$$AB = BA = \mathrm{I}_n.$$

En este caso se dice que B es es la **inversa** de A, y cuando no existe esta matriz B se dice que A **no es invertible** (ó A es singular).

Ejemplo 26.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Comprobar que $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es la inversa de A.

❧**Solución.** Note que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$B \cdot A \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 \\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2} & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que $AB = BA = I_2$, entonces por la definición 17, A es invertible con inversa $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Desafortunadamente no siempre es tan sencillo, como en el ejemplo anterior, encontrar una matriz inversa. Una pregunta natural es ¿existirá alguna forma para encontrar esta matriz inversa, en caso de que ésta exista?, ¿Existe alguna forma de determinar si una matriz tiene inversa, sin necesidad de hallar la inversa? o ¿Una matriz puede poseer más de una matriz inversa?. Lo que sigue se dedica a dar respuesta a estas preguntas.

⁎ ⁎ Teorema 9. *Si una matriz cuadrada A de orden n posee inversa, ésta es única.*

Demostración. Sea A una matriz cuadrada de orden n y suponga que existen matrices B y C tales que $AB = BA = I_n$ y $AC = CA = I_n$. Luego,

$$\begin{array}{lrcl} & AB & = & I_n, \\ \text{multiplicando a ambos lados por } C & C(AB) & = & CI_n \\ \text{usando la asociatividad de la multiplicación} & (CA)B & = & C \\ \text{usando la hipótesis} & I_nB & = & C \\ & B & = & C. \end{array}$$

Esto demuestra que si existe una matriz que es inversa de A, al igual que B, entonces debe ser igual a B. Esto es, la inversa de una matriz es única. □

En virtud del Teorema 9, al hacer resferencia a la definición 17 se habla de la matriz inversa de A y se denotará por A^{-1}.

Se presentan ahora algunas propiedades de las matrices invertible.

⁎ ⁎ Teorema 10 (Propiedad de una matriz invertible)**.** *Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden e invertibles. Entonces:*

❶ *AB es invertible y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.*

❷ *A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.*

❸ *Si α es un escalar no nulo, entonces αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$.*

❹ *Si n es un entero cualquiera, entonces A^n es invertible y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.*

❺ A^t *es invertible y* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Demostración. ❶ Sean $A, B \in M_n$ matrices invertibles. Note que

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A((BB^{-1})A^{-1}) \\ &= A(I_nA^{-1}) \\ &= AA^{-1} = I_n. \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}((A^{-1}A)B) \\ &= B^{-1}(I_nB) \\ &= B^{-1}B = I_n. \end{aligned}$$

Esto significa, según la Definición 17, que AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

La propiedad ❷ se sigue inmediatamente de la definición 17.

❸ De forma similar al primer caso, tendremos que

$$\begin{aligned} (\alpha A)(\alpha^{-1}A^{-1}) &= \alpha\alpha^{-1}(AA^{-1}) \\ &= 1I_n = I_n, \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} (\alpha^{-1}A^{-1})(\alpha A) &= \alpha^{-1}\alpha(A^{-1}A) \\ &= 1I_n = I_n. \end{aligned}$$

Esto significa, según la Definición 17, que αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$.

Para demostrar ❹, suponga que $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned} A^2(A^{-1})^2 &= A[(AA^{-1})A^{-1}] = A(I_nA^{-1}) = AA^{-1} = I_n \\ (A^{-1})^2A^2 &= A^{-1}[(A^{-1}A)A] = A^{-1}(I_nA) = A^{-1}A = I_n. \end{aligned}$$

Nuevamente, según la Definición 17, que A^2 es invertible y $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

Supongamos que esto se cumple para todo entero menor o igual que k, es decir, que

$$(A^j)^{-1} = (A^{-1})^j \quad \text{para todo} \quad j \leq k.$$

Luego

$$\begin{aligned} A^{k+1}(A^{-1})^{k+1} &= AA^k((A^{-1})^kA^{-1}) = A[(A^k(A^{-1})^k)A^{-1}] = A[I_nA^{-1})] = AA^{-1} = I_n \\ (A^{-1})^{k+1}A^{k+1} &= [A^{-1}(A^{-1})^k][A^kA] = A^{-1}[((A^{-1})^kA^k)A] = A^{-1}[I_nA] = A^{-1}A = I_n. \end{aligned}$$

Entonces, según la Definición 17, $(A^{k+1})^{-1} = (A^{-1})^{k+1}$, por lo tanto la propiedad se cumple para todo entero positivo k. □

0.5. Matrices escalonadas y escalonadas reducidas

En esta sección se verá que cada matriz se puede transformar en una matriz escalonada al aplicar operaciones elementales de filas, por lo cual se comienza definiendo esta matrices.

