1 LÍMITES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

OBJETIVOS:

- Definir Límites.
- Realizar demostraciones formales de límites.
- Describir gráficamente los límites.
- Calcular límites.

1.1 LÍMITE EN UN PUNTO

El Cálculo, básicamente está fundamentado en los límites, por tanto este tema es trascendental para nuestro estudio. De hecho, la derivada y la integral definida son conceptos basados en límites. Conceptualizar límite determinando el comportamiento de una función e interpretarlo en su gráfica, ayudará bastante en el inicio del análisis de los límites.

1.1.1 DEFINICIÓN INTUITIVA

Ciertas funciones de variable real presentan un comportamiento un tanto singular en la cercanía de un punto, precisar sus características es nuestra intención y el estudio de los límites va a permitir esto.

Empecemos analizando ejemplos sencillos; en los que podamos por simple inspección concluir y tener una idea del concepto de límite.

Ejemplo 1

Veamos como se comporta la función f con regla de correspondencia $f(x)=2x+1$ en la cercanía de $x=2$.

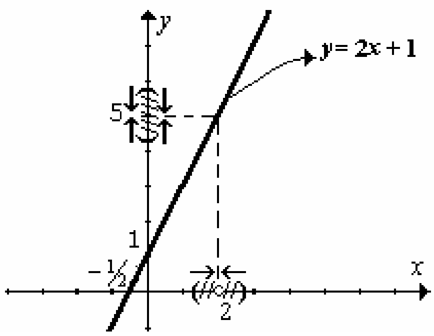
Evaluando la función para algunos valores de x, próximos (acercándose) a 2 :

x	$y=2x+1$
1.90	4.80
1.95	4.90
1.99	4.98
$\cdots$	$\cdots$
2.01	5.02
2.05	5.10
2.10	5.20

En la tabla de valores se han ubicado unas flechas para dar a entender que tomamos a la x aproximándose a 2 en ambas direcciones y se observa que los valores de y se van acercando a 5. Aunque son sólo seis valores, por ahora sin ponernos exigentes vamos a concluir diciendo que la función se aproxima a 5 cada vez que su variable independiente x se aproxima a 2. Este comportamiento lo escribiremos de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 2}(2x+1)=5$$

Lo anterior se puede ilustrar desde la gráfica:



Ejemplo 2

Ahora veamos el comportamiento de esta otra función f con regla de correspondencia $f(x)=\frac{x^2+5x-6}{x-1}$, en la cercanía de $x=1$.

Evaluando la función para ciertos valores de x, cada vez más próximos a 1, tenemos:

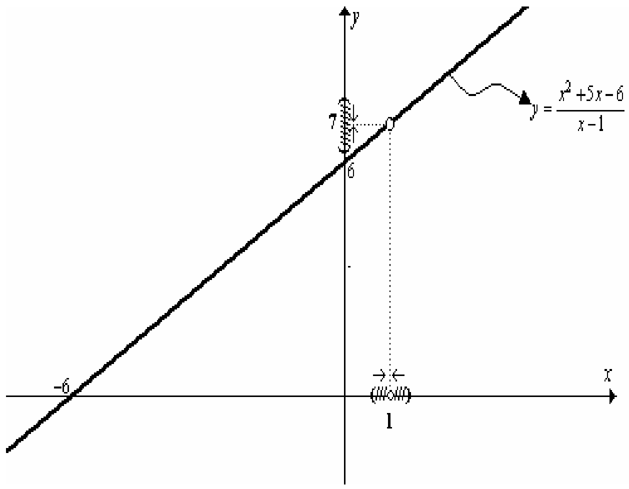
x	$y=\frac{x^2+5x-6}{x-1}$
0.90	6.90
0.95	6.95
0.99	6.99
$\cdots$	$\cdots$
1.01	7.01
1.05	7.05
1.10	7.10

Parece ser que esta función se aproxima a tomar el valor de 7 cada vez que la variable independiente x se aproxima a tomar el valor de 1, es decir $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x-1}=7$.

Note que no es necesario que la función esté definida en el punto de aproximación.

Por otro lado, la regla de correspondencia $f(x)=\frac{x^2+5x-6}{x-1}$ es equivalente a $f(x)=x+6 \quad ; x\neq 1$ (¿POR QUÉ?).

Este comportamiento se lo puede visualizar desde su gráfica:



De lo expuesto en los dos ejemplos anteriores, sin ser tan riguroso todavía, podemos emitir la siguiente definición:

> Una función f tiene límite L en un punto x_0, si f se aproxima a tomar el valor L cada vez que su variable independiente x se aproxima a tomar el valor x_0. Lo que se denota como: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

Para los dos ejemplos anteriores el comportamiento de las funciones se puede determinar analizando sus gráficas; pero esto podría ser no tan sencillo; es más, suponga que se necesite bosquejar la gráfica teniendo características de su comportamiento. De ahí la necesidad del estudio de límite de funciones.

1.1.2 DEFINICIÓN FORMAL

Suponga que se plantea el problema de **demostrar** que $\lim\limits_{x \to 2} 2x + 1 = 5$ o que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 7$. Para esto, debemos garantizar formalmente el acercamiento que tiene la función a su correspondiente valor cada vez que su variable independiente se aproxime al valor especificado. Ya la tabla de valores no nos sirve, el hecho que se cumpla para algunos valores no indica que se cumpla para todos los valores próximos al punto. La demostración consistirá en escribir matemáticamente, lenguaje formal, la metodología del proceso, lo cual nos lleva a la necesidad de tener una definición formal de límite y no sólo para estos dos ejemplos, sino para cualquier función.

Antes, de llegar a la definición requerida, precisemos lo siguiente:

PRIMERO, para un lenguaje formal, decir que x toma valores próximos a un punto x_0 (que x está en torno a x_0), bastará con considerarla perteneciente a un intervalo o vecindad, centrado en x_0, de semiamplitud muy pequeña, la cual denotaremos con la letra griega ∂ (delta). Es decir:

$$x_0 - \partial < x < x_0 + \partial$$

Transformando la expresión anterior tenemos:

$$\begin{array}{ll}
x_0 - \partial < x < x_0 + \partial & \\
x_0 - \partial - x_0 < x - x_0 < x_0 + \partial - x_0 & \longleftarrow \text{Restando } "x_0" \\
-\delta < x - x_0 < \delta & \\
|x - x_0| < \delta & \longleftarrow \text{Empleando la definición de valor absoluto}
\end{array}$$

Y, para que x no sea x_0, bastará con proponer que $0<\left|x-x_0\right|<\partial$ ¿POR QUÉ?.

SEGUNDO, para decir que f está próxima a L (en torno a L), podemos expresar que pertenece a un intervalo o vecindad, centrado en L de semiamplitud muy pequeña, la cual denotaremos con la letra griega ε (épsilon). Es decir:

$$L-\varepsilon<f\left(x\right)<L+\varepsilon$$

Transformando la expresión anterior tenemos:

$$\begin{array}{ll} L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon & \\ -\varepsilon<f(x)-L<+\varepsilon & \longleftarrow \text{Restando "}L\text{"} \\ \left|f(x)-L\right|<\varepsilon & \longleftarrow \text{Aplicando la definición de valor absoluto} \end{array}$$

Con todo lo anterior, definimos formalmente límite de una función en un punto, de la siguiente manera:

Sea f una función de variable real y sean ε y ∂ cantidades positivas muy pequeñas.

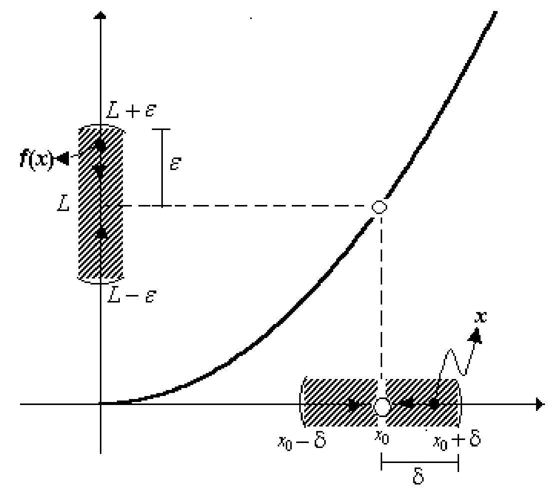
Suponga que f se aproxima a L cuando x se aproxima a x_0, denotado por $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, significa que para toda proximidad ε que se desee estar con f en torno a L, deberá poderse definir un intervalo en torno a x_0 en el cual tomar x, sin que necesariamente $x=x_0$, que nos garantice el acercamiento.

Es decir:

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=L\right)\equiv\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \; tal\ que\ 0<\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$$

La definición indica que para asegurar que una función tiene límite deberíamos establecer una relación entre ∂ y ε.

Una manera de interpretar gráficamente lo mencionado es:



Con esta definición, ya podemos realizar demostraciones formales.

Ejemplo 1

Demostrar formalmente que $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$.

SOLUCIÓN:

Cuando hicimos la tabla de valores, sólo para seis valores percibimos que el límite de esta función era 5, se trata ahora de demostrarlo. Debemos garantizar que cuando reemplacemos la x por cualquier número cercano a 2 el valor de y correspondiente es un números cercano a 5, y mientras la x esté más cerca de 2 la y estará más cerca de 5; esto quiere decir que la diferencia entre los valores que resultan en $2x+1$ con 5 deberán ser cantidades muy pequeñas, menores que cualquiera tolerancia ε que nos fijemos.

Es decir, que debemos poder estar tan cerca de 5 con $y=2x+1$, tanto como nos propusiéramos estar (para todo ε). Si esto es posible deberá poderse definir el correspondiente intervalo (existe ∂) en el cual tomar x que garantice aquello, es decir:

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \;\; tal\ que \quad 0<|x-2|<\delta \quad \Rightarrow \quad |(2x+1)-5|<\varepsilon$$

En la implicación, vamos a transformar el antecedente hasta llevarlo a la forma del consecuente. Observe el consecuente, su forma algebraica nos guiará en el procedimiento a seguir:

$0<\|x-2\|<\delta$	
$0<2\|x-2\|<2\delta$	← Multiplicando por 2 (porque en el consecuente aparece $2x$)
$0<\|2\|\|x-2\|<2\delta$	
$0<\|2(x-2)\|<2\delta$	← Propiedades del valor absoluto
$0<\|2x-4\|<2\delta$	
$0<\|2x-4+5-5\|<2\delta$	← Sumando y restando 5 (debido a que aparece -5 en el consecuente)
$0<\|(2x+1)-5\|<2\delta$	← Agrupando

Ahora, podemos decidir que $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$; es decir, que si tomamos $2-\frac{\varepsilon}{2}<x<2+\frac{\varepsilon}{2}$ nos permite asegurar lo propuesto.

Suponga que $\varepsilon=0.1$; es decir, si quisiéramos que $y=2x+1$ esté a menos de 0.1 de 5, será posible si tomamos a la que x , en torno a 2 a una distancia no mayor de $\delta=\dfrac{0.1}{2}=0.05$. Es decir para que f esté entre 4.9 y 5.1 bastará con tomar a la x un número entre 1.95 y 2.05.

No olvide que proponer una relación entre ε y ∂, garantiza que f estará tan cerca de L, como se quiera estar. Veamos, más cerca $\varepsilon = 0.01$, bastará con tomar a la x a no menos de $\delta = \frac{0.01}{2} = 0.005$ de 2. Es decir que si tomamos $1.995 < x < 2.005$ garantiza que $4.99 < f(x) < 5.01$.

Ejemplo 2

Demostrar formalmente que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 7$.

SOLUCIÓN:

Debemos asegurar que $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$ se aproxima a tomar el valor de 7 cada vez que la x esté próxima de 1. Es decir, que debemos poder estar tan cerca de 7 con $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$, tanto como nos propusiéramos estar (para todo ε). Si esto es posible deberá poderse definir el correspondiente intervalo (existe ∂) en el cual tomar x que garantice aquello, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ tal\ que \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} - 7 \right| < \varepsilon$$

Vamos a transformar el antecedente hasta llevarlo a la forma del consecuente. La forma algebraica del consecuente nos guiará:

$$\begin{array}{l} 0 < |x - 1| < \delta \\ 0 < |x - 1 + 7 - 7| < \delta \\ 0 < |(x + 6) - 7| < \delta \\ \left| \frac{(x + 6)(x - 1)}{x - 1} - 7 \right| < \partial \\ \left| \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} - 7 \right| < \partial \end{array}$$

Se suma y resta 7 (debido a que aparece -7 en el consecuente)

Agrupando $(x + 6)$ y dividiéndolo y multiplicándolo por $(x - 1)$ (debido a que el primer término del consecuente aparece dividido por $(x - 1)$)

Con $\delta = \varepsilon$, nos permite asegurar lo propuesto; es decir, tomando $1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$

Ejemplo 3

Demostrar formalmente que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

SOLUCION:

Debemos garantizar que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ tal\ que \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 - 4| < \varepsilon$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{l} 0 < |x - 2| < \delta \\ 0 < |x - 2||x + 2| < \delta |x + 2| \\ 0 < |(x - 2)(x + 2)| < \delta |x + 2| \\ 0 < |x^2 - 4| < \delta |x + 2| \end{array}$$

Multiplicando por $|x + 2|$ (debido a que el consecuente tiene una diferencia de cuadrados perfectos)

Propiedades del valor absoluto

Tomamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|x+2|}$. Pero ahora existe un inconveniente, la relación es función de x. Esto lo podemos salvar acotando a x. Suponga que a la x se la toma a una distancia no mayor de 1, en torno a 2, entonces $1 \leq x \leq 3$, que si tuviéramos que escoger un valor para x, el idóneo sería 3, para que satisfaga el hecho de que δ debe ser una cantidad pequeña.

