Álgebra lineal

Sistemas de ecuaciones lineales

Mireya Rafaela Bracamonte
Luz Elimar Marchan

1

Índice general

Capítulo 1

Sistemas de ecuaciones lineales

La justificación de iniciar este texto con el estudio de matrices y determinantes puede palparse de forma inmediata en este nuevo capítulo de sistemas de ecuaciones lineales.
En este estudio, se emplearan frecuentemente las matrices, para expresar de forma clara, concisa y elegante los sistemas de ecuaciones lineales y para la búsqueda de soluciones será muy útil el uso de determinantes.
Por otra parte, es frecuente oír que se hacen algunos "Trucos matemáticos"donde se pretende determinar la edad de una persona, por ejemplo : Si dentro de 10 años Adriana tiene el triple de la edad que tiene ahora, ¿qué edad tendrá entonces?. Y usualmente, por intuición esto debe tener una solución, pero si se piden cosas como "Hallar un número de dos cifras sabiendo que la suma de las cifras es 12 y que la primera de ellas es el triple de la segunda", debe ser natural preguntar si existe tal solución, si existe cuál es y finalmente cómo se puede hallar la solución si la tiene.
En general, dado un problema se debe en primer lugar discutir para determinar si tiene o no solución, si tiene solución si es única o no y posteriormente resolver. De esto trata es capítulo, pero en particular de aquellos problemas que derivan en una ecuación lineal o en un sistema de ecuaciones lineales.

En lo que resta de capítulo, a menos que se indique lo contrario, se consideran los escalares en un campo $\mathbb{K}$ que puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Los elementos del campo son llamados escalares.

1.1. Ecuaciones lineales

Definición 1.

Una **ecuación de primer grado** o **ecuación lineal** es una igualdad que involucra una o más variables de potencia uno y no contiene productos entre las variables, es decir, es una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b. \tag{1.1}$$

❶ A $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$ se les conoce como **coeficiente** de la ecuación,
❷ Al escalar $b \in \mathbb{K}$ se le llama **término independiente** o constante de la ecuación (1.1).
❸ A $x_1, x_2, ..., x_n$ se les llama incógnitas o variables.

En caso de que en la ecuación (1.1) $b = 0$, la ecuación se llama **homogénea** y, en caso contrario, se llama **no homogénea**.

Ejemplo 1.

Como ejemplos de ecuaciones homogéneas, se tienen:

1. $5x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - x_3 = 0,$
2. $-x + 4y - 5x + 2v = 0.$

Ejemplo 2.

Como ejemplos de ecuaciones no homogéneas, se tienen:

1. $2x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 5,$
2. $4x - 2y + z - \dfrac{1}{5}v = 2.$

Definición 2.

Una **solución** de la ecuación (1.1) es una secuencia ordenada finita $s_1, s_2, \cdots, s_n$ de escalares que al ser reemplazados, simultáneamente, en cada variable respectivamente, satisfacen tal ecuación. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación del tipo (1.1) se denomina **conjunto solución**.

Ejemplo 3.

Determinar tres soluciones de la ecuación $x_1 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$.

❧**Solución.**

✓ $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ es solución de dicha ecuación, ya que al sustituir estos valores en la ecuación la verifican, esto es $0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 0 = 0$.

✓ La secuencia $x_1 = x_5 = 0$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = -\frac{1}{2}$ también es solución dado que $0 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 = 0$.

✓ También se puede verificar que la secuencia $x_1 = x_5 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$ satisface la ecuación dada: $1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 = 0$.

Note que $x_1 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ y $x_5 = 1$ no es solución de dicha ecuación pues $1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 - 0 = -1$, esto quiere decir que $x_1 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ y $x_5 = 1$ no satisface la ecuación.

1.2. Sistemas de ecuaciones

Como ya se ha dicho antes, muchos problemas de la vida real requieren ecuaciones lineales para ser resueltos, pero puede ocurrir requerir que más de una ecuación se satisfagan simultáneamente, en este caso se considera un sistema de ecuaciones.

Definición 3.

Un **sistema lineal** de m ecuaciones con n variables o incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es un conjunto de m ecuaciones lineales de la forma

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

❶ $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $(i = 1, ..., m, \;\; j = 1, ..., n)$ son llamados **coeficientes** del sistema (1.2),

❷ Los $b_1, b_2, ..., b_m$ son los **términos constantes** o independientes.

En el caso en que $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, es decir todos los téminos independientes son nulos, el sistema (1.2) es denominado **homogéneo** y si al menos uno de los términos constantes es distinto de cero, el sistema se llama **no homogéneo**.

