2 CONTINUIDAD DE FUNCIONES

OBJETIVOS:

SE PRETENDE QUE EL ESTUDIANTE:

- Defina continuidad.
- Realice demostraciones formales de continuidad.
- Diseñe funciones continuas.

Hasta aquí nos hemos dedicado a estudiar el comportamiento de una función en la cercanía de un punto; ahora nos proponemos definir su comportamiento justamente en ese punto.

2.1 CONTINUIDAD EN UN PUNTO

El término continuo aplicado a una función de variable real sugiere que su gráfica no debe presentar saltos; es decir, que al trazar su gráfica no se requiera alzar la mano. Sin embargo se hace necesario formalizar matemáticamente esta definición.

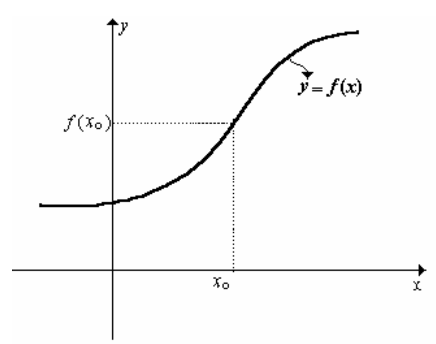
Sea f una función de una variable real definida en un intervalo abierto (a,b) y sea $x_0 \in (a,b)$, se dice que f es ***continua*** en "x_0" si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Es decir, si se cumplen tres cosas:

1. $f(x_0)$ está definida
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ (existe); y
3. $L = f(x_0)$

Caso contrario, se dice que f es ***discontinua*** en "x_0"

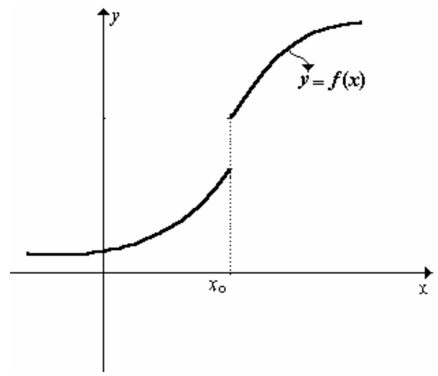
Ejemplo

Una función continua en un punto x_0



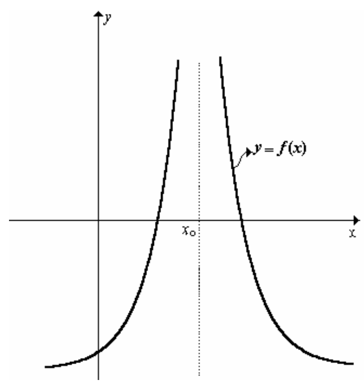
Como ejemplos de funciones discontinuas en un punto x_0, tenemos:

Ejemplo 1



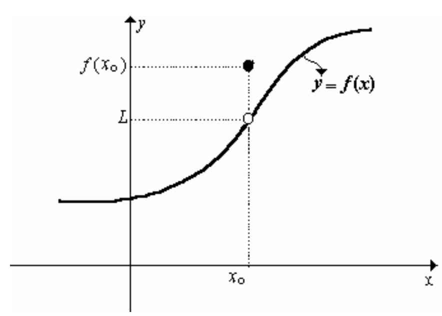
La función **no es continua** en x_0, debido a que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *no existe*

Ejemplo 2



La función **no es continua** en x_0, debido a que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *no existe*

Ejemplo 3



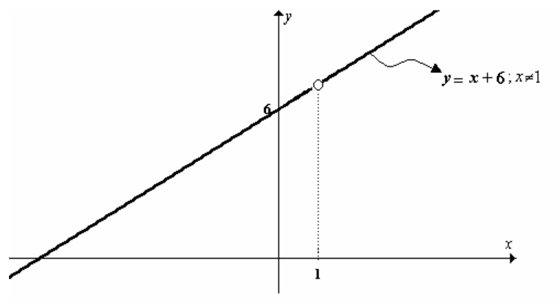
La función **no es continua** en x_0, debido a que $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Para el caso del ejemplo 1 y del ejemplo 2, se dice que hay una **discontinuidad esencial**.