Por tanto, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|3+2|} = \dfrac{\varepsilon}{5}$; es decir, tomar $2 - \dfrac{\varepsilon}{5} < x < 2 + \dfrac{\varepsilon}{5}$ asegura lo que se quiere demostrar.

Ejemplo 4

Demostrar formalmente que $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$.

SOLUCION:

Debemos garantizar que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ tal\ que \quad 0 < |x-4| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{x} - 2\right| < \varepsilon$

entonces:

$$\boxed{\begin{aligned}
&0 < |x-4| < \delta \\
&0 < \left|\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\right| < \delta && \longleftarrow \text{Factorizando } |x-4| \text{ para diferencia de cuadrados} \\
&0 < \left|\left(\sqrt{x}-2\right)\right|\left|\sqrt{x}+2\right| < \delta && \longleftarrow \text{Propiedades del valor absoluto} \\
&0 < \left|\sqrt{x}-2\right| < \frac{\delta}{\left|\sqrt{x}+2\right|} && \longleftarrow \text{Despejando}
\end{aligned}}$$

Tomamos $\delta = \varepsilon\left(\left|\sqrt{x}+2\right|\right)$. Ahora bien, si tomamos a x a una distancia no mayor de 1, entorno a 4, entonces $3 \leq x \leq 5$, un valor idóneo sería 3. ¿Por qué?.

Por lo tanto, $\delta = \varepsilon\left(\sqrt{3}+2\right)$; es decir, si tomamos $4 - \varepsilon\left(\sqrt{3}+2\right) < x < 4 + \varepsilon\left(\sqrt{3}+2\right)$ aseguramos lo que se quiere demostrar.

Ejemplo 5

Demostrar formalmente que $\lim\limits_{x \to 27} \sqrt[3]{x} = 3$.

SOLUCION:

Debemos garantizar que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ tal\ que \quad 0 < |x-27| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt[3]{x} - 3\right| < \varepsilon$

Entonces:

$$\boxed{\begin{aligned}
&0 < |x-27| < \delta \\
&0 < \left|\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{27}\right)\ \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{27} + \left(\sqrt[3]{27}\right)^2\right)\right| < \delta && \longleftarrow \text{Factorizando } |x-27| \text{ para diferencia de cubos} \\
&0 < \left|\left(\sqrt[3]{x}-3\right)\right|\ \left|\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 3\sqrt[3]{x} + 9\right)\right| < \delta && \longleftarrow \text{Propiedades del valor absoluto} \\
&0 < \left|\left(\sqrt[3]{x}-3\right)\right| < \frac{\delta}{\left|\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 3\sqrt[3]{x} + 9\right)\right|} && \longleftarrow \text{Despejando}
\end{aligned}}$$

Tomamos $\delta = \varepsilon\left(\left|\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 3\sqrt[3]{x} + 9\right)\right|\right)$. Ahora bien, si tomamos a x a una distancia no mayor de 1, entorno a 27, entonces $26 \leq x \leq 28$, un valor idóneo sería 26.

Por lo tanto, $\delta = \varepsilon\left(\left|\left(\left(\sqrt[3]{26}\right)^2 + 3\sqrt[3]{26} + 9\right)\right|\right)$ o $\delta \approx 27\,\varepsilon$; es decir,

si tomamos $27 - \varepsilon\left(\left|\left(\left(\sqrt[3]{26}\right)^2 + 3\sqrt[3]{26} + 9\right)\right|\right) < x < 27 + \varepsilon\left(\left|\left(\left(\sqrt[3]{26}\right)^2 + 3\sqrt[3]{26} + 9\right)\right|\right)$ o

$27 - 27\varepsilon < x < 27 + 27\varepsilon$ aseguramos lo que se quiere demostrar.

Ejemplo 5

Demostrar formalmente que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$.

SOLUCION:

Debemos garantizar que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ tal\ que \quad 0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$

La expresión algebraica del consecuente tiene una apariencia un tanto compleja, por tanto en este caso es mejor empezar analizando el consecuente, para tener referencia de los pasos a seguir para luego transformar el antecedente.

$$\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$ ⟵ Factorizando el denominador $(x-1)$ para diferencia de cuadrados

$$\left|\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$ ⟵ Simplificando $\left(\sqrt{x}-1\right)$

$$\left|\frac{2-\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right| < \varepsilon$$ ⟵ Restando

$$\left|\frac{2-\sqrt{x}-1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right| < \varepsilon$$ ⟵ Destruyendo paréntesis

$$\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right| < \varepsilon$$ ⟵ Resolviendo la resta del 2 con el 1

$$\left|\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right| < \varepsilon$$ ⟵ Multiplicando y dividiendo por $\left(1+\sqrt{x}\right)$

$$\left|\frac{1-x}{2\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\right| < \varepsilon$$ ⟵ Producto notable

$$\frac{|1-x|}{\left|2\left(\sqrt{x}+1\right)^2\right|} < \varepsilon$$ ⟵ Aplicando propiedades del valor absoluto

$$|1-x| < \varepsilon\left[2\left(\sqrt{x}+1\right)^2\right]$$ ⟵ Despejando

Ahora para transformar el antecedente, se sigue una secuencia como la anterior pero desde el final:

$$0<|x-1|<\delta$$
$$0<|1-x|<\delta \quad \longleftarrow \text{Propiedad del valor absoluto}$$
$$0<\left|\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\right|<\delta \quad \longleftarrow \text{Factorizando para diferencia de cuadrados}$$
$$0<\left|1-\sqrt{x}\right|<\frac{\delta}{\left|1+\sqrt{x}\right|} \quad \longleftarrow \text{Despejando}$$
$$0<\frac{\left|1-\sqrt{x}\right|}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}<\frac{\delta}{2\left|1+\sqrt{x}\right|\left(1+\sqrt{x}\right)} \quad \longleftarrow \text{Dividiendo todos los términos entre } 2\left(1+\sqrt{x}\right)$$
$$0<\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|<\frac{\delta}{2\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$
$$0<\left|\frac{2-\sqrt{x}-1}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|<\frac{\delta}{2\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \quad \longleftarrow \text{Transformando el 1 en 2 - 1}$$
$$0<\left|\frac{2-\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|<\frac{\delta}{2\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \quad \longleftarrow \text{Agrupando}$$
$$0<\left|\frac{2}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}-\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|<\frac{\delta}{2\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \quad \longleftarrow \text{Separando en dos términos}$$
$$0<\left|\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)}-\frac{1}{2}\right|<\frac{\delta}{2\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \quad \longleftarrow \text{Simplificando}$$
$$0<\left|\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{1}{2}\right|<\frac{\delta}{2\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \quad \longleftarrow \text{Multiplicando por la conjugada}$$
$$0<\left|\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{\delta}{2\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

Tomamos $\delta=\varepsilon\left(2\left(1+\sqrt{x}\right)^2\right)$. Ahora bien, si tomamos a x a una distancia no mayor de 1, entorno a 1, entonces $0\le x\le 2$, un valor idóneo sería 0. Reemplazando tenemos $\delta=\varepsilon\left(2\left(1+\sqrt{0}\right)^2\right)=\varepsilon(2)$

Por lo tanto, $\delta=2\varepsilon$; es decir, si tomamos $1-2\varepsilon< x< 1+2\varepsilon$ aseguramos lo que se quiere demostrar.

Ejemplo 6

Demostrar formalmente que $\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=4$.

SOLUCION:

Debemos garantizar que $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \ \ tal\ que \ \ 0<|x-4|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}-4\right|<\varepsilon$

Igual que en el ejemplo anterior primero vamos a analizar el consecuente:

$\left\vert \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}-4 \right\vert < \varepsilon$	
$\left\vert \dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}-2}-4 \right\vert < \varepsilon$	Factorizando el numerador $(x-4)$ para diferencia de cuadrados
$\left\vert \left(\sqrt{x}+2\right)-4 \right\vert < \varepsilon$	Simplificando $\left(\sqrt{x}-2\right)$
$\left\vert \sqrt{x}-2 \right\vert < \varepsilon$	Restando
$\left\vert \dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)} \right\vert < \varepsilon$	Multiplicando y dividiendo por $\left(\sqrt{x}+2\right)$
$\left\vert \dfrac{x-4}{\left(\sqrt{x}+2\right)} \right\vert < \varepsilon$	Realizando el Producto Notable
$\dfrac{\left\vert x-4 \right\vert}{\left\vert \sqrt{x}+2 \right\vert} < \varepsilon$	Aplicando propiedades del valor absoluto
$\left\vert x-4 \right\vert < \varepsilon \left\vert \sqrt{x}+2 \right\vert$	Despejando

Ahora para transformar el antecedente, se sigue una secuencia como la anterior pero desde el final:

$0 < \left\vert x-4 \right\vert < \delta$	
$0 < \left\vert \dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2} \right\vert < \dfrac{\delta}{\left\vert \sqrt{x}+2 \right\vert}$	Dividiendo todos los términos entre $\left(\sqrt{x}+2\right)$
$0 < \left\vert \dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)} \right\vert < \dfrac{\delta}{\left\vert \sqrt{x}+2 \right\vert}$	Factorizando $(x-4)$ para diferencia de cuadrados
$0 < \left\vert \sqrt{x}-2 \right\vert < \dfrac{\delta}{\left\vert \sqrt{x}+2 \right\vert}$	Simplificando $\left(\sqrt{x}+2\right)$
$0 < \left\vert \sqrt{x}-2+4-4 \right\vert < \dfrac{\delta}{\left\vert \sqrt{x}+2 \right\vert}$	Sumando y restando 4
$0 < \left\vert \left(\sqrt{x}+2\right)-4 \right\vert < \dfrac{\delta}{\left\vert \sqrt{x}+2 \right\vert}$	Agrupando
$0 < \left\vert \dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)}-4 \right\vert < \dfrac{\delta}{\left\vert \sqrt{x}+2 \right\vert}$	Multiplicando y dividiendo $\left(\sqrt{x}-2\right)$
$0 < \left\vert \dfrac{x-4}{\left(\sqrt{x}-2\right)}-4 \right\vert < \dfrac{\delta}{\left\vert \sqrt{x}+2 \right\vert}$	Realizando el Producto Notable

Tomamos $\delta = \varepsilon\left(\sqrt{x}+2\right)$. Ahora bien, si tomamos a x a una distancia no mayor de 1, entorno a 4, entonces $3 \leq x \leq 5$, un valor idóneo sería 3.

Por lo tanto, $\delta = \varepsilon\left(\sqrt{3}+2\right)$; es decir, si tomamos $4-\varepsilon\left(\sqrt{3}+2\right) < x < 4+\varepsilon\left(\sqrt{3}+2\right)$ aseguramos lo que se quiere demostrar.

Podría no ser tan sencillo encontrar un ∂ en función de ε, eso no significa que el límite no existe, todo depende de la regla de correspondencia de la función.

Ejercicios Propuestos 1.1

1. Demostrar formalmente utilizando la definición de límite:

a) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$	e) $\lim_{x\to 2}\sqrt{2x}=2$
b) $\lim_{x\to 2}(2x-5)=-1$	f) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$
c) $\lim_{x\to -6}\dfrac{x^2+5x-6}{x+6}=-7$	g) $\lim_{x\to 8}\sqrt[3]{x}=2$
d) $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^3+3x^2-2x-3}{x^2-1}=5$	h) $\lim_{x\to a}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}$

2. Determine un número " ∂ " para el valor de " ε " dado, tal que se establezca el límite de la función:

a) $\lim_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{3x-1}=2$, $\varepsilon=0.01$	c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}=2,\quad \varepsilon=0.08$
b) $\lim_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x^2-a^2}=2a^2$, $\varepsilon=10^{-8}$	

3. Sea $f:\Re^+\to\Re$ tal que $f(x)=\sqrt{x}$ encuentre un valor de " ∂ " para que $2.99<f(x)<3.01$ siempre que $0<|x-9|<\partial$

4. Sea $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Establezca un intervalo en el cual tomar " x " para que $f(x)$ esté a menos de 0.1 de 1

1.1.3 TEOREMA DE UNICIDAD DE LÍMITE.

> Sea f una función de una variable real. Si f tiene límite en $x=x_0$, entonces este es único. Es decir, si $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$ y $\lim_{x\to x_0}f(x)=M$ entonces $L=M$.

Demostración:

Por CONTRADICCIÓN. Supongamos que efectivamente f tiene dos límites L y M , entonces tenemos dos hipótesis:

$$H_1:\ \lim_{x\to x_0}f(x)=L\ \equiv\ \forall\varepsilon_1>0,\exists\delta_1>0\ tal\ que\ 0<|x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon_1$$

$$H_2:\ \lim_{x\to x_0}f(x)=M\ \equiv\ \forall\varepsilon_2>0,\exists\delta_2>0\ tal\ que\ 0<|x-x_0|<\delta_2\Rightarrow|f(x)-M|<\varepsilon_2$$

Como se dice para todo ε_1 y para todo ε_2 entonces supongamos que $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$.

Tomemos $\partial=min\{\partial_1,\partial_2\}$ para estar con x , en la vecindad de x_0 .