Ejemplo 4.

El sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 5x_3 - x_4 & = & 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 & = & 0 \end{array} \right.$ es un sistema homogéneo que tiene 3 ecuaciones y 4 variables: x_1, x_2, x_3, x_4.

Ejemplo 5.

El sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3ix_3 + 8x_4 & = & 0 \\ -x_1 + 5x_3 - (i+1)x_4 & = & 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 & = & 1 \end{array} \right.$ tiene 3 ecuaciones y 4 variables: x_1, x_2, x_3, x_4 y es un sistema no homogéneo.

1.3. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Considere la matriz cuyos elementos o entradas son los coeficientes del sistema de ecuaciones (1.2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Esta matriz A recibe el nombre de **matriz de coeficientes** del sistema o simplemente matriz del sistema.

Además se consideran las matrices columnas, una cuyas componentes sean los términos independientes del sistema (1.2), $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$, y la otra la matriz columna cuyas componentes sean las incógnitas del sistema (1.2) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$.

A la matriz B, definida antes se le llama **matriz de términos independientes** y a la matriz X se le llama **matriz de incógnitas**.

Ahora, haciendo uso de la multiplicación de matrices y la definición de igualdad de matrices se puede escribir el sistema (1.2) como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}. \tag{1.3}$$

Esta representación del sistema de ecuaciones lineales (1.2) dada por (1.3) se denomina **representación matricial** del sistema y puede expresarse como $A \cdot X = B$.

Ahora bien, se considera la matriz $(A\,|B\,) \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$ la matriz que se obtiene adicionando a la matriz A el vector columna de términos independientes y se le llama **matriz ampliada del sistema**:

$$(A\,|B\,) : \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{array}\right).$$

Ejemplo 6.

Hallar la representación matricial del sistema $\begin{cases} 2x + 3y - 5z &= i \\ 3x + 5y + z &= -2 \\ 2x - 8z &= 1. \end{cases}$

❧**Solución.** Se deben formar las matrices de:

➲ coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

➲ términos independientes $B = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

➲ incógnitas $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Entonces el sistema queda representado

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 7.

Escribir el sistema de ecuaciones correspondiente a:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

❧**Solución.** Al efectuar las operaciones e igualar matrices se obtiene el sistema $\begin{cases} 4x - 5y + 0z &= 1+i \\ -x + 0y - 2z &= -1, \end{cases}$, es decir $\begin{cases} 4x - 5y &= 1+i \\ -x - 2z &= -1 \end{cases}$, o bien $\begin{cases} 4x - 5y &= 1+i \\ x + 2z &= 1 \end{cases}$.

Definición 4.

Una secuencia finita de escalares $s_1, s_2, ..., s_n$ es una solución del sistema (1.2) si todas las ecuaciones se satisfacen al sustituir $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ..., $x_n = s_n$. Al conjunto formado por todas las soluciones de (1.2) se le llama **conjunto solución** del sistema.

Ejemplo 8.

El lector puede fácilmente verificar que $x = 2, y = 1$ y $z = 2$ es una solución del sistema $\begin{cases} x + 3y &= 5 \\ 4x + 5y - 3z &= 7 \\ -x + z &= 0 \end{cases}$.

Ahora bien, en el ejemplo anterior es válido preguntar si esta es la única solución o si se pueden hallar otras soluciones. Más aún, dado un sistema de ecuaciones lineales ¿Siempre se puede hallar al menos una solución?. La respuesta es negativa, por esta razón se necesita determinar cuando un sistema tiene solución y establecer formas de determinar esto.

Definición 5.

1. Un sistema de ecuaciones lineales se dice **consistente** o **compatible** si tiene alguna solución.
2. Un sistema de ecuaciones lineales se dice **determinado** si tiene una única solución.
3. Un sistema de ecuaciones lineales se dice **indeterminado** si existe más de una solución.
4. Un sistema se dice **inconsistente** o **incompatible** si no tiene solución alguna.

✻ **Observación 1.** *En los sistemas homogéneos $A \cdot X = \mathbf{0}_m$[1], es decir, un sistema de la forma*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

*es fácil verificar que $X = \mathbf{0}_n$ (esto es $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$) es solución del sistema; por lo tanto un sistema homogéneo nunca es inconsistente. Entonces un sistema homogéneo no puede sino tener la solución de ceros (se llama también **solución trivial**) o tener infinito número de soluciones.*

Es útil conocer métodos para determinar si un sistema tiene o no solución y en caso de tenerla, determinar el conjunto solución.