Y para el caso del ejemplo 3 se dice que es una **discontinuidad removible**, por que sería cuestión de definir a f en el punto "x_0" con el valor de L para tener ya una función continua en ese punto. A propósito, observe que sólo en este caso el límite existe.

Ejemplo 4

$f(x)=\dfrac{x^2+5x-6}{x-1}$ no está definida en $x=1$ y su gráfica es la de $f(x)=x+6 \quad ; x\neq 1$ que no es continua en $x=1$.



Definiéndola continua tenemos $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x-6}{x-1} & ; x\neq 1\\ 7 & ; x=1\end{cases}$

Ejemplo 5

Calcular el valor de "A", de ser posible, para que $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x} & ; x\neq 0\\ A & ; x=0\end{cases}$ sea continua en $x=0$.

SOLUCIÓN:
La función está definida para todo número real excepto $x=0$. El asunto será definirla en este punto con el valor de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ si es que existe, para que sea continua en todo R, Es decir, hacer que $A=f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Calculando el límite tenemos: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2$. Por tanto $A=2$

2.2 CONTINUIDAD DE FUNCIONES CONOCIDAS.

1. Una función polinomial es continua en todo número real.
2. Un función racional es continua en todo su dominio, es decir en todo número excepto donde el denominador es cero.
3. La función valor absoluto es continua en todo número real.
4. La funciones seno y coseno son continuas en todo número real.
5. Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante son continuas en todo su dominio, es decir en todo número excepto donde el denominador es cero.

2.3 CONTINUIDAD EN OPERACIONES CON FUNCIONES

2.3.1 Teorema

Si f y g son funciones continuas en el punto "x_0", entonces también lo son: kf, $f+g$, $f-g$, $f.g$, f/g $\left(g(x_0)\neq 0\right)$, f^n, $\sqrt[n]{f}$ $\left(f(x_0)>0 \quad si\ n\ es\ par\right)$

Demostración.

Demostremos lo siguiente:

"Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son funciones continuas en el punto "$\boldsymbol{x}_0$" entonces $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ también es continua en "$\boldsymbol{x}_0$"

Las hipótesis serían H_1: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ y

H_2: $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$

Como $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$ entonces $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = f(x_0)+g(x_0)$

Es decir $\lim_{x\to x_0}\left[(f+g)(x)\right] = (f+g)(x_0)$

Lo cual indica que la función $f+g$ también es continua en "x_0"

Las demostraciones del resto del teorema se la dejamos como ejercicio al lector.

2.3.2 Teorema del Límite de la composición.

> Si f y g son funciones tales que $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$ y f es continua en "L", entonces $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(L)$. En particular, si g es continua en "x_0" y f continua en $g(x_0)$ entonces $f\circ g$ es continua en "x_0"

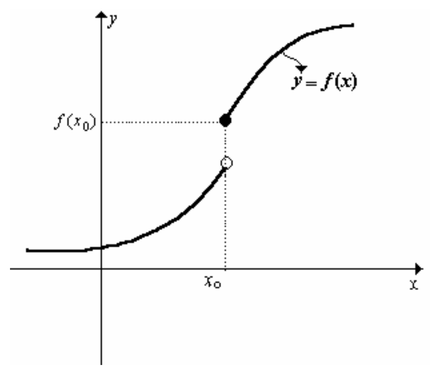
En límites nos interesaba indicar si la función se aproximaba a un punto, en cambio en continuidad estamos interesados, además, en determinar si la función toma el valor correspondiente en ese punto. Esto puede ocurrir en ambas direcciones de acercamiento, como lo acabamos de definir, o en una sola dirección, como lo vamos a definir a continuación.