Simultáneamente tenemos: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ talque } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - L| < \varepsilon \\ |f(x) - M| < \varepsilon \end{cases}$

lo cual quiere decir también que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ talque } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| + \underbrace{|f(x) - M|}_{|M - f(x)|} < 2\varepsilon$$

Por la desigualdad triangular $|a + b| \le |a| + |b|$, tenemos: $\left|\underbrace{f(x) - L}_{a} + \underbrace{M - f(x)}_{b}\right| \le \left|\underbrace{f(x) - L}_{a}\right| + \left|\underbrace{M - f(x)}_{b}\right|$

entonces como $|M - L| \le |f(x) - L| + |M - f(x)| < 2\varepsilon$ podemos decir que $|M - L| < 2\varepsilon$

Ahora bien, suponiendo que $\varepsilon = \frac{1}{2}|M - L|$ se produce una contradicción porque tendríamos $|M - L| < 2\left(\frac{1}{2}|M - L|\right)$ lo cual no es verdad. Por lo tanto, se concluye que $L = M$. L.Q.Q.D

Ejemplo (una función que no tiene límite en un punto)

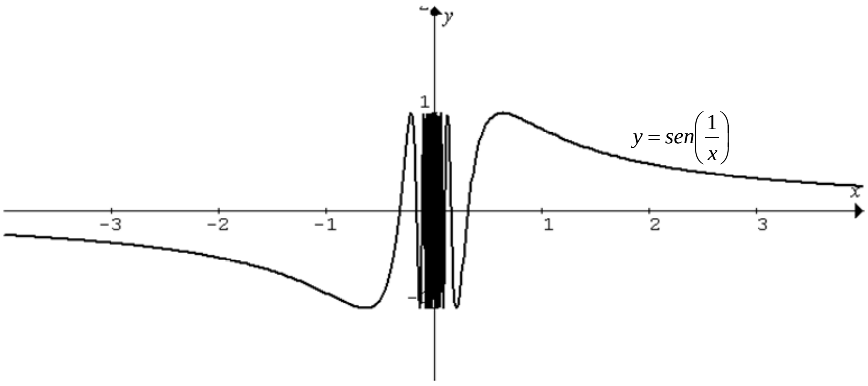
Sea $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

Analicemos su comportamiento en la vecindad de "0"

x	$y = sen\left(\frac{1}{x}\right)$
$-\frac{2}{\pi}$	-1
$-\frac{1}{\pi}$	0
$-\frac{2}{3\pi}$	1
$\updownarrow$	$\updownarrow$
$\frac{2}{3\pi}$	-1
$\frac{1}{\pi}$	0
$\frac{2}{\pi}$	1

Se observa que la función en la vecindad de "0" tiene un comportamiento un tanto singular, sus valores son alternantes. Por tanto, se concluye que esta función no tiene límite en cero.

Veamos su gráfica.



1.2 LÍMITES LATERALES

Existen funciones que por la derecha de un punto tienen un comportamiento y por la izquierda del punto tienen otro comportamiento. Esto ocurre frecuentemente en funciones que tienen regla de correspondencia definida en intervalos y que su gráfica presenta un salto en un punto. Para expresar formalmente este comportamiento se hace necesario definir límites en un punto por una sola dirección.

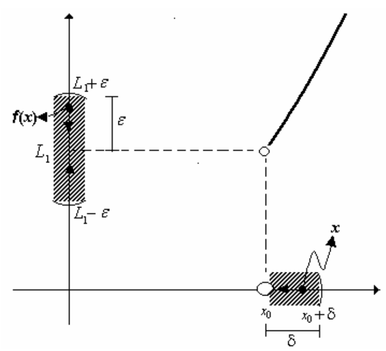
1.2.1 LÍMITE POR DERECHA

Cuando x se aproxima a tomar el valor de x_0, pero sólo por su derecha $(x_0 < x < x_0 + \partial)$, f se aproxima a tomar el valor de L_1; significa que f puede estar tan cerca de L_1, tanto como se pretenda ($\forall \varepsilon$), para lo cual deberá existir el correspondiente ∂, que indica el intervalo en el cual tomar x que nos garantice aquello. Es decir:

$$\left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1\right) \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists \partial\ tal\ que\ 0 < x - x_0 < \partial \Rightarrow \left|f(x) - L_1\right| < \varepsilon$$

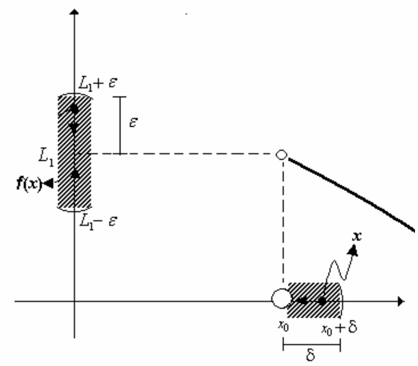
Ejemplo 1

Una función creciente en (x_0, ∞)



Ejemplo 2

Una función decreciente en (x_0, ∞)



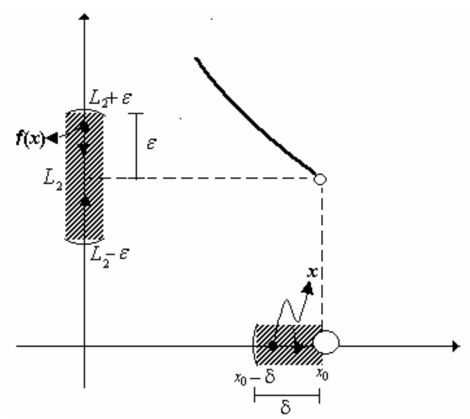
1.2.2 LÍMITE POR IZQUIERDA.

Cuando x se aproxima a tomar el valor de x_0, pero sólo por su izquierda $(x_0 - \partial < x < x_0)$, f se aproxima a tomar el valor de L_2; significa que f puede estar tan cerca de L_2, tanto como se pretenda ($\forall \varepsilon$), para lo cual deberá existir el correspondiente ∂, que indica el intervalo en el cual tomar x que nos garantice aquello. Es decir:

$$\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_2\right) \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists \partial \; tal \; que \; 0 < x_0 - x < \partial \Rightarrow \left| f(x) - L_2 \right| < \varepsilon$$

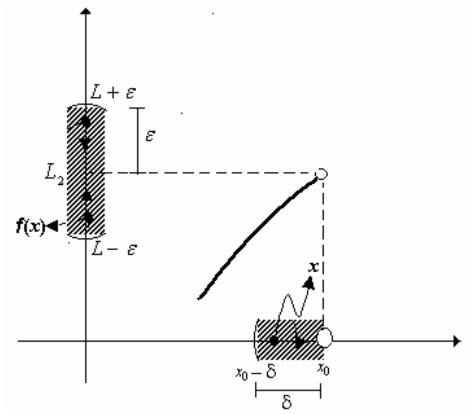
Ejemplo 1

Una función decreciente en $(-\infty, x_0)$



Ejemplo 2

Una función creciente en $(-\infty, x_0)$



Note que lo que se ha hecho es no otra cosa que separar la definición de límite en un punto que fue dada al comienzo.

De las definiciones anteriores y por el Teorema de Unicidad de Límite surge el siguiente teorema.

1.2.3 TEOREMA DE EXISTENCIA DE LÍMITE

> Si f es una función con límite en x_0 entonces se cumple que tanto por izquierda como por derecha f tiende a tomar el mismo valor. Es decir:
>
> $$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = L\right) \equiv \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \wedge \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

Si se da que $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, se dice que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **no existe**.

Ejemplo 1

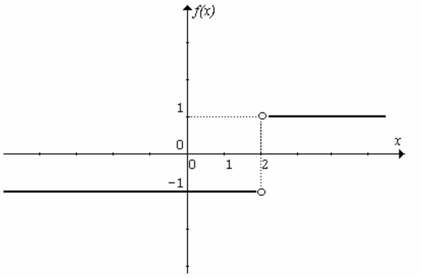
Sea $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$. Hallar $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$:

SOLUCIÓN:

Expresando la regla de correspondencia sin valor absoluto, resulta:

$$f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-2} & ; \quad x>2\\ \dfrac{-(x-2)}{x-2} & ; \quad x<2\end{cases}=\begin{cases}1 & ; \quad x>2\\ -1 & ; \quad x<2\end{cases}$$

Esto quiere decir que su gráfica es:



De la gráfica observamos que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-1$; entonces se concluye que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\ no\ existe$.

Ejemplo 2

Demostrar formalmente que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6$ si $f(x)=\begin{cases}2x & ,x>3\\ 4 & ,x=3\\ 3x-3 & ,x<3\end{cases}$

SOLUCIÓN:
Note que la función tiene regla de correspondencia con una definición a la derecha de 3 y otra diferente a la izquierda de 3, entonces es necesario demostrar que $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6$ y que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=6$.

PRIMERO, $\left(\lim\limits_{x\to 3^+} 2x=6\right)\equiv \forall\varepsilon>0, \exists\partial>0\ tal\ que \quad 0<x-3<\partial \Rightarrow |2x-6|<\varepsilon$

$$0<x-3<\partial$$
$$0<2(x-3)<2\partial$$
$$0<2x-6<2\partial$$

Si $\partial=\dfrac{\varepsilon}{2}$; es decir, tomando $3<x<3+\dfrac{\varepsilon}{2}$ garantizamos la afirmación que $\lim\limits_{x\to 3^+} 2x=6$.

SEGUNDO,

$\left(\lim\limits_{x\to 3^-}(3x-3)=6\right)\equiv \forall\varepsilon>0, \exists\partial>0\ tal\ que \quad 0<3-x<\partial \Rightarrow |(3x-3)-6|<\varepsilon$

$$0<3-x<\partial$$
$$0<3(3-x)<3\partial$$
$$0<9-3x<3\partial$$
$$0<6+3-3x<3\partial$$
$$0<-(3x-3)+6<3\partial$$
$$0<-[(3x-3)-6]<3\partial$$

Si $\partial=\dfrac{\varepsilon}{3}$; es decir, tomando $3-\dfrac{\varepsilon}{3}<x<3$ garantizamos que $\lim\limits_{x\to 3^-}(3x-3)=6$.

Ejemplo 3

Demostrar formalmente que $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe, si $f(x)=\begin{cases} x-1 & ,x\geq 2 \\ x+1 & ,x<2 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

La función tiene regla de correspondencia con una definición a la derecha de 2 y otra diferente a la izquierda de 2, entonces es necesario demostrar que ambas definiciones convergen a distintos valores, es decir: $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$.

Note que, $\lim_{x\to 2^+}(x-1)=1$ y que $\lim_{x\to 2^-}(x+1)=3$

PRIMERO,

$$\left(\lim_{x\to 2^+}(x-1)=1\right) \equiv \forall \varepsilon>0, \exists \partial>0 \; tal \; que \quad 0<x-2<\partial \Rightarrow \left|(x-1)-1\right|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned} &0<x-2<\partial \\ &0<x-1-1<\partial \\ &0<(x-1)-1<\partial \end{aligned}$$

Si $\partial=\varepsilon$; es decir, tomando $2<x<2+\varepsilon$ garantizamos que $\lim_{x\to 2^+}(x-1)=1$.

SEGUNDO,

$$\left(\lim_{x\to 2^-}(x+1)=3\right) \equiv \forall \varepsilon>0, \exists \partial>0 \; tal \; que \quad 0<2-x<\partial \Rightarrow \left|(x+1)-3\right|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned} &0<2-x<\partial \\ &0<3-1-x<\partial \\ &0<3-(1+x)<\partial \\ &0<-\left[(x+1)-3\right]<\partial \end{aligned}$$

Si $\partial=\varepsilon$; es decir, tomando $2-\varepsilon<x<2$ garantizamos que $\lim_{x\to 2^-}(x+1)=3$.

Por lo tanto, al demostrar que f converge a distintos valores en la vecindad de 2, estamos demostrando que $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe

Ejemplo 4

Demostrar formalmente que $\lim_{x\to 2^+}\left(2x-[\![x]\!]\right)=2$

SOLUCIÓN:

$$\left(\lim_{x\to 2^+}\left(2x-[\![x]\!]\right)=2\right) \equiv \forall \varepsilon>0, \exists \partial>0 \; tal \; que \quad 0<x-2<\partial \Rightarrow \left|\left(2x-[\![x]\!]\right)-2\right|<\varepsilon$$

No olvide que a la derecha de 2 el entero mayor de x es igual a 2, es decir $[\![x]\!]=2$.

Transformando el antecedente:

$$\begin{aligned} (0<x-2<\partial) &\equiv 0<2x-4<2\partial \\ &\equiv 0<2x-4+2-2<2\partial \\ &\equiv 0<2x-2-2<2\partial \\ &\equiv 0<\left(2x-[\![2]\!]\right)-2<2\partial \end{aligned}$$

Si $\partial=\frac{\varepsilon}{2}$; es decir, tomando $2<x<2+\frac{\varepsilon}{2}$ garantizamos que $\lim_{x\to 2^+}\left(2x-[\![x]\!]\right)=2$.

