3 LA DERIVADA

OBJETIVOS:

- Definir derivada.
- Calcular ecuaciones de rectas tangentes y rectas normales a una curva.
- Realizar demostraciones formales de derivada.
- Calcular derivadas.

Desde la antigüedad (300 A.C.) existía el problema de la determinación de la ecuación de la recta tangente en un punto de una curva; recién en el siglo XVII fue resuelto este problema. Tratando de dar solución a lo planteado es como se da inicio al Calculo Diferencial. Este inicio se le atribuye a GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716) junto con ISAAC NEWTON (1642-1727), preocupado por describir la velocidad instantánea que lleva un móvil cuando se desplaza siguiendo una trayectoria, después veremos que es el mismo problema.

Empecemos primero estudiando el problema geométrico.

3.1 DEFINICIÓN DE PENDIENTE DE RECTA TANGENTE.

Suponga que se tenga el problema de encontrar la **ecuación de la recta tangente** a la gráfica de una función f, en un punto x_0, Fig. 3.1.

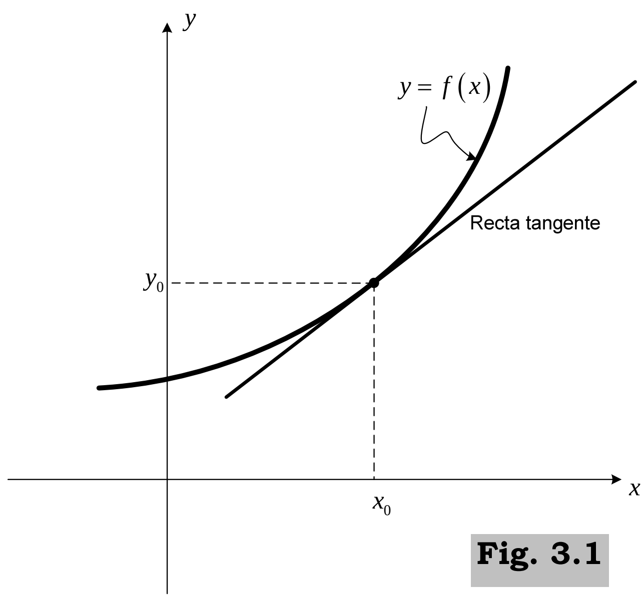


Fig. 3.1

La ecuación de la recta tangente estaría dada por:

$$y - f(x_0) = m_{\text{tg}}(x - x_0)$$

Ahora, habría que calcular la pendiente de la recta tangente.

Observe la Fig. 3.2

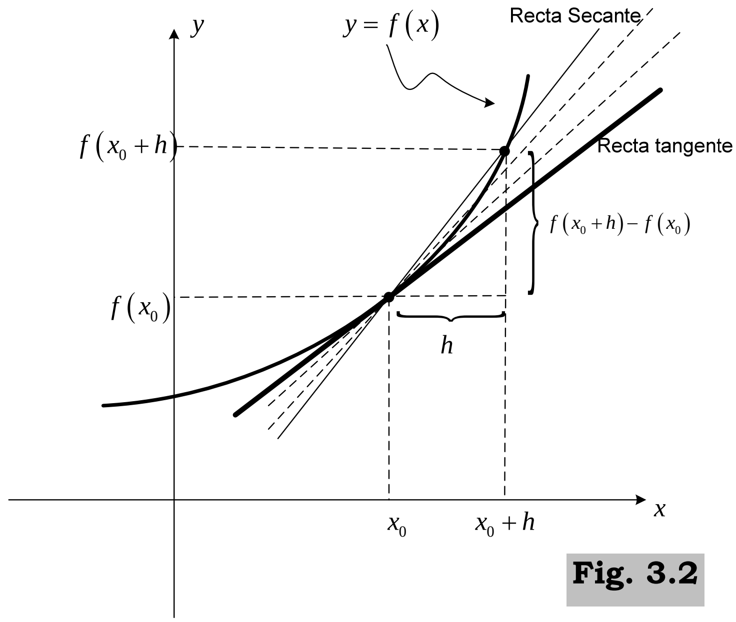


Fig. 3.2

La pendiente de la recta secante entre los puntos $\left(x_0, f(x_0)\right)$ y $\left(x_0+h, f(x_0+h)\right)$ sería $m_{\sec} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