2.4 CONTINUIDAD LATERAL

2.4.1 Continuidad por derecha

Se dice que f es ***continua*** por ***la derecha*** de "x_0" si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

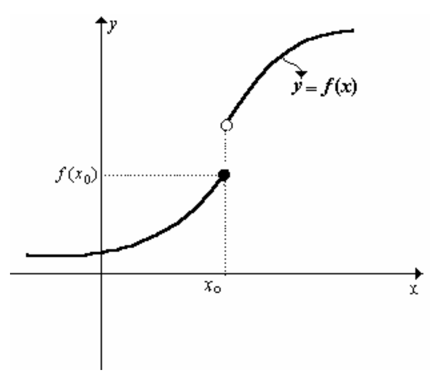
Ejemplo



2.4.2 Continuidad por izquierda

Se dice que f es ***continua por la izquierda*** de "x_0" si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Ejemplo



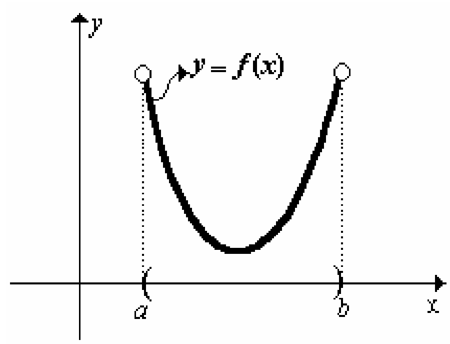
2.4 CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

2.4.1 CONTINUIDAD EN (a,b)

Una función f es continua en un intervalo abierto (a,b) si es continua en todo punto interior de (a,b). Es decir $\forall x_0 \in (a,b); \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

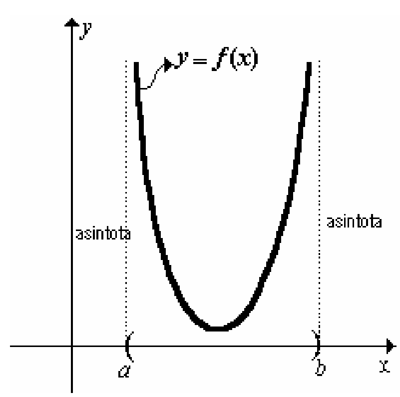
Ejemplo 1

Una función continua en (a,b)



Ejemplo 2

Otra función continua en (a,b)

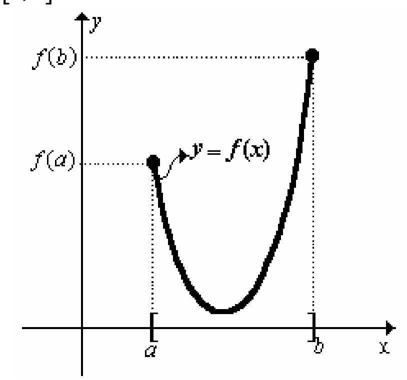


2.4.2 CONTINUIDAD EN $[a,b]$

Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ si es continua en (a,b) y además continua a la derecha de a ($\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$) y a la izquierda de b ($\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$).

Ejemplo

Una función continua en $[a,b]$

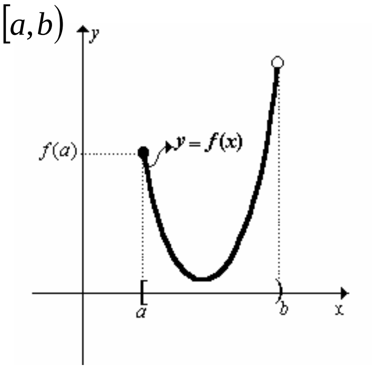


2.4.3 CONTINUIDAD EN $[a,b)$

Una función f es continua en un intervalo semiabierto $[a,b)$, si es continua en (a,b) y además continua a la derecha de a.