Ejercicios Propuestos 1.2

1. Demostrar formalmente utilizando la definición de límites laterales:

   a. $\lim\limits_{x\to 0^{+}} |x| = 0$

   b. $\lim\limits_{x\to 2^{-}} f(x) = -3$; si $f(x)=\begin{cases} 2x-7 & ,x\geq 2 \\ 5-4x & ,x<2 \end{cases}$

   c. $\lim\limits_{x\to 2^{-}} f(x) = 3$; si $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & ,x\geq 2 \\ x+1 & ,x<2 \end{cases}$

   d. $\lim\limits_{x\to 2^{-}} \left(2x-[\![x]\!]\right)=3$

   e. $\lim\limits_{x\to 3^{+}} \left(3x-[\![x]\!]\right)=6$

2. Demostrar formalmente que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe, si $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & ,x\geq 1 \\ x+2 & ,x<1 \end{cases}$

3. Trace la gráfica y determine, por inspección, el límite indicado si existe, si no existe justifique.

   a. $f(x)=\begin{cases} 2 & ,x<1 \\ -1 & ,x=1 \\ 3 & ,x>1 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

   b. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

   c. $f(x)=\begin{cases} 2x-7 & ,x\geq 2 \\ 5-4x & ,x<2 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

   d. $f(x)=x-[\![x]\!]$; $\lim\limits_{x\to 0^{-}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)$

   e. $f(x)=\begin{cases} x+[\![x]\!] & ,x\leq -1 \\ Sgn(x-3) & ,-1<x\leq 4 \\ \mu(x) & ,x>4 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{2}} f(x)$

4. Bosqueje la gráfica de una función que cumpla las condiciones siguientes:
   - $Dom\ f = R$
   - f es decreciente en $(-\infty,-3)\cup(0,2)$
   - f es creciente en $(-3,0)\cup(2,+\infty)$
   - $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0, \forall x\left[0<-3-x<\delta \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon\right]$
   - $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0, \forall x\left[0<x+3<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon\right]$
   - $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0, \forall x\left[0<|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)+1|<\varepsilon\right]$
   - $f(-3)=f(2)=0$ y $f(0)=5$

5. Bosqueje el gráfico de una función que cumpla las condiciones siguientes:
   - $Dom\ f = R$
   - f es creciente en $(-\infty,0)\cup(0,3)$
   - f decreciente en $(3,\infty)$
   - $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0, \forall x\left[0<-x<\delta \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon\right]$
   - $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0, \forall x\left[0<x<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon\right]$
   - $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0, \forall x\left[0<|x-3|<\delta \Rightarrow |f(x)-5|<\varepsilon\right]$
   - $f(-3)=f(3)=f(6)=0$ y $f(0)=2$

1.3 TEOREMAS SOBRE LÍMITES

1.3.1 TEOREMA PRINCIPAL SOBRE LÍMITE

Sean f y g funciones con límite en x_0; es decir, suponga que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Entonces:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} k=k$, $\forall k\in R$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=kL$, $\forall k\in R$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L+M$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L-M$
6. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=LM$
7. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{L}{M}$;siempre que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$
8. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n=L^n$, $\forall n\in N$
9. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}=\sqrt[n]{L}$

   siempre que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq 0$ cuando n es par.

Demostraciones

1. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} k=k\right)\equiv\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0/0<\left|x-x_0\right|<\partial\Rightarrow\left|k-k\right|<\varepsilon$

El consecuente de la implicación es verdadero porque $0<\varepsilon$. Por tanto, la proposición es siempre verdadera.

2. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0\right)\equiv\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0/0<\left|x-x_0\right|<\partial\Rightarrow\left|x-x_0\right|<\varepsilon$

Si $\partial=\varepsilon$ la proposición es verdadera siempre.

3. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} kf(x)=kL\right)\equiv \forall\varepsilon>0,\exists\partial>0/0<\left|x-x_0\right|<\partial\Rightarrow\left|kf(x)-kL\right|<\varepsilon$

Observe el consecuente, la expresión $\left|kf(x)-kL\right|<\varepsilon$ es equivalente a $\left|k\right|\left|\left(f(x)-L\right)\right|<\varepsilon$.

Por hipótesis, en la cercanía de x_0 , f se aproxima a L , por tanto kf se aproximará a kL .

4. Debemos demostrar que si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$ **entonces** $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M$

Asegurar que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ significa que:

$$\forall\varepsilon_1>0,\exists\partial_1>0\ tal\ que\ 0<\left|x-x_0\right|<\partial_1\Rightarrow\left|f(x)-L\right|<\varepsilon_1$$

Y asegurar que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$ significa que:

$$\forall\varepsilon_2>0,\exists\partial_2>0\ tal\ que\ 0<\left|x-x_0\right|<\partial_2\Rightarrow\left|g(x)-M\right|<\varepsilon_2$$

Lo cual quiere decir si tomamos $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\dfrac{\varepsilon}{2}$ y $\partial=min\{\partial_1,\partial_2\}$ tenemos:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0/0<\left|x-x_0\right|<\partial\Rightarrow\begin{cases}\left|f(x)-L\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}\\ \left|g(x)-M\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}\end{cases}$$

Sumando término a término la desigualdad resulta: $\left|f(x)-L\right|+\left|g(x)-M\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}$

Y por la desigualdad triangular $\left|\left(f(x)-L\right)+\left(g(x)-M\right)\right|\le\left|f(x)-L\right|+\left|g(x)-M\right|$

Por lo tanto $\left|\left(f(x)+g(x)\right)-\left(L+M\right)\right|<\varepsilon$

Finalmente, se observar que:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0/0<\left|x-x_0\right|<\partial\Rightarrow\left|\left(f(x)+g(x)\right)-\left(L+M\right)\right|<\varepsilon$$

lo que nos asegura que $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M$

El resto de las demostraciones se deja como ejercicio para el lector.

Observe que **el recíproco del teorema anterior es falso**.

Ejemplo

Suponga que se tiene $f(x)=\begin{cases}1 & ;x>0\\ 0 & ;x\le 0\end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases}0 & ;x\ge 0\\ 1 & ;x<0\end{cases}$

entonces $\left(f+g\right)(x)=\begin{cases}1 & ;x\ne 0\\ 0 & ;x=0\end{cases}$

Observe que: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe y que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ tampoco existe, sin embargo $\lim\limits_{x\to 0}\left(f+g\right)(x)=1$ (existe). Es decir, *" Si $\left(f+g\right)$ es una función con límite en un punto, entonces no podemos asegurar que f y g también tienen límite en ese punto"*

El teorema principal de límite permite establecer límites de ciertas funciones.

Ejemplo

Calcular $\lim_{x\to 2}\left(x^2+3x-2\right)$

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema principal de límites, tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(x^2+3x-2\right) &= \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 3x - \lim_{x\to 2} 2 \quad (\textit{inciso } 4 \ y \ 5)\\ &= \left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 + 3\lim_{x\to 2} x - 2 \quad (\textit{inciso } 8, 3 y \ 1)\\ &= 2^2 + 3(2) - 2\\ &= 8\end{aligned}$$

Lo último del ejemplo anterior permite concluir que con una sustitución basta.

1.3.2 TEOREMA DE SUSTITUCIÓN

> Sea f una función polinomial o una función racional, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ siempre que $f(x_0)$ esté definida y que el denominador no sea cero para el caso de una función racional.

De principio o de final, en el cálculo de límite, se empleará el teorema de sustitución.

Ejemplo

Calcular $\lim_{x\to 2}\left(x^2+3x-2\right)$

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema de sustitución, tenemos:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2+3x-2\right) = 2^2 + 3(2) - 2 = 8$$

Veamos el siguiente otro teorema, muy poco utilizado pero necesario en ciertas situaciones.

1.3.3 TEOREMA DEL EMPAREDADO

Sean f, g y h funciones tales que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x próxima a "x_0" con la posible excepción de "x_0". Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

DEMOSTRACIÓN.

Tenemos tres hipótesis:

$$H_1: \quad \left(\lim_{x \to x_0} g(x) = L\right) \equiv \forall \varepsilon_1 > 0, \exists \partial_1 > 0 / 0 < |x - x_0| < \partial_1 \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon_1$$

$$H_2: \quad \left(\lim_{x \to x_0} h(x) = L\right) \equiv \forall \varepsilon_2 > 0, \exists \partial_2 > 0 / 0 < |x - x_0| < \partial_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon_2$$

$$H_3: \quad \exists \partial_3 > 0 / 0 < |x - x_0| < \partial_3 \Rightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

Ahora, suponiendo que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ y tomando $\partial = min\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$, tenemos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0 / 0 < |x - x_0| < \partial \Rightarrow \begin{cases} |g(x) - L| < \varepsilon \\ |h(x) - L| < \varepsilon \\ g(x) \leq f(x) \leq h(x) \end{cases}$$

que quiere decir que: $\forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0 / 0 < |x - x_0| < \partial \Rightarrow \begin{cases} L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \\ L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \\ g(x) \leq f(x) \leq h(x) \end{cases}$

lo cual significa que: $L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$,

y de manera simplificada se podría decir que: $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

Por lo tanto $\forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0 / 0 < |x - x_0| < \partial \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$,

que no es otra cosa que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ L.Q.Q.D.

Ahora veamos ejercicios donde se emplea el teorema del emparedado

Ejemplo 1

Sea $1 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 1$ para toda x próxima a 0, excepto en 0. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

SOLUCIÓN:

Llamemos $g(x) = 1 - x^2$ y $h(x) = x^2 + 1$. Calculando límites tenemos:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \left(1 - x^2\right) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \left(x^2 + 1\right) = 1.$$

Y como $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en la vecindad de $x = 0$, por el teorema del emparedado se concluye que: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

O más simplemente: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x^2\right) \leq \lim\limits_{x\to 0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+1\right)$

$$1 \leq \lim_{x\to 0} f(x) \leq 1$$

por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

Ejemplo 2

Use el teorema del emparedado para demostrar que: $\lim\limits_{x\to 0}\left|x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0$

SOLUCIÓN:

No se puede aplicar la propiedad del producto de los límites debido a que $\lim\limits_{x\to 0}\left[\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ no existe.

También hacerlo en término de $\partial - \varepsilon$, sería dificilísimo, ¿Por qué? . Por tanto hay que recurrir a otro mecanismo.

La función $f(x) = \left|\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ es acotada, es decir que $0 \leq \left|\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$.

Al multiplicar por $|x|$ tenemos: $|x|0 \leq |x|\left|\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|1$;

luego tomando límite resulta $\lim\limits_{x\to 0} 0 \leq \lim\limits_{x\to 0}\left|x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \lim\limits_{x\to 0}|x|$, que equivale a $0 \leq \lim\limits_{x\to 0}\left|x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 0$

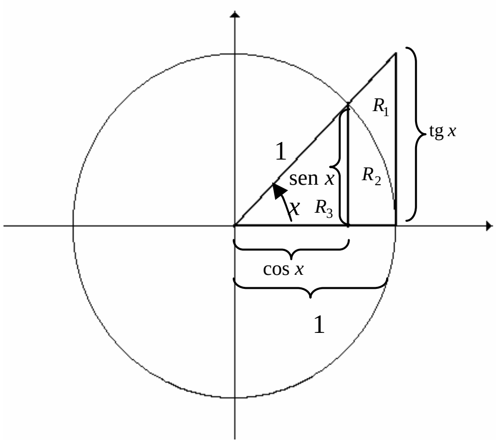
y llegamos a lo que queríamos, es decir: $\lim\limits_{x\to 0}\left|x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0$.

Ejemplo 3

Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Senx}{x}$

SOLUCIÓN:

Para emplear el teorema del emparedado, acotemos la función $f(x) = \frac{Senx}{x}$



Del gráfico tenemos que: $Area_{R_1} = \frac{(\text{tg}\,x)(1)}{2}$, $A_{R_2} = \frac{(1)^2(x)}{2}$, $A_{R_3} = \frac{(\cos x)(\text{sen}\,x)}{2}$

Observe que $A_{R_1} \geq A_{R_2} \geq A_{R_3}$, entonces $\frac{(\text{tg}\,x)(1)}{2} \geq \frac{(1)^2(x)}{2} \geq \frac{\cos x \,\text{sen}\,x}{2}$

PRIMERO: Si $x \to 0^+$. Multiplicando por 2 y dividiendo para $\text{sen}\,x$ resulta:

$$\frac{2(\text{tg}\,x)(1)}{2\,\text{sen}\,x} \geq \frac{2(x)}{2\,\text{sen}\,x} \geq \frac{2\cos x\,\text{sen}\,x}{2\,\text{sen}\,x}$$

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{x}{\text{sen}\,x} \geq \cos x$$

que es lo mismo que $\cos x \leq \frac{\text{sen}\,x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$

tomando límite $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x \leq \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}\,x}{x} \leq \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x}$

$$1 \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}\,x}{x} \leq 1 \qquad \text{entonces} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$$

SEGUNDO: En cambio, si $x \to 0^-$. Multiplicando por 2 y dividiendo para $\text{sen}\,x$ resulta:

$\frac{1}{\cos x} \leq \frac{x}{\text{sen}\,x} \leq \cos x$ (Se invierte el sentido de la desigualdad porque $\text{sen}\,x < 0$

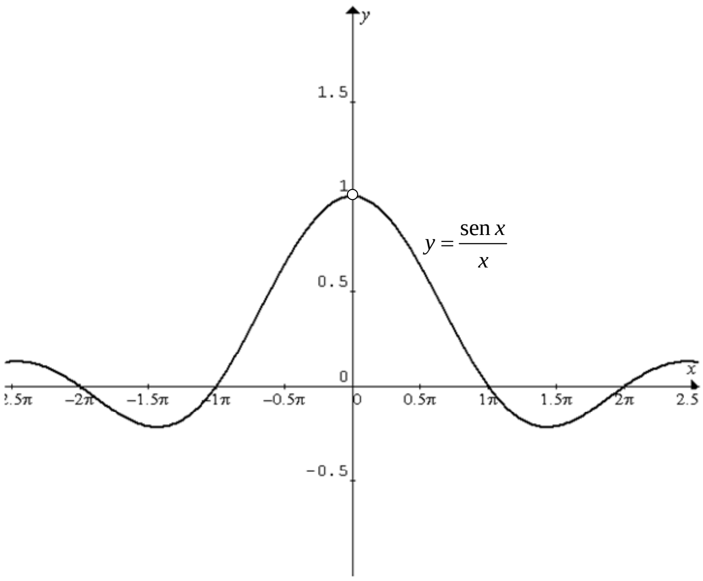
que es lo mismo que: $\cos x \leq \frac{\text{sen}\,x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$

tomando límite: $\lim\limits_{x\to 0^-} \cos x \leq \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}\,x}{x} \leq \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{\cos x}$

$$1 \leq \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}\,x}{x} \leq 1 \qquad \text{entonces} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$$

Finalmente $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

Observe la gráfica



Note que en su gráfica se observa la conclusión anterior.