La pendiente de la recta tangente se obtendría haciendo que h se haga cada vez más pequeña, porque en este caso la recta secante toma la posición de la recta tangente, y resolveríamos nuestro problema; es decir:

$$\boxed{m_{\text{tg}} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

3.2 VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Suponga que se tengan la ecuación del espacio e recorrido por un móvil, y que sea función del tiempo; es decir $e = f\left(t\right)$. Suponga ahora que se quiere determinar la velocidad media v_m en un intervalo de tiempo $\left[t_0, t_0+h\right]$, esta estaría dada por:

$$v_m = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{f\left(t_0+h\right)-f\left(t_0\right)}{t_0+h-t_0}$$

La velocidad instantánea v sería la velocidad media calculada en intervalos de tiempo Δt cada vez más pequeño; es decir:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(t_0 + h\right) - f\left(t_0\right)}{h}$$

Note que esta definición para la velocidad instantánea tiene la misma forma que la de la pendiente de la recta tangente, por tanto el problema sería el mismo.

De aquí se dará la definición de la derivada.

3.3 DEFINICIÓN DE DERIVADA

Sea f una función de variable real. Sea x_0 un punto del dominio de f. La ***derivada*** de f en "x_0", denotada como $f'(x_0)$, se define como:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Siempre que este límite exista.

Cuando la derivada en "x_0" existe se dice que es f es ***diferenciable*** en "x_0".

Otras notaciones que se emplean para la derivada son: y' o $D_x y$.

Leibniz utilizó la notación $\dfrac{dy}{dx}$.

En cualquier caso, la derivada en "x" sería:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

3.4 FORMA ALTERNATIVA

Presentaremos ahora una forma un tanto diferente para la derivada, que para algunos casos resulta muy útil.

En la expresión para la derivada, haciendo cambio de variable: $h = x - x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Lo anterior lo podemos observar de la pendiente de la recta tangente, Fig. 3.3.

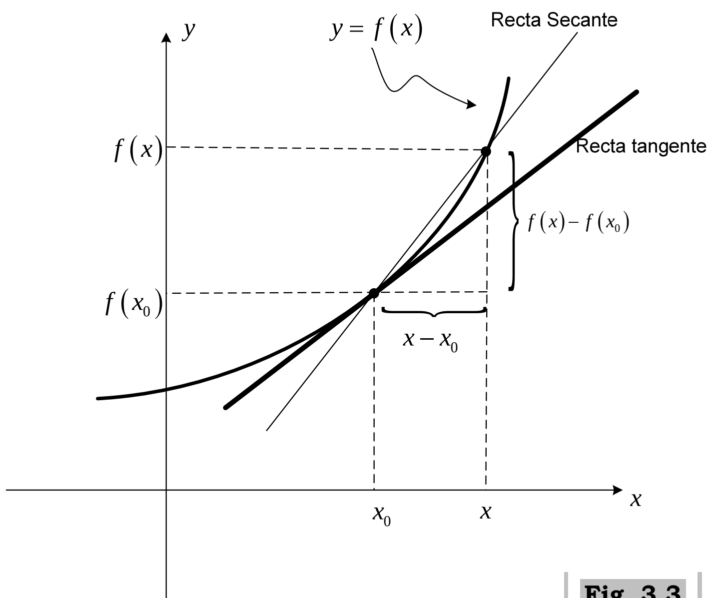


Fig. 3.3

La pendiente de la recta secante entre los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$ sería: $m_{\sec} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Entonces la pendiente de la recta tangente estaría dada por:

$$m_{tg} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ejemplo 1

Empleando la definición, hallar la derivada $f(x)=2x+1$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} f´(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2\left(x+h\right)+1\right]-\left[2x+1\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2x+2h+1-2x-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}2 \\ f´(x) &= 2 \end{aligned}$$

Empleando la forma alternativa:

$$\begin{aligned} f´(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{(2x+1)-(2x_0+1)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{2x+1-2x_0-1}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{2x-2x_0}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{2\left(x-x_0\right)}{\left(x-x_0\right)} \\ &= \lim_{x\to x_0}2 \\ f´(x_0) &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo. 2

Empleando la definición, hallar la derivada $f(x)=x^2$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} f´(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) \\ f´(x) &= 2x \end{aligned}$$

Empleando la forma alternativa:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0{}^2}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}(x+x_0)\\
&= x_0+x_0\\
f'(x_0) &= 2x_0
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 3.1