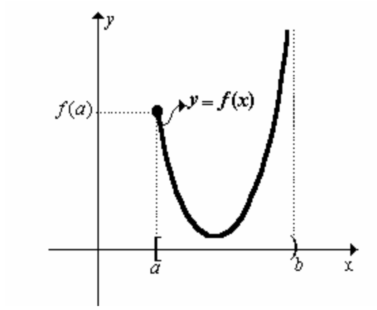
Ejemplo 1

Una función continua en $[a,b)$



Ejemplo 2

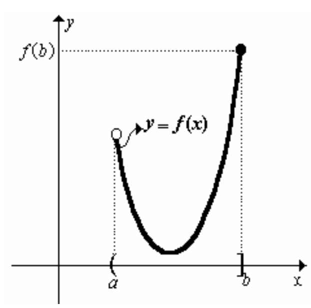
Otra función continua en $[a,b)$



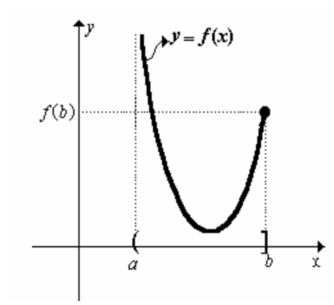
2.4.4 CONTINUIDAD EN $(a,b]$

> Una función f es continua en un intervalo semiabierto $(a,b]$, si es continua en (a,b) y además continua a la izquierda de b.

Ejemplo 1



Ejemplo 2



Ahora analicemos los siguientes ejercicios resueltos.

Ejercicio resuelto 1

Hallar los valores de "a" y "b" para que $f(x)=\begin{cases}2x-a & ;x<-3\\ ax+b & ;-3\leq x\leq 3\\ b-5x & ;x>3\end{cases}$ sea continua en todo R.

SOLUCIÓN:

Note que las reglas de correspondencia que definen a f son lineales y por tanto f será continua en los respectivos intervalos. Entonces debemos procurar que f sea continua en los puntos donde cambia de regla de correspondencia, es decir en $x=-3$ y en $x=3$, lo que significa dos cosas:

1. $$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to -3^-}(2x-a)=\lim\limits_{x\to -3^+}(ax+b)\\ 2(3)-a=3a+b\\ 2a-b=6\end{array}}$$

2. $$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to 3^-}(ax+b)=\lim\limits_{x\to 3^+}(b-5x)\\ a(3)+\cancel{b}=\cancel{b}-5(3)\\ 3a=-15\\ a=-5\end{array}}$$

reemplazando el valor de a en la primera ecuación obtenida, resulta: $\boxed{\begin{array}{c}2(-5)-b=6\\ b=-16\end{array}}$

Es decir, que la función $f(x)=\begin{cases}2x+5 & ;x<-3\\ -5x-16 & ;-3\leq x\leq 3\\ -16-5x & ;x>3\end{cases}$ será continua en todo R.

Ejercicio resuelto 2

Analizar la continuidad de la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{9-x}{x-6}}$

SOLUCIÓN:

El asunto aquí es sinónimo de establecer el dominio natural. Entonces debemos resolver $\dfrac{9-x}{x-6}\geq 0$

Por tanto, f tendrá gráfica sólo en el intervalo $(6,9]$ que será también su intervalo de continuidad.

Ejercicio resuelto 3

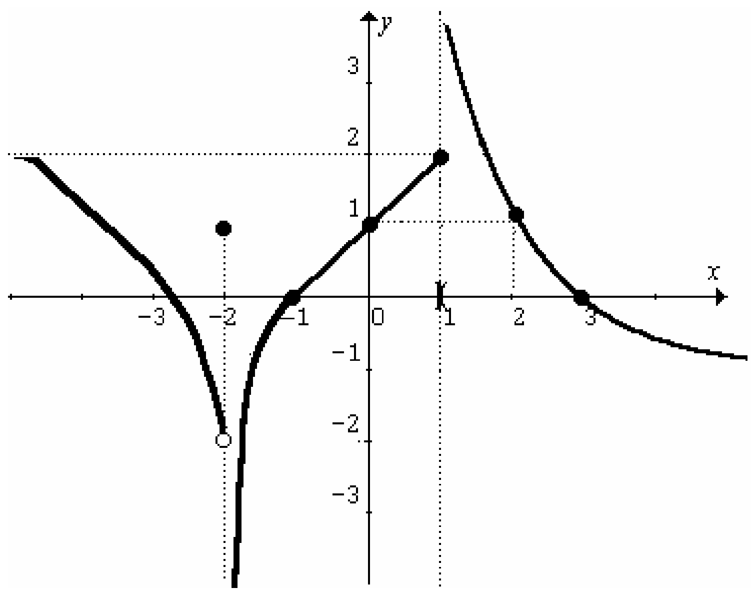
Bosqueje el gráfico de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