Ejercicios Propuestos 1.3

1. Realice las demostraciones de los incisos 5, 6 y 7 del Teorema principal de límite.
2. Use el teorema del emparedado para demostrar que:

a. $\lim_{x\to 0} x^4 Sen^2 \frac{1}{x} = 0$

b. $\lim_{x\to 1^+}\left[(x-1)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right]=0$

3. Califique cada una de las siguientes proposiciones como VERDADERA O FALSA, en caso de ser verdadera demuéstrela y en caso de ser falsa dé un contraejemplo.

a. $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)=L \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-L\right)=0$

b. Si $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)$ existe, entonces también existen $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)$

c. Si $|g(x)+5|\le 3(4-x)^2$, entonces $\lim_{x\to 4} g(x)=-5$

d. Si $f(x_0)$ no está definida, entonces el $\lim_{x\to x_0} f(x)$ no existe

e. Si $f(x_0)$ existe, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe

f. Suponga que *g* es una función tal que $\lim_{x\to 0} g(x)=0$. Si *f* es una función cualquiera, entonces $\lim_{x\to 0}(fg)(x)=0$

g. Si $f(x)\ne g(x)$ para toda *x* , entonces el $\lim_{x\to x_0} f(x)\ne \lim_{x\to x_0} g(x)$

1.4 CALCULO DE LÍMITES

En el cálculo de límites, la aplicación del teorema de sustitución puede bastar.

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x\to 1^+}\left(x-[\![x]\!]\right)$

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema de sustitución:

$\lim_{x\to 1^+}\left(x-[\![x]\!]\right)=1-[\![1^+]\!]=1-1=0$ (El entero mayor de números ligeramente mayores que 1 es igual a 1)

Ejemplo 2

Calcular $\lim_{x\to 1^-}\left(x-[\![x]\!]\right)$

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema de sustitución

$\lim_{x\to 1^-}\left(x-[\![x]\!]\right)=1-[\![1^-]\!]=1-0=1$ (El entero mayor de números ligeramente menores que 1 es igual a 0)

Ejemplo 3

Calcular $\lim_{x\to 1^-}\left(\llbracket 2x-1\rrbracket + Sgn(x-1)\right)$

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema principal de límites y el teorema de sustitución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\left(\llbracket 2x-1\rrbracket + Sng(x-1)\right) &= \lim_{x\to 1^-}\left(\llbracket 2x-1\rrbracket\right) + \lim_{x\to 1^-}\left(Sng(x-1)\right)\\ &= \llbracket 2(1^-)-1\rrbracket + sng\left(1^- -1\right)\\ &= \llbracket 1^-\rrbracket + sng\left(0^-\right)\\ &= 0-1\\ &= -1\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos 1.4

Calcular:

1. $\lim_{x\to 4^+}\left|\,|2x-6|-4\right|$
2. $\lim_{x\to 3^+}\dfrac{|x-4|-1}{3-x}$
3. $\lim_{x\to 0^+}\left(x-2Sgnx\right)$
4. $\lim_{x\to 3^+}\dfrac{\llbracket x\rrbracket-3}{3-x}$
5. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\llbracket x\rrbracket+1}$
6. $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{\llbracket x^2\rrbracket-\llbracket x\rrbracket^2}{x^2-1}$
7. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\llbracket \tan x\rrbracket+Sgn\left(x^2\right)}{\mu(x)}$
8. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\llbracket \operatorname{sen} x\rrbracket$
9. $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\llbracket \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\rrbracket$
10. $\lim_{x\to 5^+}\left[\mu(x+5)+\mu(x-1)-\mu(x-3)\right]$

En otros casos, al calcular límites, una vez aplicado el teorema de sustitución, se requerirá un trabajo adicional si se presentan resultados de la forma:

$$\frac{0}{0}$$
$$\frac{\infty}{\infty}$$
$$\infty-\infty$$
$$0\bullet\infty$$
$$1^{\infty}$$
$$0^{0}$$
$$\infty^{0}$$

Los resultados de la forma mencionada son llamados indeterminaciones debido a que corresponden a cualquier valor. Por ejemplo, tomemos $\dfrac{0}{0}$, suponga que sea igual a una constante c, es decir $\dfrac{0}{0}=c$ entonces $0=0c$ sería verdadera para todo c. Analice el resto de indeterminaciones.

Ejemplo 1

Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x-1}$

SOLUCIÓN:

Empleando el teorema de sustitución tenemos $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x-1}=\dfrac{1^2+5(1)-6}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ una indeterminación, para destruirla vamos a simplificar la expresión, es decir factorizando:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+6)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+6)$$

Y finalmente aplicando el teorema de sustitución: $\lim\limits_{x\to 1}(x+6)=1+6=7$

Ejemplo 2

Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos: $\dfrac{2^2-7(2)+10}{2-2}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminación)

Para encontrar el valor de esta indeterminación, simplificamos le expresión:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x-5)$$

Aplicando el Teorema de Sustitución, resulta:

$$\lim_{x\to 2}(x-5)=2-5=3$$

Ejemplo 3

Calcular $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+5\sqrt{x}-14}{\sqrt{x}-2}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos: $\dfrac{4+5\sqrt{4}-14}{\sqrt{4}-2}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminación)

Para encontrar el valor de esta indeterminación, simplificamos le expresión:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x+5\sqrt{x}-14}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}+7\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x}+7\right)$$

Aplicando el Teorema de Sustitución, resulta:

$$\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+7\right)=\sqrt{4}+7=9$$

SEGUNDO METODO:

Podemos hacer un Cambio de Variable: $\boxed{x=u^2}$. Este caso $u=\sqrt{x}$, y cuando $x\to 4$, $u\to 2$

Por tanto el límite en la nueva variable sería:

$$\lim_{u\to 2}\frac{u^2+5u-14}{u-2}$$

Simplificando la expresión y aplicando en teorema de sustitución:

$$\lim_{u\to 2}\frac{u^2+5u-14}{u-2}=\lim_{u\to 2}\frac{(u+7)(u-2)}{u-2}=\lim_{u\to 2}(u+7)=9$$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos: $\frac{\sqrt{1}-1}{1-1}=\frac{0}{0}$ (Indeterminación)

Racionalizando el numerador y simplificando:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\bullet\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 5

Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos: $\frac{\sqrt{1}-1}{\sqrt[3]{1}-1}=\frac{0}{0}$ (Indeterminación)

Para encontrar el valor de esta indeterminación, podemos aplicar uno de los siguientes métodos:

PRIMER METODO:

Racionalizando el numerador para diferencia de cuadrados y el denominador para diferencias de cubos:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\bullet\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\bullet\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}\right]$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\left(\left(\sqrt[3]{1}\right)^2+\sqrt[3]{1}+1\right)}{\left(\sqrt{1}+1\right)}=\frac{3}{2}$$

SEGUNDO METODO:

Cambio de Variable: $\boxed{x = u^6}$. Entonces Si $x \to 1 \Rightarrow u \to 1$

Reemplazando tenemos: $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{\sqrt{u^6}-1}{\sqrt[3]{u^6}-1} = \lim\limits_{u\to 1} \dfrac{u^3-1}{u^2-1}$

Y factorizando: $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{(u-1)(u^2+u+1)}{(u-1)(u+1)} = \lim\limits_{u\to 1} \dfrac{(u^2+u+1)}{(u+1)} = \dfrac{(1^2+1+1)}{(1+1)} = \dfrac{3}{2}$

Ejemplo 6

Calcular $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{[\![3x-2]\!] \quad |2-x|}{x^2-4}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema principal de límite consideramos $\left(\lim\limits_{x\to 2^-} [\![3x-2]\!]\right)\left(\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|2-x|}{x^2-4}\right)$

Entonces, para el primer límite tenemos: $\left(\lim\limits_{x\to 2^-} [\![3x-2]\!]\right) = 3$ ¿Por qué?

Y para el segundo límite, resulta:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|2-x|}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2-x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2-x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} =$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{(x+2)} = -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{[\![3x-2]\!] \quad |2-x|}{x^2-4} = (3)\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{3}{4}$

Ejercicios Propuestos 1.5

Calcular:

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$	10. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-x}{x^2-4}$	11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2+x-2}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$	12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-(1+a)x+a}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-9x+20}{x^2-3x-4}$	13. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-x-10}{x^2+5x-14}$	14. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+2x^2-7x+4}$	15. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8}$
7. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^3+x^2-x+10}{x^3+2x^2-2x-4}$	16. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{[\![3x-2]\!] \quad |2-x|}{x^2-4}$
8. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$	
9. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$	

Otros límites se calculan empleando la expresión $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1}$ que en forma generalizada sería: $\boxed{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u}=1; \quad donde \quad u=u(x)}$

Ejemplo 1

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(kx)}{x}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos: $\frac{\operatorname{sen}(k(0))}{0}=\frac{0}{0}$ (Indeterminación)

Para encontrar el valor de esta indeterminación, multiplicamos y dividimos por k, y luego aplicamos el teorema principal de límites:

$$\lim_{x\to 0} k\frac{\operatorname{sen} kx}{kx}=k\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(kx)}{kx}}_{1}=k(1)=k$$

Se podría decir que $\boxed{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(k u)}{u}=k}$; $k\in\mathbb{R}$

Ejemplo 2

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos: $\frac{\operatorname{sen}(3(0))}{\operatorname{sen}(5(0))}=\frac{0}{0}$ (Indeterminación)

Ahora, para encontrar el valor de la indeterminación dividimos el numerador y el denominador entre x, y luego aplicamos el teorema principal de límites y la formula anterior:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}}{\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}}=\frac{\overbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}}^{3}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}}_{5}}=\frac{3}{5}$$

Ejemplo 3

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos: $\frac{1-\overbrace{\cos 0}^{1}}{0^2}=\frac{0}{0}$ (Indeterminación)

Ahora, para encontrar el valor de la indeterminación hacemos lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\bullet\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\operatorname{sen}^2 x}}{x^2\left(1+\cos x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(kx\right)}{x^2}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos:

$$\frac{1-\cos\left(k0\right)}{0^2}=\frac{1-\cos\left(0\right)}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\text{ (Indeterminación)}$$

Ahora, para encontrar el valor de la indeterminación hacemos lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos\left(kx\right)}{x^2}\bullet\frac{1+\cos\left(kx\right)}{1+\cos\left(kx\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos^2\left(kx\right)}^{\operatorname{sen}^2(kx)}}{x^2\left(1+\cos\left(kx\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(kx\right)}{x^2(1+\cos\left(kx\right))}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen^2\left(kx\right)}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos\left(kx\right)}\right)$$

$$=\underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(kx\right)}{x}\right)}_{k}^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{k^2}{2}$$

Se puede decir que $\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos\left(k\,u\right)}{u^2}=\frac{k^2}{2}$

Ejemplo 5

Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos: $\frac{1-\cos 0}{0}=\frac{0}{0}$ (Indeterminación)

Multiplicando por el conjugado y aplicando propiedades:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x}\bullet\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\left(1+\cos x\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$$

$$=\left(\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1}\right)\left(\frac{\overbrace{\operatorname{sen} 0}^{0}}{1+\underbrace{\cos 0}_{1}}\right)=\frac{0}{2}=0$$

Se puede decir que $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-\cos(ku)}{u}=0$

Ejemplo 6

Calcular $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{x-a}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos: $\dfrac{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}a}{a-a}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminación)

PRIMER MÉTODO:

Cambiando variable $\boxed{u=x-a}$. Entonces si $\boxed{x\to a}$, $\boxed{u\to 0}$ y además $\boxed{x=u+a}$

Reemplazando y simplificando tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(u+a)-\operatorname{sen}a}{u} &= \lim_{u\to 0}\frac{\overbrace{(\operatorname{sen}u\cos a+\cos u\operatorname{sen}a)}^{\operatorname{sen}(u+a)}-\operatorname{sen}a}{u}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}u\cos a+\overbrace{\cos u\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}a}}{u}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}u\cos a+(\cos u-1)\operatorname{sen}a}{u}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}u\cos a}{u}+\lim_{u\to 0}\frac{(\cos u-1)\operatorname{sen}a}{u}\\
&= \cos a\underbrace{\left[\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\right]}_{1}+\operatorname{sen}a\underbrace{\left[\lim_{u\to 0}\frac{(\cos u-1)}{u}\right]}_{0}\\
&= \cos a(1)+sena\ (0)\\
&= \cos a
\end{aligned}$$

SEGUNDO MÉTODO:

Empleando la identidad: $\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a=2\cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-a}{2}\right)$

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$$

Al denominador lo dividimos y multiplicamos por 2, y luego separamos los límites aplicando el teorema principal de límites (el límite del producto es el producto de los límites)

$$\lim_{x\to a}\frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{2\,\frac{x-a}{2}}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{2}\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}}_{1}$$

$$=\cos a$$

Ejemplo 7

Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{(x-1)^2}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos: $\dfrac{1+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{(1-1)^2}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminación)

Haciendo cambio de variable: $\boxed{u = x-1}$ entonces $\boxed{x = u+1}$ y si $\boxed{x \to 1}$ entonces $\boxed{u \to 0}$

Reemplazando y simplificando:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{1+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{(x-1)^2} &= \lim_{u\to 0}\frac{1+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}(u+1)\right)}{u^2}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{1+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}u+\frac{3\pi}{2}\right)}{u^2}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{1+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}u\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}u\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{u^2}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{1+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}u\right)(0)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}u\right)(-1)}{u^2}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}u\right)}{u^2}
\end{aligned}
$$

El último límite se lo puede calcular **directamente** con la formula $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-\cos(k\,u)}{u^2} = \dfrac{k^2}{2}$

$$
\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos\left(\overbrace{\tfrac{3\pi}{2}}^{k}u\right)}{u^2} = \frac{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}{2} = \frac{\frac{9\pi^2}{4}}{2} = \frac{9\pi^2}{8}
$$

El resultado se lo puede comprobar, realizando todo el procedimiento lógico.