1. Sea $f(x)=x^2-2x+1$.

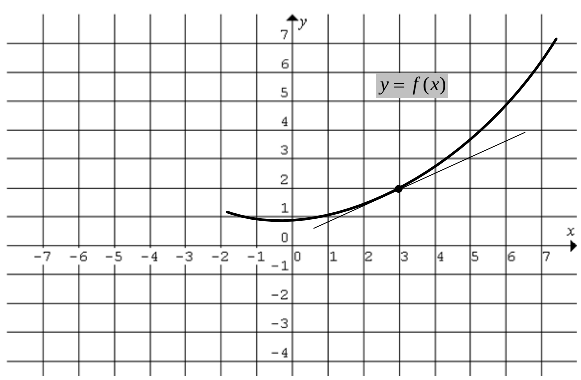
   a) Calcule el valor de $\dfrac{f(2.5)-f(2)}{0.5}$

   b) Calcule el valor de $\dfrac{f(2.3)-f(2)}{0.3}$

   c) Calcule el valor de $\dfrac{f(2.1)-f(2)}{0.1}$

   d) Calcule el valor de $f'(2)$ • Explique por qué los valores anteriores son aproximados a este resultado.

2. Hallar $f'(3)$, considerando la gráfica:



3. Empleando la definición, determine la derivada de:

a) $f(x)=3x+2$	d) $f(x)=-2x^2+x-1$
b) $f(x)=-2x+1$	e) $f(x)=2x^3$
c) $f(x)=x^2+2x-3$	f) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}$

3.5 DIFERENCIABILIDAD

Se tratará ahora de especificar las condiciones para que la derivada de una función de una variable real exista, lo cual dará paso a decir que la función será derivable o diferenciable en un punto. La diferenciabilidad es equivalente a derivabilidad para funciones de una variable real.

3.5.1 TEOREMA DE DERIVABILIDAD.

> Si f es **diferenciable** en "x_0", es decir $f'(x_0)$ existe, entonces f es continua en "x_0"

Demostración.

Expresemos lo siguiente:

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0)$$

Agrupando los dos primeros términos, dividiéndolo y multiplicándolo por $(x - x_0)$, suponga $x \neq x_0$, tenemos:

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

Ahora, tomando límite a todos los miembros de la ecuación, resulta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0}(x - x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x_0)$$

La expresión $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ es igual $f'(x_0)$, debido a que de hipótesis se dice que f es derivable en x_0. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) &= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \underbrace{\lim_{x \to x_0}(x - x_0)}_{0} + \underbrace{\lim_{x \to x_0} \overbrace{f(x_0)}^{constante}}_{f(x_0)} \\
&= f'(x_0)[0] + f(x_0) \\
&= 0 + f(x_0) \\
\lim_{x \to x_0} f(x) &= f(x_0)
\end{aligned}$$

Por tanto, la última expresión indica que f es continua en "x_0". L.Q.Q.D.

Al analizar el teorema, se concluye que **si una función es discontinua en "x_0" entonces no es diferenciable en "x_0"**.

También debe entenderse que **no toda función continua es diferenciable.**

Ejemplo

Hallar $f'(1)$ para $f(x) = |x-1|$

SOLUCIÓN:

Empleando la forma alternativa de la derivada:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|-0}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1} \end{aligned}$$

El último límite se lo obtiene aplicando límites laterales, es decir:

1. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(-1) = -1$

Como los límites laterales son diferentes, entonces $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$ no existe.

Observando la gráfica de $y = |x-1|$, Fig. 3.4

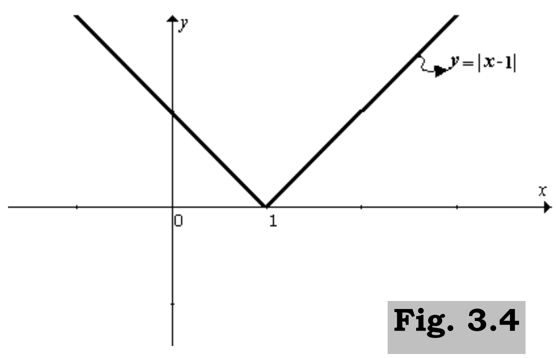


Fig. 3.4

Notamos que se puedan trazar rectas tangentes de diferentes pendientes a la derecha y a la izquierda de $x=1$, en este caso se dice que la gráfica de la función no es suave en $x=1$. Esta función aunque es continua en $x=1$, sin embargo no es diferenciable en ese punto; por tanto la continuidad no implica diferenciabilidad.

3.5.2 DERIVADAS LATERALES.

Por lo anterior, como la derivada es un límite, podemos definirla unilateralmente.