Definición 18.

Una matriz A se dice **matriz escalonada** por filas o simplemente escalonada si cumple:

❶ Todos los renglones cero, en caso de tenerlos, están en la parte inferior de la matriz.

❷ El primer elemento no nulo de cada fila, que es llamado entrada principal de la fila, está en una columna situada a la derecha de la entrada principal de la fila inmediata superior.

❸ Todas las entradas que se localicen en una columna situada debajo de una entrada principal son ceros.

Ejemplo 27.

Como ejemplo de una matriz escalonada se tienen:

➠ $$\begin{pmatrix} \boxed{3i} & -2 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 6+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-3+i} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 19.

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriz cualquiera. Diremos que A es de forma **escalonada reducida** si verifica las siguientes propiedades:

❶ Todas las filas nulas se encuentran en la parte inferior de la matriz.

❷ El primer elemento no nulo de una fila es 1 (llamado líder o privote).

❸ El elemento líder de cada fila se encuentra a la derecha del elemento líder de la fila anterior.

❹ Cada columna que incluye un elemento líder contiene ceros en los elementos superiores e inferiores del mismo.

Muchas veces se requiere aplicar operaciones sobre matrices para obtener una matriz equivalente el cual se puede facilitar un cálculo. Las operaciones elementales de filas se definen a continuación.

Definición 20.

Las **operaciones elementales por filas** son operaciones que pueden ser aplicadas a las filas de una matriz de manera conveniente, y están dadas por:

❶ Intercambiar dos filas distintas de una matriz ($f_i \longleftrightarrow f_j;\ i \neq j.$)

❷ Multiplicar cualquier fila por una constante distinta de cero ($f_i \rightarrow cf_i.$)

❸ Sumar un múltiplo constante de una fila a otra fila ($f_i \rightarrow cf_j + f_i;\ \ i \neq j.$)

Ejemplo 28.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, obtenga una nueva matriz aplicando operaciones elementales por filas.

❧**Solución.** ➠ De acuerdo a la definición 20, simplemente intercambiamos dos filas distintas. En este caso, se han seleccionado las filas 1 y 3; (el lector puede haber seleccionado otro intercambio).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \longleftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = B.$$

Definición 21.

Dos matrices A y B, de orden $m \times n$, son **equivalentes** por filas si existe una cantidad finita de operaciones elementales por filas tales que B puede ser obtenida a partir de A. Cuando A y B sean equivalente por filas, escribiremos: $A \sim B$.

Ejemplo 29.

Las matrices A y B del Ejemplo 28 son equivalentes por filas ya que B se obtuvo a partir de la matriz A, a través de una operación elemental por fila.

A través de operaciones elementales de filas es posible transformar una matriz en otra que tiene una forma más sencilla, por ejemplo una matriz escalonada.

Ejemplo 30.

Obtenga una matriz escalonada a partir de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 & 6i \\ 3i & 2 & 1 & i & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 & 6i \\ 3i & 2 & 1 & i & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to \frac{1}{2}f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3i \\ 3i & 2 & 1 & i & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \to -3if_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3i \\ 0 & 2-6i & 1-9i & -2i & 16 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4 \to -f_1+f_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3i \\ 0 & 2-6i & 1-9i & -2i & 16 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & i \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 4-3i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3i \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 4-3i \\ 0 & 2 & 4 & 1 & i \\ 0 & 2-6i & 1-9i & -2i & 16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4 \to (2-6i)f_2+f_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3i \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 4-3i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8-5i \\ 0 & 0 & -3+3i & -2i & 6-30i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3i \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 4-3i \\ 0 & 0 & -3+3i & -2i & 6-30i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8-5i \end{pmatrix}$$

☞ Obsérvese que al aplicar una operación sobre alguna fila, el resto de las filas quedan iguales. Solo cambia aquella en la que fue aplicada la operación elemental. Luego, la matriz obtenida está en forma escalonada.

Es válido preguntar ¿será que esta matriz es única?. Al parecer no es así, pues si a esta última matriz obtenida se hace la operación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3i \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 4-3i \\ 0 & 0 & -3+3i & -2i & 6-30i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8-5i \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to -f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3i \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4+3i \\ 0 & 0 & -3+3i & -2i & 6-30i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8-5i \end{pmatrix}$$

se obtiene una matriz equivalente a todas las anteriores. La respuesta se encontrarán en los siguientes teoremas, para los cuales sólo se presentan sus enunciados y ejemplos.