Multiplicando por el conjugado y simplificando:

$$
\begin{aligned}
\lim_{u\to 0}\frac{\left[1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}u\right)\right]\left[1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}u\right)\right]}{u^2\left[1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}u\right)\right]} &= \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}u\right)}{u^2\left[1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}u\right)\right]}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{2}u\right)}{u^2\left[1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}u\right)\right]}\\
&= \lim_{u\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}u\right)}{u}\right]^2\lim_{u\to 0}\frac{1}{\left[1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}u\right)\right]}
\end{aligned}
$$

Multiplicando y dividiendo por $\dfrac{3\pi}{2}$ y obteniendo límite:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{u\to 0}\left[\frac{\frac{3\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}u\right)}{\frac{3\pi}{2}u}\right]^2\lim_{u\to 0}\frac{1}{\left[1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}u\right)\right]}\\
&= \left(\tfrac{3\pi}{2}\right)^2\lim_{u\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}u\right)}{\frac{3\pi}{2}u}\right]^2\lim_{u\to 0}\frac{1}{\left[1+\underbrace{\cos\left(\tfrac{3\pi}{2}u\right)}_{1}\right]}\\
&= \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{9\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8

Calcular $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos: $\dfrac{0^-}{\sqrt{1-\cos 0}} = \dfrac{0^-}{0}$ (Indeterminación)

Multiplicando por el conjugado del radical, simplificando y luego calculando:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\dfrac{\left|\operatorname{sen}^2 x\right|}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{-\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} \\
&= \frac{\sqrt{1+\underbrace{\cos 0}_{1}}}{-\underbrace{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1}} \\
&= -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos 1.6

Calcular:

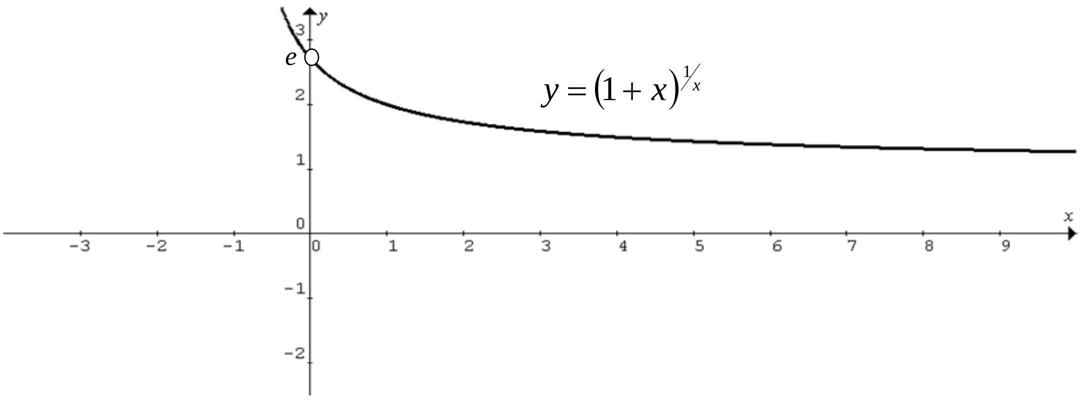
1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} 2x + \tan 3x}{x}$	7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{2-2\cos x}$	8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\tan(2x)}$
3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\operatorname{sen} 3x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$	9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\tan \frac{\pi}{2} x$	10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan 2x}{\operatorname{sen} 3x}$
5. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\tan(\pi x)}{x+2}$	
6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-\sqrt{x}}$	

Otro tipo de límite interesante, cuyo resultado nos va ha resultar útil en el cálculo de otros límites, es el de $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ cuando x tiende a "0".

Hagamos una tabla de valores:

x	$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$
-0.10	2.86797
-0.05	2.7895
-0.01	2.7319
$\updownarrow$	$\updownarrow$
0.01	2.7048
0.05	2.65329
0.10	2.5937

Se observa que: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ ¡HAY QUE DEMOSTRARLO!



Más generalmente tenemos que $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$ donde $u=u(x)$.

Ejemplo 1

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{1/x}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos $(1+\operatorname{sen}0)^{1/0}=1^{\infty}$ (Indeterminación)

Para calcular el valor de esta indeterminación utilizamos $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$.

Si consideramos $\boxed{u=\operatorname{sen}x}$, notamos que necesitamos en el exponente el recíproco de esta expresión, por tanto al exponente lo multiplicamos y dividimos por $\operatorname{sen}x$:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{(1+\operatorname{sen}x)^{1/\operatorname{sen}x}}_{e}\right)^{\overbrace{\operatorname{sen}x/x}^{1}}=e^{1}=e$$

Ejemplo 2

Calcular $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$

SOLUCIÓN:

Note que la expresión dada es una indeterminación de la forma 1^{∞}.

Para utilizar $\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$ primero sumemos y restemos 1 a la base, es decir vamos a tener:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{1/x}$$

luego consideramos $\boxed{u=\cos x-1}$ y multiplicamos y dividimos al exponente por esta expresión:

$$\lim_{x\to 0}\left[\underbrace{\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}}_{e}\right]^{\frac{\cos x-1}{x}} = e^{\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}}^{0}}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}=e^{0}=1.$$

Ejemplo 3

Calcular $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x+1}\right)^{\frac{x^2+x+1}{x^2-x}}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos: $\left(\dfrac{2}{1+1}\right)^{\frac{1^2+1+1}{1^2-1}}=\left(\dfrac{2}{2}\right)^{\frac{3}{0}}=(1)^{\infty}$ (Indeterminación)

Sumamos y restamos 1 a la base:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x^2+x+1}{x^2-x}} &= \lim_{x\to 1}\left(1+\left(\frac{2}{x+1}-1\right)\right)^{\frac{x^2+x+1}{x^2-x}}\\ &= \lim_{x\to 1}\left(1+\left(\frac{2-(x+1)}{x+1}\right)\right)^{\frac{x^2+x+1}{x^2-x}}\\ &= \lim_{x\to 1}\left(1+\left(\frac{1-x}{x+1}\right)\right)^{\frac{x^2+x+1}{x^2-x}}\end{aligned}$$

Multiplicamos y dividimos el exponente por $\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left[\left(1+\left(\frac{1-x}{x+1}\right)\right)^{\frac{1}{\frac{1-x}{x+1}}}\right]^{\left(\frac{1-x}{x+1}\right)\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x}\right)} &= e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{x+1}\right)\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x}\right)}\\ &= e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{-(x-1)}{x+1}\right)\left(\frac{x^2+x+1}{x(x-1)}\right)}\\ &= e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{-1}{x+1}\right)\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)}\\ &= e^{\left(\frac{-1}{1+1}\right)\left(\frac{1^2+1+1}{1}\right)} = e^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x\to k}\left(4-\frac{3x}{k}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2k}\right)}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Sustitución, tenemos:

$$\lim_{x\to k}\left(4-\frac{3x}{k}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2k}\right)}=\left(4-\frac{3k}{k}\right)^{\tan\left(\frac{\pi k}{2k}\right)}=\left(4-3\right)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}=1^{\infty} \text{ (Indeterminación)}$$

Cambiemos el 4 por 1+3 y multipliquemos y dividimos el exponente por el término que necesitamos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to k}\left(4-\frac{3x}{k}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2k}\right)}&=\lim_{x\to k}\left(1+3-\frac{3x}{k}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2k}\right)}\\&=\lim_{x\to k}\left[\underbrace{\left(1+\left(3-\frac{3x}{k}\right)\right)^{\frac{1}{3-\frac{3x}{k}}}}_{e}\right]^{\left(3-\frac{3x}{k}\right)\tan\left(\frac{\pi x}{2k}\right)}\\&=e^{\lim_{x\to k}\left(3-\frac{3x}{k}\right)\tan\left(\frac{\pi x}{2k}\right)}\end{aligned}$$

Dediquémonos al exponente. Hagamos el cambio de variable $u=x-k$ de donde $\boxed{x=u+k}$ y si $x\to k$ entonces $u\to 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to k}\left(3-\frac{3x}{k}\right)\tan\left(\frac{\pi x}{2k}\right)&=\lim_{u\to 0}\left(3-\frac{3(u+k)}{k}\right)\tan\left(\frac{\pi(u+k)}{2k}\right)\\&=\lim_{u\to 0}\left(3-\frac{3u+3k}{k}\right)\tan\left(\frac{\pi u+\pi k}{2k}\right)\\&=\lim_{u\to 0}\left(\frac{3k-3u-3k}{k}\right)\tan\left(\frac{\pi}{2k}u+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\lim_{u\to 0}\left(\frac{-3u}{k}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2k}u+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2k}u+\frac{\pi}{2}\right)}\\&=-\frac{3}{k}\lim_{u\to 0}(u)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2k}u\right)\overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{0}+\cos\left(\frac{\pi}{2k}u\right)\overbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}^{1}}{\cos\left(\frac{\pi}{2k}u\right)\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2k}u\right)\underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{1}}\\&=-\frac{3}{k}\lim_{u\to 0}(u)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2k}u\right)}{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2k}u\right)}\\&=\frac{3}{k}\lim_{u\to 0}(u)\frac{\overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2k}\overset{0}{u}\right)}^{1}}{\frac{\pi}{2k}u\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2k}u\right)}{\frac{\pi}{2k}u}\right)}_{1}}=\frac{3}{k}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2k}}\right)\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to k}\left(3-\frac{3x}{k}\right)\tan\left(\frac{\pi x}{2k}\right)=\frac{6}{\pi}$$

Finalmente: $\lim_{x\to k}\left(4-\frac{3x}{k}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2k}\right)}=e^{\frac{6}{\pi}}$

Ejemplo 5

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{kx}-1}{x}$

SOLUCIÓN:

Sustituyendo tenemos $\frac{a^{k(0)}-1}{0}=\frac{0}{0}$.

Considerando $\boxed{u=a^{kx}-1}$, entonces $\boxed{x=\frac{1}{k\ln a}\ln(u+1)}$ y si $x\to 0$ también $u\to 0$

Haciendo cambio de variable, tenemos:

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{1}{k\ln a}\ln(u+1)}=\lim_{u\to 0}k\ln a\frac{u}{\ln(u+1)}=k\ln a\left(\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(u+1)}\right)$$

Multiplicando, numerador y denominador por $\frac{1}{u}$, resulta:

$$k\ln a\left(\lim_{u\to 0}\frac{\left(\frac{1}{u}\right)u}{\frac{1}{u}\ln(u+1)}\right)=k\ln a\left(\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln\underbrace{\left[(u+1)^{\frac{1}{u}}\right]}_{e}}\right)=k\ln a\frac{1}{\ln e}=k\ln a\frac{1}{1}=k\ln a$$

El resultado $\lim\limits_{u\to 0}\frac{a^{ku}-1}{x}=k\ln a$ puede ser utilizado para calcular otros límites.

Ejemplo 4

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{x}$

SOLUCIÓN:

Empleando el resultado anterior:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{x}=2\ln 3$$

Ejemplo 5

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-5^{4x}}{x}$

SOLUCIÓN:

Primero restamos y sumamos 1 al numerador y luego separamos para calcular los límites:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-5^{4x}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1-5^{4x}+1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1-\left(5^{4x}-1\right)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{5^{4x}-1}{x}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-5^{4x}}{x}=2\ln 3-4\ln 5$$

Ejercicios Propuestos 1.7

Calcular:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\csc x}$	8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\csc x}$	9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\operatorname{sen} 3x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$	10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\tan x}$
4. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\operatorname{sen} x)^{\tan x}$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{ax}-2^{bx}}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)^{\frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}}$	12. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h};a>0$
6. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3}{x+1}\right)^{\frac{x^2+2x+6}{x^2-x-2}}$	13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{1/x}$
7. $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$	14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$

Para otros tipos de límites habrá que extremarse con el uso de los recursos algebraicos.

Ejemplo 1

Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+kx}-1}{x}=\dfrac{k}{n}$

SOLUCIÓN:

Por producto notable se puede decir que:

$$\left[(1+kx)-1\right]=\left(\sqrt[n]{1+kx}-\sqrt[n]{1}\right)\left[\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-2}\left(\sqrt[n]{1}\right)^{1}+\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-3}\left(\sqrt[n]{1}\right)^{2}+\cdots+\left(\sqrt[n]{1}\right)^{n-1}\right]$$

$$=\left(\sqrt[n]{1+kx}-1\right)\underbrace{\left[\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-2}+\cdots+1\right]}_{n\text{ términos}}$$

Entonces, multiplicando por el factor racionalizante, simplificando y calculando el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+kx}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[n]{1+kx}-1\right)}{x}\bullet\frac{\left[\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-2}+\cdots+1\right]}{\left[\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-2}+\cdots+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+kx-1)}{x\left[\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-2}+\cdots+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x\left[\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-2}+\cdots+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k}{\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+kx}\right)^{n-2}+\cdots+1}$$

$$=\frac{k}{\left(\sqrt[n]{1+k(0)}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+k(0)}\right)^{n-2}+\cdots+1}$$

$$=\frac{k}{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ veces}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+kx}-1}{x}=\frac{k}{n}$$

El resultado anterior puesto de forma general $\lim\limits_{u\to 0}\left[\dfrac{\sqrt[n]{1+ku}-1}{u}\right]=\dfrac{k}{n}$ puede ser utilizado para calcular rápidamente otros límites.