1. f es continua en $(-\infty,-2)\cup(-2,1]\cup(1,+\infty)$
2. $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall x\left[x<-N\Rightarrow \left|f(x)-2\right|<\varepsilon\right]$
3. $\forall M>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<x+2<\partial\Rightarrow f(x)<-M\right]$
4. $\forall M>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<x-1<\partial\Rightarrow f(x)>M\right]$
5. $\forall M>0,\exists N>0,\forall x\left[x>N\Rightarrow f(x)<-M\right]$
6. $\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0,\forall x\left[-\partial<x+2<0\Rightarrow \left|f(x)+2\right|<\varepsilon\right]$
7. $\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<1-x<\partial\Rightarrow \left|f(x)-2\right|<\varepsilon\right]$
8. $f(-2)=1\quad, f(0)=1\quad, f(-1)=0\quad, f(3)=0\quad, f(2)=1$

SOLUCIÓN:
Las condiciones dadas significan:

1. Intervalos de continuidad $(-\infty,-2)\cup(-2,1]\cup(1,+\infty)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ asíntota horizontal $y=2$ para x negativos.
3. $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$ asíntota vertical $x=-2$ por derecha
4. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\infty$ asíntota vertical $x=1$ por derecha
5. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$
6. $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-2$ límite por izquierda de $x=-2$
7. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=2$ límite por izquierda de $x=1$
8. Puntos que pertenecen a f

Por tanto la grafica sería:



Ejercicios Propuestos 2.1

1. Grafique las funciones dadas y determine los puntos de discontinuidad e indique los intervalos de continuidad

1. $f(x)=\begin{cases} x^2 & ;x<0 \\ -x & ;0\le x\le 1 \\ x & ;x>1 \end{cases}$ 2. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ 3. $f(x)=\mu(x-2)+Sgn(x+2)$	4. $f(x)=\left[\left\|x+\dfrac{1}{2}\right\|\right]$ 5. $f(x)=[\![x]\!]-x$ 6. $f(x)=[\![senx]\!];\quad x\in(-2\pi,2\pi)$

2. Analice la continuidad de las siguientes funciones:

1. $f(x)=\dfrac{x-1}{sen2x}$ 2. $h(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\lvert 2x+3\rvert}$	3. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{x^3+6x^2+5x-12}$ 4. $f(x)=sen\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

3. Calcular el valor de " A ", si existe, para que $f(x)=\begin{cases}\dfrac{senx}{\lvert x\rvert} & ;x\neq 0\\ A & ;x=0\end{cases}$ sea continua en todo R .

4. Hallar los valores de " a " y " b " para que f sea continua en R .

1. $f(x)=\begin{cases}x^2 & ;x\leq 1\\ ax+b & ;1<x<4\\ 2x-6 & ;x\geq 4\end{cases}$ 2. $f(x)=\begin{cases}x & ;x\leq 1\\ ax+b & ;1<x<4\\ -2x & ;x\geq 4\end{cases}$	3. $f(x)=\begin{cases}x+1 & ;x<1\\ ax+b & ;1\leq x<2\\ 3x & ;x\geq 2\end{cases}$ 4. $f(x)=\begin{cases}-2senx & ;x\leq -\pi/2\\ a[\![\cos x]\!]+bx & ;-\pi/2<x<\pi/2\\ senx & ;x\geq \pi/2\end{cases}$

5. Sean las funciones: $f(x)=\begin{cases}1 & ;x>0\\ 0 & ;x=0\\ -1 & ;x<0\end{cases}$ y $g(x)=1+x^2$

Para que valores de " x ", es continua: a) $(f\circ g)(x)$ b) $(g\circ f)(x)$

6. Determine el máximo valor de " k " para que la función: $f(x)=[\![\,\lvert x^2-2\rvert\,]\!]$ sea continua en el intervalo $[3,3+k)$