3.5.2.1 Derivada por derecha

La ***derivada por derecha*** del punto "x_0" de una función f se define como: $f'(x_0^{+}) = \lim\limits_{h\to 0^{+}} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ o por la forma alternativa: $f'(x_0^{+}) = \lim\limits_{x\to x_0^{+}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

3.5.2.2 Derivada por izquierda.

La ***derivada por izquierda*** del punto "x_0" de una función f se define como: $f'(x_0^{-}) = \lim\limits_{h\to 0^{-}} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ o por la forma alternativa: $f'(x_0^{-}) = \lim\limits_{x\to x_0^{-}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Por tanto, para que $f'(x_0)$ **exista**, se requiere que **las derivadas laterales existan y sean iguales**. Es decir, si $f'(x_0^{+}) \neq f'(x_0^{-})$, se dice que f no es derivable en "x_0" y su gráfica no será suave en ese punto.

Ejemplo

Hallar $f'(2)$ para $f(x)=\begin{cases} 2x-1; & x<2 \\ x^2-1; & x\geq 2 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Primero veamos si que es continua en $x=2$.

Como $\lim\limits_{x\to 2^{-}}(2x-1)=3$ y $\lim\limits_{x\to 2^{+}}(x^2-1)=3$ entonces f si es continua en $x=2$ -

Segundo. Para hallar $f'(2)$ debemos hallar las derivadas laterales debido a que f tiene diferente definición a la izquierda y la derecha de $x=2$.

$$f\acute{}(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(2x-1)-(2(2)-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$$f\acute{}(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x^2-1)-(2^2-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = 4$$

Por tanto, Como $f\acute{}(2^-) \neq f\acute{}(2^+)$ entonces $f\acute{}(2)$ no existe

Veamos ahora, un ejemplo de una función que aunque es continua y suave, en un punto, sin embargo no es diferenciable en ese punto.

Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$ hallar $f\acute{}(0)$

SOLUCIÓN:

Empleando la forma alternativa:

$$\begin{aligned} f\acute{}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} \\ f\acute{}(0) &= \infty \ (\textit{no existe}) \end{aligned}$$

Lo que ocurre es que la recta tangente, en $x = 0$, es vertical (pendiente infinita); observe su gráfica. Fig 3.5

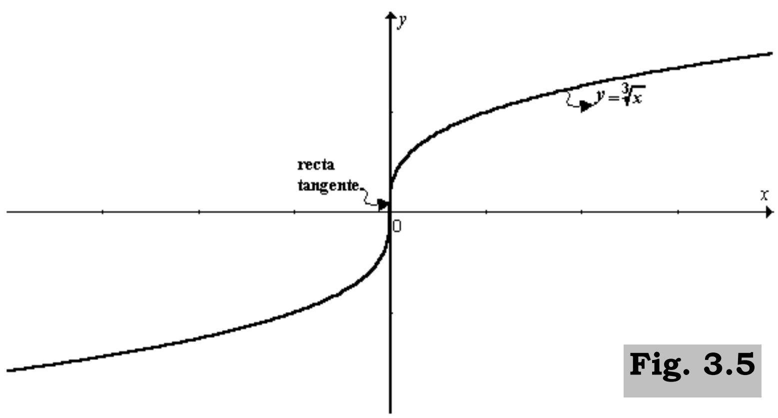


Fig. 3.5

Por tanto, si una función es ***diferenciable*** en un punto "x_0" ocurren tres cosas:

1. Es **continua** en ese punto
2. Es **suave** en ese punto
3. La **recta tangente no es vertical** en ese punto

Un problema de diseño

Ejemplo

Sea: $f(x)=\begin{cases} mx+b & ;x<2 \\ x^2 & ;x\geq 2\end{cases}$ Determine "m" y "b" para que f sea diferenciable en todo su dominio.

SOLUCIÓN:

Debemos considerar que para que la función sea diferenciable en todo su dominio tiene que ser continua y en todo punto su gráfica debe ser suave. Observando la regla de correspondencia que define a f, notamos que debemos centrarnos en dos cosas:

1. f debe ser continua en $x=2$, es decir:

$$\lim_{x\to 2^-}\left(mx+b\right)=f\left(2\right)=\lim_{x\to 2^+}\left(x^2\right)$$
$$2m+b=4$$

2. f debe ser suave en $x=2$, es decir: $f´(2^+)=f´(2^-)$

$$f´(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(x+2)=4$$
$$f´(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(mx+b)-(2m+b)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{mx+b-2m-b}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{m(x-2)}{x-2}=m$$

Por tanto $\boxed{m=4}$ y al reemplazar en la primera ecuación $2(4)+b=4$ tenemos $\boxed{b=-4}$