Ejemplo 2

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27-x}-3}{x}$

SOLUCIÓN:

Aunque este límite se lo puede calcular empleando el factor racionalizante para diferencia de cubos (no deje de hacerlo), vamos a emplear el resultado que obtuvimos en el ejercicio anterior.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27-x}-3}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{27(27-x)}{27}}-3}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{1-\dfrac{x}{27}}-3}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3\sqrt[3]{1+\left(-\dfrac{1}{27}\right)x}-3}{x}\\
&= 3\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[\overset{n}{3}]{1+\underbrace{\left(-\dfrac{1}{27}\right)}_{k}x}-1}{x}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27-x}-3}{x}=3\frac{-\dfrac{1}{27}}{3}=-\frac{1}{27}$$

Ejemplo 3

Calcular $\lim\limits_{x\to 30}\dfrac{\sqrt[5]{x+2}-2}{x-30}$

SOLUCIÓN:

Primero es necesario un cambio de variable, de modo que la nueva variable tienda a tomar el valor de cero, para poder utilizar la formula. Hagamos $u=x-30$ de donde $x=u+30$ y $u\to 0$. Reemplazando, simplificando y calculando el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 30}\frac{\sqrt[5]{x+2}-2}{x-30} &= \lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[5]{u+30+2}-2}{u+30-30}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[5]{u+32}-2}{u}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[5]{\frac{32(u+32)}{32}}-2}{u}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[3]{32}\,\sqrt[5]{\frac{u}{32}+\frac{32}{32}}-2}{u}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{2\,\sqrt[5]{1+\frac{1}{32}u}-2}{u}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{2\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{32}u}-1\right)}{u}\\
&= 2\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+\frac{1}{32}u}-1}{u}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 30}\frac{\sqrt[5]{x+2}-2}{x-30} = 2\left(\frac{\frac{1}{32}}{5}\right)=\frac{1}{80}$$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[4]{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1-x}-1}\right)$

SOLUCIÓN:

Restamos y sumamos 1 al numerador, dividimos para x y luego separararamos los límites:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1-x}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+2x}-1-\sqrt{1-3x}+1}{\sqrt[3]{1-x}-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+2x}-1-\left(\sqrt{1-3x}-1\right)}{\sqrt[3]{1-x}-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt[4]{1+2x}-1}{x}-\frac{\sqrt{1-3x}-1}{x}}{\frac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}}\\
&= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+2x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-3x}-1}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[4]{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1-x}-1}\right)=\frac{\frac{2}{4}-\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{1}{3}}=-6$$

Ejemplo 5

Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt[4]{14+2x}-2\sqrt{4-3x}}{\sqrt[3]{2-x}-1}\right)$

SOLUCIÓN:

Aquí $u=x-1$ de donde $x=u+1$ y $u\to 0$.

Reemplazando, simplificando y calcular el límite:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{14+2x}-2\sqrt{4-3x}}{\sqrt[3]{2-x}-1} &= \lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[4]{14+2(u+1)}-2\sqrt{4-3(u+1)}}{\sqrt[3]{2-(u+1)}-1}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[4]{14+2u+2}-2\sqrt{4-3u-3}}{\sqrt[3]{2-u-1}-1}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[4]{16+2u}-2\sqrt{1-3u}}{\sqrt[3]{1-u}-1}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[4]{\frac{16(16+2u)}{16}}-2\sqrt{1-3u}}{\sqrt[3]{1-u}-1}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{2\sqrt[4]{1+\frac{u}{8}}-2\sqrt{1-3u}}{\sqrt[3]{1-u}-1}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{2\left(\sqrt[4]{1+\frac{u}{8}}-\sqrt{1-3u}\right)}{\sqrt[3]{1-u}-1}\\
&= 2\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{u}{8}}-\sqrt{1-3u}}{\sqrt[3]{1-u}-1}\\
&= 2\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{u}{8}}-1-\sqrt{1-3u}+1}{\sqrt[3]{1-u}-1}\\
&= 2\lim_{u\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt[4]{1+\frac{u}{8}}-1}{u}-\left(\dfrac{\sqrt{1-3u}-1}{u}\right)}{\dfrac{\sqrt[3]{1-u}-1}{u}}\\
&= 2\frac{\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\frac{u}{8}}-1}{u}-\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1-3u}-1}{u}\right)}{\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-u}-1}{u}}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{14+2x}-2\sqrt{4-3x}}{\sqrt[3]{2-x}-1}=2\frac{\frac{\frac{1}{8}}{4}-\left(\frac{-3}{2}\right)}{\frac{-1}{3}}=2\frac{\frac{1}{32}+\frac{3}{2}}{-\frac{1}{3}}=-6\left(\frac{49}{32}\right)=-\frac{147}{16}
$$

Ejercicios Propuestos 1.8

Calcular:

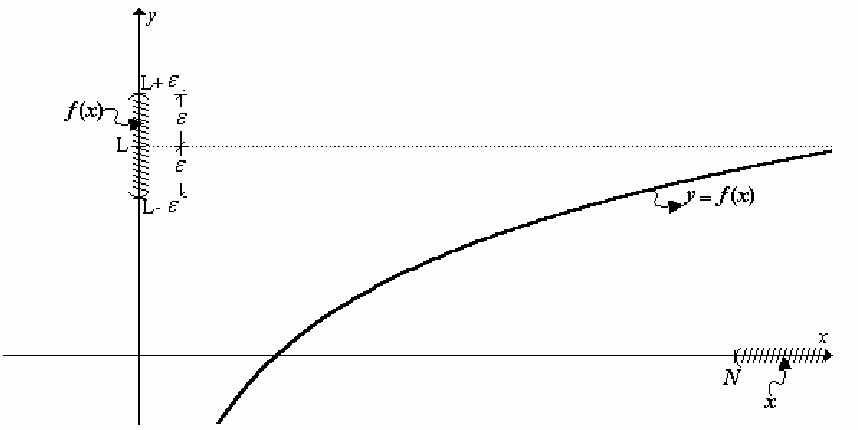
1. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}-3}$	3. $\lim\limits_{x\to 7}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+26}-\sqrt[4]{80+x}}{\sqrt{x+8}-3}\right)$	4. $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{3x+2}}{4-x^2}$

1.5 LÍMITES AL INFINITO.

En ciertas ocasiones puede ser necesario estudiar el comportamiento de una función cuando la x toma valores muy grandes, diremos cuando x tiende al infinito.

Suponga que f se aproxima a tomar un valor L cuando la variable x toma valores muy grandes, este comportamiento lo escribiremos de la siguiente manera $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

Ejemplo 1

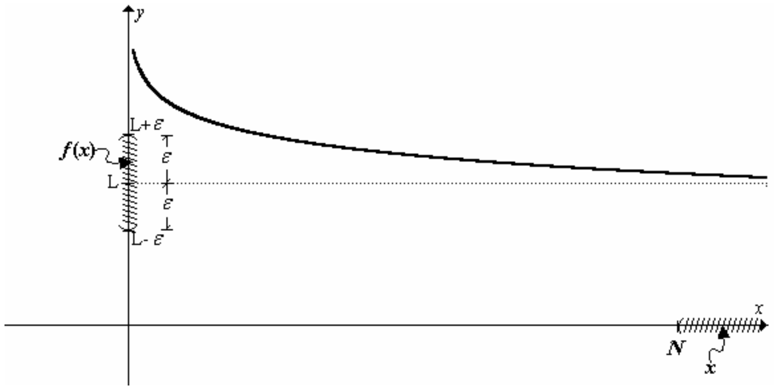


Formalmente sería:

Decir que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que f puede estar tan cerca de L, tanto como se pretenda estarlo ($\forall \varepsilon > 0$), para lo cual deberá poderse determinar el intervalo en el cual tomar a x, $\exists N$ (una cantidad muy grande), que lo garantice. Es decir:

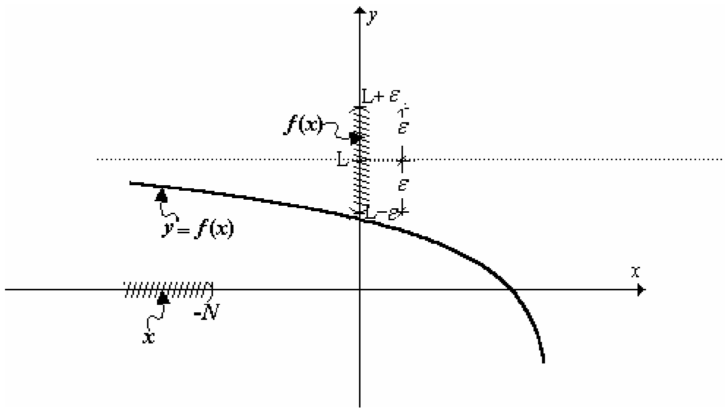
$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = L\right) \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \quad tal\ que \quad x > N \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$

Ejemplo 2



Suponga ahora que f se aproxima a tomar un valor L cuando la x toma valores muy grandes, pero **NEGATIVOS**, este comportamiento lo escribiremos de la siguiente manera $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

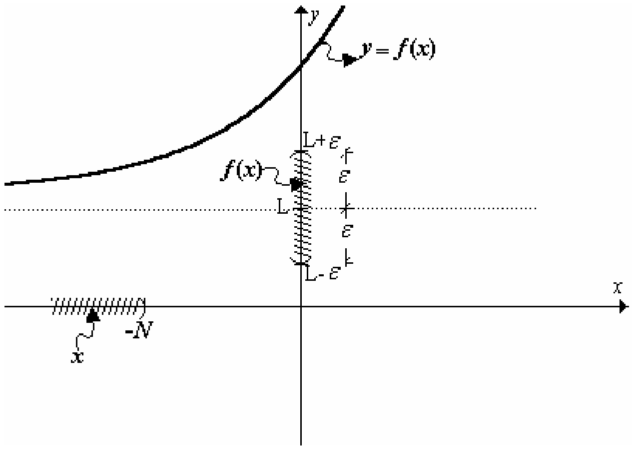
Ejemplo 1



Formalmente sería:

> Decir que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ significa que f puede estar tan cerca de L , tanto como se pretenda estarlo, $\forall\varepsilon > 0$, para lo cual deberá poderse determinar el intervalo en el cual tomar a x , $\exists N$ (una cantidad muy grande), que lo garantice. Es decir:
> $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L\right) \equiv \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0 \quad tal\ que \quad x < -N \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$

Ejemplo 2



Observe que para los casos anteriores significa que la gráfica de f tiene una **asíntota horizontal** $y = L$.

Aquí también podemos hacer demostraciones formales

Ejemplo

Demostrar formalmente que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

SOLUCIÓN:

Empleando la definición tenemos:

$$\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\right)\equiv \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0 \quad tal\ que \quad x>N \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$$

Transformando el antecedente:

$$x>N$$
$$\frac{1}{x}<\frac{1}{N}$$

Se observa que tomando $N=\frac{1}{\varepsilon}$ aseguraríamos el acercamiento.

Por ejemplo si se quisiera que $y=\frac{1}{x}$ esté a menos de $\varepsilon = 0.01$ de 0, bastaría con tomar a $x>\frac{1}{0.01}$ es decir $x>100$.

Para calcular límites al infinito, usualmente un recurso útil es dividir para x de mayor exponente si se trata de funciones racionales.

Ejemplo 1

Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{5x^2+x-1}$

SOLUCIÓN:

Aquí se presenta la indeterminación: $\frac{\infty}{\infty}$

Dividiendo numerador y denominador para x^2, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{5}$$ (No olvide que $\boxed{\frac{k}{\infty}\approx 0\,;k\in\mathbb{R}}$)

Este resultado indica que la gráfica de $f(x)=\frac{2x^2+3x-1}{5x^2+x-1}$ tiene una asíntota horizontal $y=\frac{2}{5}$

Ejemplo 2

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

SOLUCIÓN:

Aquí se presenta la indeterminación: $\frac{\infty}{\infty}$

Dividiendo numerador y denominador para x: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}}$

Al introducir la x dentro del radical quedará como x^2:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=1$$

Este resultado indica que la gráfica de $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ tiene una asíntota horizontal $y=1$ en el infinito positivo.

Ejemplo 3

Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

SOLUCIÓN:

Ahora se presenta la indeterminación: $\frac{-\infty}{\infty}$

Aquí hay que dividir numerador y denominador para $-x$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x-1}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{-x}}$

Al introducir la $-x$ dentro del radical quedará como x^2:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{-x}-\frac{1}{-x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-1$$

Este resultado indica que la gráfica de $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ tiene una asíntota horizontal $y=-1$ en el infinito negativo.

Ejemplo 4

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}\right)$

SOLUCIÓN:

Ahora se presenta la indeterminación: $\infty-\infty$. Vamos primero a racionalizarla y luego dividimos para el x con mayor exponente:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2-x-1\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(x+1\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}=2\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

En otros ejercicios de cálculo de límite al infinito se puede requerir emplear la identidad: $\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$ ¡DEMUÉSTRELA!

Ejemplo

Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Solución:

Para utilizar la forma anterior, transformamos el límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=e^2$$

Se puede concluir que: $\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{k}{u}\right)^u=e^k$

Ejercicios propuestos 1.9

1. Demostrar formalmente que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

2. Calcular:

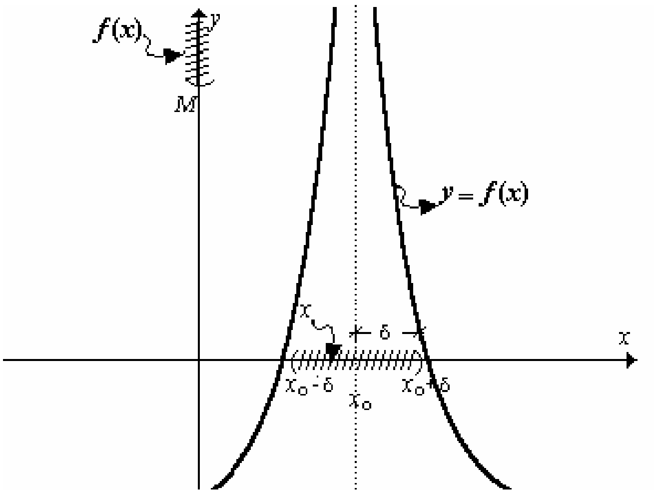
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x^2+4x-3}{x^3+3x+1}$	13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-1}}{3x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{2x^2-5x+1}$	14. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-5}{\sqrt{x^2+2}}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$	15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2-1}}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)}{x+\sqrt[3]{x}}$	16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^3-1}{\sqrt{2+x^6}}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$	17. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$	18. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}$	19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\,\mathrm{sen}(x!)}{x^2+1}$	20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4-x^2+2}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-3}{\sqrt{x^2+1}}$	21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{5x}{x-2}}$	22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x^3+2x^2-x+1}{x^3-8}}$	23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$
12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$	24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+2}{x-5}\right)\right]$

1.6 LÍMITES INFINITOS

Suponga que cuando x toma valores próximos a un punto x_0, tanto por izquierda como por derecha, f toma valores muy grandes positivo; es decir $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Diremos, en este caso, que f **crece sin límite** o que f **no tiene límite en** x_0.