1.3.1. Método de eliminación de Gauss-Jordan

La eliminación de Gauss-Jordan, llamada así debido a Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan, es un algoritmo del álgebra lineal para determinar las soluciones de un

[1] $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times 1}$

sistema de ecuaciones lineales. Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss cuando se obtienen sus soluciones mediante la reducción del sistema dado, a otro equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior. El método de Gauss transforma la matriz de coeficientes en una matriz triangular superior, mediante operaciones elementales de filas. El método de Gauss-Jordan continúa el proceso de transformación hasta obtener una matriz diagonal.

Definición 6.

Supongamos que $A \cdot X = B$ y $C \cdot X = D$ son dos sistemas de m ecuaciones y n variables. Diremos que éstos son **sistemas equivalentes** si $(A|B)$ y $(C|D)$ son equivalentes por filas.

❋ ❋ **Teorema 1.** *Si dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, entonces tienen el mismo conjunto solución.*

❋ ❋ **Teorema 2.** *Sea A una matriz de orden $m \times n$ y el sistema homogéneo $A \cdot X = \mathbf{0}_m$ de m ecuaciones y n variables. Entonces:*

❶ *El sistema dado es consistente determinado si y sólo si $rango(A) = n$.*

❷ *El sistema dado es consistente indeterminado si y sólo si $rango(A) = r < n$.*

En este último caso existen $n - r$ variables libres.

Ejemplo 9.

Utilizar el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -11 \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ -5x_1 - 12x_2 + 8x_3 + 13x_4 = -34 \end{cases}$$

❧**Solución.** La matriz ampliada del sistema es $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & -11 \\ -3 & -2 & 2 & 3 & -4 \\ -5 & -12 & 8 & 13 & -34 \end{array}\right)$.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & -11 \\ -3 & -2 & 2 & 3 & -4 \\ -5 & -12 & 8 & 13 & -34 \end{array}\right)
\xrightarrow{f_1 \to f_2 + f_1}
\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -5 & 3 & 5 & -15 \\ -3 & -2 & 2 & 3 & -4 \\ -5 & -12 & 8 & 13 & -34 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\ ]{\substack{f_2 \to -3f_1 + f_2 \\ f_3 \to -5f_1 + f_3}}
\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 5 & -15 \\ 0 & 13 & -7 & -12 & 41 \\ 0 & 13 & -7 & -12 & 41 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{f_3 \to -f_2 + f_3}
\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 5 & -15 \\ 0 & 13 & -7 & -12 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[f_2 \to -5f_2]{f_1 \to 13f_1}
\left(\begin{array}{cccc|c} -13 & 65 & 39 & 65 & -195 \\ 0 & -65 & 35 & 60 & -205 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{f_1 \to f_1 + f_2}
\left(\begin{array}{cccc|c} -13 & 0 & 74 & 125 & -400 \\ 0 & -65 & 35 & 60 & -205 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[f_2 \to -\frac{1}{65}f_2]{f_1 \to -\frac{1}{13}f_1}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\dfrac{74}{13} & -\dfrac{125}{13} & \dfrac{400}{13} \\ 0 & 1 & -\dfrac{7}{13} & -\dfrac{12}{13} & \dfrac{41}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Esta última matriz, que se ha obtenido, ya es la matriz escalonada reducida; cuyo sistema asociado es:

$$
\left\{\begin{array}{l} x_1 \quad - \dfrac{74}{13}x_3 - \dfrac{125}{13}x_4 = \dfrac{400}{13} \\[2ex] x_2 - \dfrac{7}{13}x_3 - \dfrac{12}{13}x_4 = \dfrac{41}{13} \end{array}\right.
$$

. Este sistema tiene infinitas soluciones.

Para escribir la solución general se hace $x_3 = t$ y $x_4 = s$ en cuyo caso el conjunto solución es $\left\{\left(\dfrac{400}{13} + \dfrac{74}{13}t + \dfrac{125}{13}s, \dfrac{41}{13} + \dfrac{7}{13}t + \dfrac{12}{13}s, t, s\right) : s, t \in \mathbb{R}\right\}$.

❋ **Observación 2.** *Si se obtiene una matriz donde todos las entradas de una fila, correspondientes a los coeficientes de las variables es son iguales a cero y el término constante diferente de cero, entonces el sistema no tiene solución o es inconsistente. Por ejemplo, si se obtiene una matriz de la forma*

$\begin{pmatrix} * & * & * & | & * \\ * & * & * & | & * \\ * & * & * & | & * \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$ *la última ecuación se lee* $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3$ *; la cual no tiene solución, porque el sistema no tiene solución o es inconsistente.*

Ejemplo 10.