7. Bosqueje el gráfico de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

- $Domf=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$
- $rgf=[1,e)\cup(e,+\infty]$
- $f(0)=1$
- $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall x\left[x>N\Rightarrow \lvert f(x)-e\rvert<\varepsilon\right]$
- $\forall M>0,\exists\partial>0,\forall x\left[-\partial<x+1<0\Rightarrow f(x)>M\right]$

8. Bosqueje el gráfico de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

- Dom f=IR,
- $f(x)>0$ para $x\in(-\infty,-1]\cup(0,1)$
- $f(-1)=1\wedge f(0)=f(1)=0\wedge \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$
- $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall x\left[x<-N\Rightarrow \lvert f(x)-1\rvert<\varepsilon\right]$
- $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall x\left[x>N\Rightarrow \lvert f(x)+1\rvert<\varepsilon\right]$
- $\forall M>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<1-x<\partial\Rightarrow f(x)>M\right]$
- $\forall M>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<\lvert x+1\rvert<\partial\Rightarrow \lvert f(x)\rvert>M\right]$
- $\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<-x<\partial\Rightarrow \lvert f(x)-f(0)\rvert<\varepsilon\right]$
- $\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<x-1<\partial\Rightarrow \lvert f(x)\rvert<\varepsilon\right]$

9. Bosqueje el gráfico de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

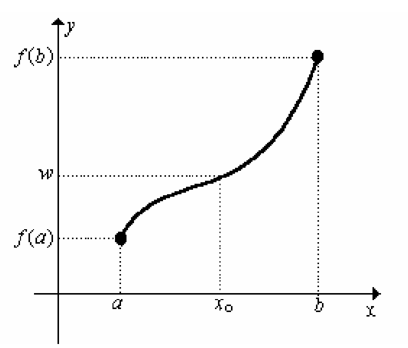
- f es continua en $(-5,2)\cup(2,10]$
- $f(3)=f(10)=0$
- $\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<x+5<\partial\Rightarrow\left|f(x)-3\right|<\varepsilon\right]$
- $\forall M>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<2-x<\partial\Rightarrow f(x)>M\right]$
- $\forall M>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<x-2<\partial\Rightarrow f(x)<-M\right]$

10. Bosqueje el gráfico de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

- f es continua en $(-\infty,0]\cup(0,3)\cup(3,\infty)$
- $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall x\left[x<-N\Rightarrow\left|f(x)\right|<\varepsilon\right]$
- $\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0,\forall x\left[-\partial<x<0\Rightarrow\left|f(x)-2\right|<\varepsilon\right]$
- $\forall M>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<x<\partial\Rightarrow f(x)<-M\right]$
- $\forall M>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<3-x<\partial\Rightarrow f(x)>M\right]$
- $\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0,\forall x\left[0<x-3<\partial\Rightarrow\left|f(x)\right|<\varepsilon\right]$
- $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall x\left[x>N\Rightarrow\left|f(x)+1\right|<\varepsilon\right]$
- $f(3)=f(5)=2\quad, f(7)=0$

2.5 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO PARA FUNCIONES CONTINUAS

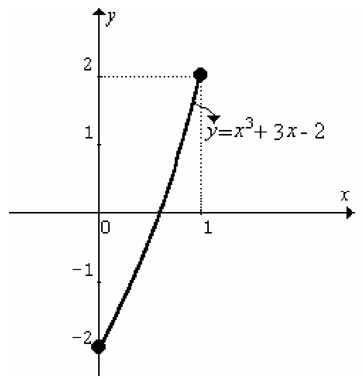
Sea f definida en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea "w" un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe al menos un número x_0 entre a y b tal que $f(x_0)=w$.