> Sea M una cantidad muy grande positiva. Entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ significa que cuando a x está próxima a "x_0", a una distancia no mayor de ∂ ($0<|x-x_0|<\partial$), f será mayor que M. Es decir:
>
> $$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\right)\equiv \forall M>0, \exists\partial>0 \quad tal\ que \quad 0<|x-x_0|<\partial \Rightarrow f(x)>M$$

Ejemplo

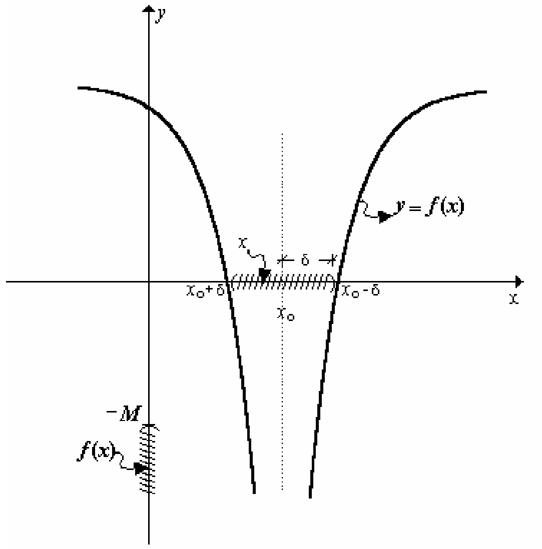


Puede ocurrir también que cuando la x toma valores próximos a un punto x_0, tanto por izquierda como por derecha, f toma valores muy grandes negativos; es decir $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$. Diremos, en este caso, que f **decrece sin límite** o que f **no tiene límite en** x_0. Es decir:

Sea M una cantidad muy grande positiva. Entonces:

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty\right) \equiv \forall M > 0, \exists \partial > 0 \quad tal\ que \quad 0 < |x - x_0| < \partial \Rightarrow f(x) < -M$$

Ejemplo

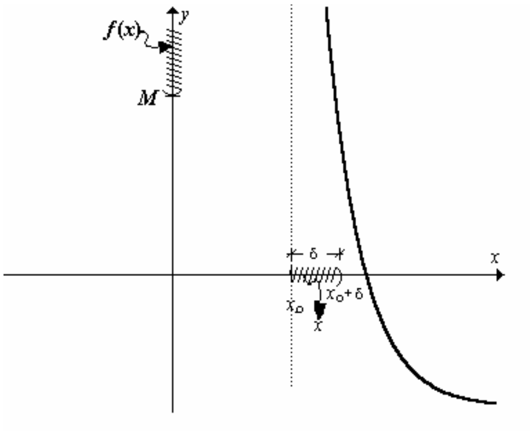


Para otro caso, puede ocurrir que cuando la x toma valores próximos a un punto x_0, sólo por su derecha, f toma valores muy grandes; es decir $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$. Lo cual significa:

Sea M una cantidad muy grande positiva. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \equiv \forall M > 0, \exists \partial > 0 \quad tal\ que \quad 0 < x - x_0 < \partial \Rightarrow f(x) > M$$

Ejemplo



Observe que este comportamiento significa que la gráfica tiene una **asíntota vertical** $x = x_0$.

Ejemplo 1

Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$

SOLUCIÓN:

Empleando el teorema de sustitución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{(1-1)^2}=\frac{1}{0}=+\infty \text{ (No existe)}$$

La gráfica de $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ tiene una asíntota vertical $\boxed{x=1}$ y tanto por izquierda como por derecha la grafica crece sin límite.

Ejemplo 2

Calcular $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+3}{x-2}$

SOLUCIÓN:

Empleando el teorema de sustitución:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x+3}{x-2}=\frac{2^+ +3}{2^+ -2}=\frac{5^+}{0^+}=+\infty \text{ (No existe)}$$

La gráfica de $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$ tiene una asíntota vertical $\boxed{x=2}$ y por su derecha la grafica crece sin límite.

PREGUNTA: ¿Qué ocurre a la izquierda?.

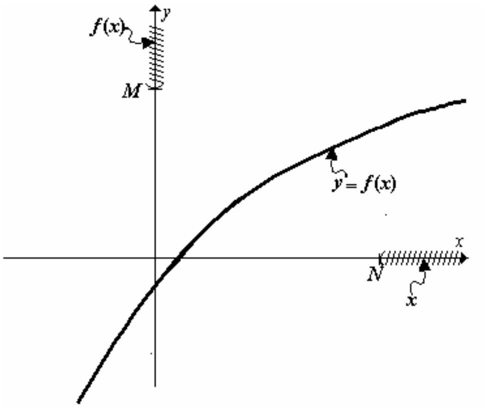
Se pueden describir otros comportamientos.

1.7 OTROS LÍMITES.

Para decir $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, f toma valores muy grandes positivos cada vez que la x toma valores también grandes positivos; debemos asegurar que:

$$\forall M>0, \exists N>0 \quad tal\ que \quad x>N \Rightarrow f(x)>M$$

Ejemplo



Ejercicios Propuestos 1.10

1. Defina formalmente y describa gráficamente:
   a) $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$
   b) $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$
   c) $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$
   d) $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$
   e) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$
   f) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
2. Demuestre formalmente que:
   a) $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$
   b) $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$
3. Calcular:

1. $\lim_{x\to1^+}\left[1+\frac{1}{x-1}\right]$ 2. $\lim_{x\to1^-}\left[\frac{x}{x-1}\right]$ 3. $\lim_{x\to3^-}\frac{x+3}{x^2-9}$	6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6}{x^5+1}$ 7. $\lim_{x\to\infty}\frac{6-4x^2+x^3}{4+5x-7x^2}$ 8. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x}$

4. $\lim\limits_{x\to -7^-}\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-49}}$ 5. $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{4-x}$	9. $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{1-2x}$ 10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{1+x^5}}{x}$

4. Bosqueje la gráfica de una función que cumpla con lo siguiente:
   - $Dom\ f=(-\infty,-2)\cup[-1,1]\cup(2,+\infty)$
   - $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$
   - $\forall N>0, \exists\partial>0\ [0<-2-x<\partial \Rightarrow f(x)>N]$
   - $\forall N>0, \exists\partial>0\ [0<x-2<\partial \Rightarrow f(x)>N]$
   - $\forall\varepsilon>0, \exists M>0\ [x>M \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon]$
   - $\forall\varepsilon>0, \exists M>0\ [x<-M \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon]$
   - $f(0)=1$
5. Bosqueje el gráfico de una función que satisfaga las condiciones siguientes:
   - $\forall\varepsilon>0\ \exists\partial>0, \forall x[0<x<\partial \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon]$
   - $\forall\varepsilon>0\ \exists\partial>0, \forall x[0<-x<\partial \Rightarrow |f(x)+1|<\varepsilon]$
   - $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0, \forall x[|x|>N \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon]$
   - $\forall M>0\ \exists\partial>0, \forall x[0<|x+1|<\partial \Rightarrow f(x)>M]$
   - $f(0)=0$

Misceláneos

1. Califique cada una de las proposiciones siguientes como verdadera o falsa. Justifique formalmente.
   1. Si $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=3$, entonces $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$
   2. Si f y g son funciones tales que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)}=1$
   3. Sea f una función de variable real tal que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x-a}{f(x)}=1$. Entonces $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=0$.
   4. Sean f y g funciones tales que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\infty$. Entonces el $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe.
   5. Sean f y g funciones tales que $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=e$ y $f(x)=\ln(g(x))$. Entonces $\lim\limits_{x\to a^+}(f\circ g)(x)=1$
   6. Si $\lim\limits_{x\to 0^+}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|=1$ entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$
   7. Si $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ existe, entonces existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$
   8. Si $f(x)\neq g(x)$ para toda x, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq \lim\limits_{x\to a} g(x)$
   9. Si $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ existe y $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$
   10. Si f y g son funciones definidas en IR entonces:
   $$\forall a\in IR\left(\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)\right)$$

11. Si $\lim\limits_{x\to a^{+}}\dfrac{x^2-|x-a|-a^2}{|x-a|}$ existe entonces $a=0$.
12. Si $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]$ existe y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe.
13. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to -a} f(x)=-\infty$
14. $\left(\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2\right)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<|x-1|<\partial\Rightarrow\left|(3x-1)-2<\varepsilon\right|\right]$
15. Si $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0^{+}} g(x)=\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)g(x)=0$.
16. Existen dos funciones de variable real f y g tales que $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^{+}} g(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=e$
17. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=2$ entonces $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$
18. No existen dos funciones *f* y *g* tales que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=5$
19. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-2$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{f(x)+g(x)}-1}{\sqrt[3]{f(x)+g(x)}-1}$ =1

2. Empleando la definición de límite, demuestre que:

1. $\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=3$	4. $\lim\limits_{x\to 4^{+}}\left(4-\dfrac{x}{2}\right)=2$
2. $\lim\limits_{x\to 5^{+}}\sqrt{x-1}=2$	5. $\lim\limits_{x\to -2^{+}}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$
3. $\lim\limits_{x\to 3^{+}}\lvert x-3\rvert=0$	

3. Determine

1. $\lim\limits_{x\to 3^{+}}[\![x^2+2x]\!]$	20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\operatorname{sen}x\right]$
2. $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{e^{3x}-\cos 2x}{\operatorname{sen}4x}$	21. $\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{\arctan\left(x^2\right)-\arctan 1}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$	22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x+3}{2x-5}\right]^{3x}$	23. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\arcsin x-\arcsin\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{xe^{x^2}-e}{x-1}$	24. $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\lvert\operatorname{sen}x\rvert}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}}\left(\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$	25. $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left[\operatorname{Sgn}(x)\left([\![x+1]\!]+\mu(x-1)\right)\right]$
7. $\lim\limits_{x\to 2^{+}}\left(4-\dfrac{3x}{2}\right)^{\tan\frac{\pi x}{4}}$	26. $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{\pi-2\arctan x}{e^{\frac{3}{x}}-1}\right]$	27. $\lim\limits_{x\to 0}\left([\![x]\!]+[\![-x]\!]\right)$
9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^{+}}(\operatorname{sen}2x)^{\tan^2 2x}$	28. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\left(\frac{x}{2}\right)$
	29. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3}{x+1}\right)^{\frac{x^2+2x+5}{x^2-x-2}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\cos 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

11. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]$

12. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]$

13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-|x-1|-1}{x^2-1}$

15. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\left(1+\cot x\right)^{\sec x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

donde

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2} & ;x<0\\ 5 & ;x=0\\ \dfrac{\operatorname{sen}10x-\tan x}{\operatorname{sen}2x} & ;x>0\end{cases}$$

17. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{2x}-e^{7x}}{\operatorname{sen}2x+\tan 9x}$

18. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{|x-1|}\right]$

19. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x\operatorname{sen}3x}{1-\cos 2x}\right)$

30. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)\right]$

31. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\left(\dfrac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}\right)$

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\operatorname{sen}x^2}$

33. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{2\ln x}}$

34. $\lim\limits_{x\to 64}\left(\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}\right)$

35. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+5x}{1-3x}\right)^{\frac{1}{2x}}$

36. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)\cot x$

37. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{xe^{-5x}-\cos 2x-x+1}{x^2}\right)$

38. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{3x}-\cos 2x}{\operatorname{sen}5x-x}\right)$

39. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right)$

40. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$

41. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

4. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ si $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<1$ para $x\neq 0$

5. Bosqueje la gráfica de una función que cumpla con lo siguiente:
   - $\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0:0<|x|<\partial\Rightarrow|f(x)-3|<\varepsilon$
   - $\forall N>0,\exists\partial>0:0<x+3<\partial\Rightarrow f(x)>N$
   - $\forall N>0,\exists\partial>0:0<-3-x<\partial\Rightarrow f(x)<-N$
   - $\forall\varepsilon>0,\exists M>0:x>M\Rightarrow|f(x)-1|<\varepsilon$
   - $\forall\varepsilon>0,\exists M>0:x<-M\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$

6. Bosqueje la gráfica de una función que cumpla con lo siguiente:
   - $\operatorname{Dom} f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$
   - $\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0\left[0<|x|<\partial\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon\right]$
   - $\forall M>0,\exists\partial>0\left[0<x-1<\partial\Rightarrow f(x)<-M\right]$
   - $\forall M>0,\exists\partial>0\left[0<1-x<\partial\Rightarrow f(x)>M\right]$
   - $\forall M>0,\exists\partial>0\left[0<|x+1|<\partial\Rightarrow f(x)>M\right]$
   - $\forall\varepsilon>0,\exists N>0\left[x>N\Rightarrow|f(x)+1|<\varepsilon\right]$
   - $\forall\varepsilon>0,\exists N>0\left[x<-N\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon\right]$