Determinar el conjunto solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x_1 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0. \end{cases}$.

❧**Solución.** En principio se considera la matriz de los coeficientes del sistema y determinamos su rango $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. La forma escalonada reducida por filas equivalente, por filas, a la matriz A es, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Luego $rang(A) = 3 < 4$(el incógnitas). Así, por Teorema 2 se tiene que el sistema es consistente indeterminado, y además posee $(4 - 3 =)1$ variable libre.

Si se hace $x_4 = t$, entonces el conjunto solución será: $\left\{(-t, -\frac{1}{2}t, -\frac{1}{3}t, t) : t \in \mathbb{R}\right\}$.

Ejemplo 11.

Determinar el conjunto solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + 2z - 2v - w = 0 \\ 2x - y - z + 2v + w = 0 \\ -x + 5y + 8z - 10v - 5w = 0 \\ 3x - 3y - 4z + 6v + 3w = 0 \end{cases}.$$

❧**Solución.** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 8 & -10 & -5 \\ 3 & -3 & -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes del sistema. Se deja como ejercicio para al lector verificar que la forma escalonada reducida por filas equivalente por filas a la matriz A es $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De aquí $rang(A) = 2 < 5$. Por el Teorema 2, el sistema es consistente indeterminado y tiene $(5-2=)3$ variables libres, a saber: z, v, w. Si se hace $z = t, v = s$ y $w = r$ se tiene que, la solución general del sistema está dada por

$$\left\{ \left(-\frac{1}{3}t, -\frac{5}{3}t + 2s + r, t, s, r \right) : t, s, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ejemplo 12.

Determinar el conjunto solución del sistema $\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x - 3y + 6z = 0. \end{cases}$.

❧**Solución.** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, la matriz de los coeficientes del sistema, y el lector puede verificar que la forma escalonada reducida por filas equivalente a la matriz A es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Note que $rang(A) = 3$; luego, por el Teorema 2, se tiene que el sistema es consistente determinado, y haciendo uso de la observación 1, se obtiene que el conjunto solución está formado sólo por el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pero se requiere tener una forma de determinar si un sistemas de ecuaciones no homogéneo tiene solución y en caso de tenerla, cómo determinar su conjunto solución, por tal razón se presenta el siguiente teorema.

❋ ❋ **Teorema 3** (Sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos)**.** *Sea A una matriz de orden $m \times n$ y consideremos el sistema $A \cdot X = B$ de m ecuaciones con n variables y sea $(A|B)$ la matriz ampliada del sistema. Entonces el sistema es:*

1. *Inconsistente si y sólo si $rang(A) \neq rang((A|B))$.*

2. *Consistente si y sólo si* $rang(A) = rang((A|B))$*. Especificamente, el sistema es consistente:*

   a) *Determinado si y sólo si* $rang(A) = rang((A|B)) = n$*.*

   b) *Indeterminado si y sólo si* $rang(A) = rang((A|B)) = r < n$*. En este caso, existen* $n - r$ *variables libres.*

Ejemplo 13.

Determinar el conjunto solución del sistema $\begin{cases} 2x - 4y + 16z - 14v = 10 \\ -x + 5y - 17z + 19v = -2 \\ x - 3y + 11z - 11v = 4 \\ 3x - 4y + 18z - 13v = 17. \end{cases}$

❧**Solución.** Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 16 & -14 \\ -1 & 5 & -17 & 19 \\ 1 & -3 & 11 & -11 \\ 3 & -4 & 18 & -13 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix}$. Entonces

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 16 & -14 & 10 \\ -1 & 5 & -17 & 19 & -2 \\ 1 & -3 & 11 & -11 & 4 \\ 3 & -4 & 18 & -13 & 17 \end{array}\right).$$

Se aplican operaciones elementales de fila para obtener la forma escalonada reducida de la matriz $(A|B)$ y se obtiene $(A|B) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Note que $rang(A) = rang((A|B)) = 2$; entonces por teorema 3, el sistema es consistente indeterminado y posee $(4 - 2 =)2$variables libres las cuales son z y w.

Haciendo $z = t; v = r$ con $t, r \in \mathbb{R}$, se obtiene que el conjunto solución general del sistema es $\{(7 - 2t - r, 1 + 3t - 4r, t, r) : t, r \in \mathbb{R}\}$.

Ejemplo 14.

Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$\begin{cases} x + 2z - 2v = 1 \\ -x + y + v = -2 \\ y + 2z - v = 1. \end{cases}$

❧**Solución.** La matriz ampliada del sistema está dada por $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

Y la forma escalonada equivalente por filas a dicha matriz es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Note que $rang(A) = 2$ y $rang((A|B)) = 3$, por lo tanto el Teorema 3 permite concluir que el sistema es inconsistente, por lo tanto su conjunto solución es $\emptyset$.

Ejemplo 15.

Determinar el conjunto solución del sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x - y + z = -2 \\ 2x + 3y - 2z = 2. \end{cases}$.

❧**Solución.** La matriz ampliada del sitema es $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)$.

y la forma escalonada reducida equivalente es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$., lo cual deja ver que $rang(A) = rang((A|B)) = 3$, por lo tanto el Teorema 3 garantiza que el sistema es consistente determinado y su única solución es $x = 5, y = -2$ y $z = 1$ o de forma equivalente el conjunto solución está formado por un único elemento $\{(5, -2, 1)\}$.

1.4. Algunas aplicaciones

Los sistemas de ecuaciones constituyen una excelente herramienta de trabajo en otras áreas en donde poseen variadas aplicaciones. Por ejemplo, en la física son muy utilizados para estudiar circuitos eléctricos al momento de calcular las intensidades de corrientes de dicho circuito a través de las Leyes de Kirchoff. Así mismo en la química, los sistemas de ecuaciones lineales son útiles para el balanceo de ecuaciones químicas, entre otras aplicaciones. En esta sección estudiaremos algunos problemas generales, que pueden ser modelados a través de sistemas de ecuaciones lineales, de esta manera, resaltando el valor que el conocimiento de éstos posee en la formación de todo ingeniero.

Ejemplo 16.

Una bióloga ha colocado tres cepas bacterianas (denotadas como I, II y III) en un tubo de ensayo, donde serán alimentadas con tres diferentes fuentes alimenticias (A, B y C). Cada día se colocan 400 unidades del alimento A, 600 unidades del alimento B y 600 unidades del alimento C. Los datos del consumo diario de alimento por las bacterias (en unidades por día) se muestran en la siguiente tabla:

Alimento	Cepa I	Cepa II	Cepa III
A	1	2	0
B	2	1	1
C	1	1	2

¿ Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

❧**Solución.** Sean x_1, x_2 y x_3 el número de cepas del tipo I, II y III respectivamente. Notemos que en la tabla dada nos indican que a la cepa I le colocan 1 unidad del alimento A, a la cepa II le colocan 2 unidades del alimento A y a la cepa III le colocan 0 unidades del alimento A. Como en el enunciado del problema nos indican que cada día se colocan 400 unidades del alimento A y nos preguntan el número de bacterias de cada tipo que pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento, entonces esto nos forma la ecuación $x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 400$.

De manera similar se obtienen las siguientes ecuaciones $2x_1 + x_2 + x_3 = 600$ y $x_1 + x_2 + 2x_3 = 600$. Esto nos conduce al siguiente sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 400 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 600 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 600. \end{cases}$

Al resolverlo nos queda lo siguiente $x_1 = 160$, $x_2 = 120$, $x_3 = 160$. En consecuencia, el número de bacterias de cada tipo que pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento son las siguientes: 160 de la cepa I, 120 de la cepa II y 160 de la cepa III.

Ejemplo 17.

El dueño de un reconocido restaurante ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 500 \$ (sin impuestos). El valor del vino es 60 \$ menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que por los refrescos deben pagar un IVA del 6 %, por la cerveza del 12 % y por el vino del 30 %, lo que hace que la subfactura total, sólo de impuestos, sea de 92.4 \$, calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida.

❧**Solución.** Sean x, y, z y la cantidad en dólares invertida en refrescos, cervezas y vinos, respectivamente. Nótese que el dueño del bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 500 \$ (sin impuestos). Esto nos produce la siguiente ecuación $x + y + z = 500$. Además, el valor del vino es 60 \$ menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Así se tiene que $x + y - z = 60$. Como en los refrescos se debe pagar un IVA del 6 %, por la cerveza del 12 % y por el vino del 30 %, lo que hace que la subfactura total solo de impuestos sea de 92.4 \$ entonces se tiene la ecuación $\frac{6x}{100} + \frac{12y}{100} + \frac{30z}{100} = 92{,}4$. Esto nos produce el sistema $\begin{cases} x + y + z = 500 \\ x + y - z = 60 \\ \frac{6x}{100} + \frac{12y}{100} + \frac{30z}{100} = 92{,}4. \end{cases}$ Al resolverlo nos queda $x = 120\$$, $y = 160\$$ y $z = 220\$$.