Ejemplo

Demuestre que la ecuación $x^3+3x-2=0$ tiene una solución real entre "0" y "1".
SOLUCIÓN:

Definamos la función $f(x)=x^3+3x-2$.
Observamos que: $f(0)=-2$ y $f(1)=2$



y como f es continua en $[0,1]$, por ser polinómica; aplicando el Teorema del Valor Intermedio, tenemos que si $w=0$ existirá un x elemento de $[0,1]$ que lo satisfaga. Es decir: $\exists x\in[0,1]$ tal que $f(x)=x^3+3x-2=0$

Ejercicios Propuestos 2.2

1. Enuncie y demuestre el teorema de Bolzano.
2. Enuncie y demuestre el teorema de Weierstrass.
3. Diga si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes proposiciones. En caso de ser verdaderas demuéstrelas y en caso de ser falsa, dé un contraejemplo.
   a) Si f es continua y no tiene ceros en $[a,b]$, entonces $f(x)>0$ para toda x en $[a,b]$ o $f(x)<0$, $\forall x\in[a,b]$
   b) Si f es continua en x_0 y $f(x_0)>0$, hay un intervalo $(x_0-\partial, x_0+\partial)$ tal que $f(x)>0$ en ese intervalo.
   c) El producto de dos funciones f y g es continua en "x_0" ,si f es continua en "x_0" pero g no.
   d) Si f es continua en "x_0" y g es discontinua en "x_0", entonces $f+g$ es discontinua en "x_0".
   e) Toda función continua en (a,b) es acotada.
   f) Toda función acotada en $[a,b]$ es continua en $[a,b]$
   g) Si f es continua e inyectiva en $[a,b]$ entonces su función inversa f^{-1} es continua en $[a,b]$
4. Demuestre que la ecuación: $x^5-4x^3-3x+1=0$ tiene una solución en el intervalo [2,3].
5. Si el peso de un niño al nacer es de 8 libras y después de un año el mismo niño tiene un peso de 16 libras, demuestre, empleando el teorema del valor intermedio para funciones continuas, que en algún instante de tiempo el niño alcanzó un peso de 11 libras.

Misceláneos

1. Diga si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes proposiciones. En caso de ser verdaderas demuéstrelas y en caso de ser falsa, dé un contraejemplo.
   a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ entonces f es continua en $x = a$.
   b) Si f y g son funciones continuas en $x = a$ entonces la función fg también es continua en $x = a$.
   c) La función de variable real con regla de correspondencia $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} & ; x > 2 \\ 2 & ; x \leq 2 \end{cases}$ es continua en $x = 2$.
   d) Si f es una función tal que $dom\ f = IR$ y $\forall a \in IR \ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe, entonces f es continua en todo su dominio.
   e) Si f es una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.
   f) Si f es una función de IR en IR tal que $f(x) = [\![\,|\operatorname{sen} x|\,]\!]$ entonces f es continua en $x = \pi$.
   g) Sea f una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a) \bullet f(b) > 0$ entonces no existe un valor $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.
   h) Si f y g son funciones que no son continuas en $x = a$ entonces la función $f + g$ no es continua en $x = a$.
   i) La función $f(x) = \begin{cases} 1 - x & ; x < 2 \\ x^2 - 2x & ; x \geq 2 \end{cases}$ es continua en todo su domino.
   j) Sea f una función de variable real con regla de correspondencia $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}; & x \neq 0 \\ 0 \quad ; & x = 0 \end{cases}$, entonces f es continua en todo su dominio.

2. Determine el valor de "a" para que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\cot x} - \dfrac{\pi}{2\cos x} & ; x < \frac{\pi}{2} \\ ax - 1 & ; x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ sea continua en $x = \frac{\pi}{2}$

3. Sea f una función de variable real tal que $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & ; x \leq -1 \\ \dfrac{Ax^5 + Bx^4 - Ax - B}{x^2 - 1} & ; -1 < x < 1 \\ x^2 & ; x \geq 1 \end{cases}$

   Determine los valores de A y B para que f sea continua en todos los reales.

4. Realice el bosquejo de la gráfica de una función f que satisfaga cada una de las siguientes proposiciones:
   - f es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$; $[0,1]$; $(1, +\infty)$.
   - $f(0) = f(3) = f(5) = 0 \quad f(1) = f(2) = 1$
   - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
   - $\forall N > 0\ \exists \delta > 0 \left[0 < x - 1 < \delta \Rightarrow f(x) > N\right]$
   - $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 \left[x > M \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon\right]$
   - $\forall x \in (3,5) \left[f(x) < 0\right]$