❋ ❋ Teorema 11. *Si C es una matriz escalonada reducida equivalente por filas a una matriz A, entonces C es única.*

Según este teorema en el ejemplo 30 se tiene que la matriz equivalente reducida, es única y en este caso es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3i \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4+3i \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3}+\frac{i}{6} & -6-6i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8-5i \end{pmatrix}$$

❋ ❋ Teorema 12. *Sean A y B matrices escalonadas equivalentes por filas. Entonces A y B tienen exactamente el mismo número de filas no nulas.*

Definición 22.

Sean A una matriz y C una matriz escalonada equivalente por filas a la matriz A. Entonces se define el **rango** de A, como el número de filas no nulas de C. El rango se denotará por $\text{rang}(A)$.

Ejemplo 31.

Determine el rango de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 8 & -10 & -5 \\ 3 & -3 & -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

❧**Solución.** Se deja como ejercicio para el lector verificar que la forma escalonada reducida C equivalente a A es la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego por Definición 22 se tiene que $\operatorname{rang}(A) = 2$.

❋ ❋ **Teorema 13.** *Una matriz A es invertible si y sólo si A es equivalente por filas a la matriz identidad.*

Ejemplo 32.

Determine si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es invertible.

❧**Solución.** Veamos primero si $A \sim \mathrm{I}_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to -\frac{1}{3}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_1 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como A es equivalente por filas a I_2 se tiene que es invertible.

❋ ❋ **Teorema 14.** *Supongamos que A es equivalente por filas a I_n. Entonces las mismas operaciones que se aplicaron a la matriz A para obtener a la matriz identidad I_n, al ser aplicada nuevamente a la matriz I_n, y en el mismo orden producirán como resultado a la matriz inversa de A.*

Ahora ya se tienen todas las herramientas necesarias que permitirán describir un método para calcular la inversa de una matriz cuadrada en caso de que ésta exista.

0.5.1. Algoritmo de Gauss-Jordan para hallar la inversa de una matriz

Sea A una matriz de orden $n \times n$. Para hallar la inversa de A, en caso de que exista, se procede de la siguiente manera:

❶ Se adjunta a la matriz A la matriz identidad de orden $n \times n$ y así formamos la matriz ampliada $(A|I_n)$.

❷ Se calcula la forma escalonada reducida de la matriz $(A|I_n)$. Si la forma escalonada reducida es de la forma $(I_n|B)$, entonces A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n, y por tanto A sería invertible.

☞ En este caso, la inversa de la matriz A es $A^{-1} = B$. Si la forma escalonada reducida no es de la forma $(I_n|B)$, A no es equivalente por filas a la matriz I_n, y por tanto, A no es invertible.

Ejemplo 33.

Determine si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ es invertible. En caso afirmativo, encuentra su inversa.

❧**Solución.** Adjuntamos la matriz identidad de orden 3×3 a la matriz A y aplicamos operaciones elementales por filas a la matriz ampliada. Entonces:

$$(A : I_3) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_1 + f_3]{f_2 \to -2f_1 + f_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \to -f_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 2f_2]{f_1 \to f_1 + f_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_2 \to f_2 - f_3]{f_1 \to f_1 + f_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Observemos que la forma escalonada reducida de $(A|I_3)$ es de la forma $(I_3|B)$. Entonces A es equivalente por filas a la matriz I_3, y por tanto, el Teorema 14 garantiza que A es invertible. Además la inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 34.

Determine si la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ es invertible. En caso afirmativo, encuentra su inversa.

❧**Solución.** Adjuntamos la matriz identidad de orden 3 a la matriz M y aplicamos operaciones elementales por filas a la matriz ampliada. Esto es:

$$(M:I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 2f_1]{f_2 \to f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 + 3f_2]{f_1 \to f_1 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Observemos que en esta última matriz no hace falta continuar el proceso ya que se anula una fila del primer bloque de la última matriz. En consecuencia, la forma escalonada reducida de $(M:I_3)$ no es de la forma $(I_3:B)$, donde B es una matriz cuadrada de orden 3. Luego M no es equivalente por filas a la matriz I_3, y en consecuencia, el Teorema 13 garantiza que M no es invertible.

Ejemplo 35.

Determine si la matriz $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible. En caso afirmativo, encuentra su inversa.

❧**Solución.**

$$
(H:I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3\to -5f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{f_2\to \frac{1}{2}f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{f_3\to -\frac{1}{4}f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{f_2\to f_2-\frac{3}{2}f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{f_1\to f_1-f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{f_1\to f_1-f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right).
$$

Observemos que la forma escalonada reducida equivalente a $(H:I_3)$ es de la forma $(I_3:B)$. Entonces el Teorema 13 garantiza que H es equivalente por filas a la matriz I_3, y por el Teorema 14 H es invertible. Además

$$
H^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8}\\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.
$$