Ejercicios Propuestos 3.2

1. Hallar $f´(1)$ para $f(x)=\begin{cases} 2x+1; & x<1 \\ 2+x^2; & x\geq 1\end{cases}$

2. Hallar $f´(3)$ para $f(x)=\begin{cases} -x^2+10; & x<3 \\ -6x+17; & x\geq 3\end{cases}$

3. Hallar $f´(-2)$ para $f(x)=\begin{cases} 2x+1\ ; & x<-2 \\ x^2-7; & x\geq -2\end{cases}$

4. Sea la función f definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & ;x\leq 2 \\ ax+b & ;x>2\end{cases}$.

   Determine, si es posible, los valores de a y b para que f sea derivable en $x=2$

5. Sea la función f definida por $f(x)=\begin{cases} 3ax+b & ;x\leq 1 \\ ax^2-3bx+2 & ;x>1\end{cases}$

   Determine los valores para "a" y "b" para f que sea derivable en todo su dominio.

6. Sea la función f definida por $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & ;x\leq 1 \\ \frac{1}{x} & ;x>1\end{cases}$.

   Determine "a", "b" y "c" para que $f´(1)$ exista.

3.6 DERIVACIÓN

El proceso de encontrar la derivada de una función puede presentarse complicado si se lo hace aplicando la definición. Para hacer no tan engorroso este trabajo se dispone de técnicas y reglas.

3.6.1 FÓRMULAS DE DERIVACIÓN.

Para ciertas funciones definidas de manera simple se pueden emplear las fórmulas siguientes:

1. $D_x(k)=0 \quad ; \quad \forall k \in R$
2. $D_x(x)=1$
3. $D_x(x^n)=n\left(x^{n-1}\right)$
4. $D_x(e^x)=e^x$
5. $D_x(a^x)=a^x \ln a$
6. $D_x(\ln x)=\dfrac{1}{x}$
7. $D_x(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}$
8. $D_x(\operatorname{sen} x)=\cos x$
9. $D_x(\cos x)=-\operatorname{sen} x$
10. $D_x(\tan x)=\sec^2 x$
11. $D_x(\cot x)=-\csc^2 x$
12. $D_x(\sec x)=\sec x \tan x$
13. $D_x(\csc x)=-\csc x \cot x$

Demostraciones:

Las Demostraciones de algunas de las fórmulas anotadas serían:

1. Sea $f(x)=k$. Hallaremos su derivada empleando la definición: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$D_x(k)=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$ (La derivada de una constante es cero)

2. Sea $f(x)=x$ entonces: $D_x(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$

3. Sea $f(x)=x^n$ entonces: $D_x(x^n)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$. Consideraremos $n\in\mathbb{N}$. Desarrollando el binomio y simplificando:

$$D_x(x^n)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\ldots+nxh^{n-1}+h^n\right]-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\ldots+nxh^{n-1}+h^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\ldots+nxh^{n-2}+h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+\underbrace{\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h}_{0}+\underbrace{\ldots}_{0}+\underbrace{nxh^{n-2}}_{0}+\underbrace{h^{n-1}}_{0}\right]$$

$$D_x(x^n)=n\left(x^{n-1}\right)$$

4. Sea $f(x)=e^x$ entonces:

$$D_x(e^x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^xe^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h-1\right)}{h}=e^x\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h-1\right)}{h}}_{1}=e^x$$

6. Sea $f(x)=\ln x$ entonces:

$$D_x(\ln x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

$$=\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{h}{x}}}\right]^{\frac{1}{x}}=\ln\left(e^{1/x}\right)$$

$$D_x(\ln x)=\frac{1}{x}$$

8. Sea $f(x)=sen\,x$ entonces:

$$D_x(\operatorname{sen}x)=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\operatorname{sen}x\cos h+\operatorname{sen}h\cos x\right]-\operatorname{sen}x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}x(\cos h-1)+\operatorname{sen}h\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h\cos x}{h}$$

$$=\operatorname{sen}x\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}=\left(\operatorname{sen}x\right)(0)+\left(\cos x\right)(1)$$

$$D_x(\operatorname{sen}x)=\cos x$$

La demostración del resto de estas fórmulas se la dejamos para el lector.

Ejemplo 1

Si $f(x)=4$ entonces $f'(x)=0$ (FORMULA 1)

Ejemplo 2

Si $f(x)=x^2$ entonces $f'(x)=2x^{2-1}=2x$ (FORMULA 3)

Ejemplo 3

Si $f(x)=\sqrt{x}=(x)^{\frac{1}{2}}$ entonces $f'(x)=\frac{1}{2}(x)^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (FORMULA 3)

Ejemplo 4

Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^3$ en $x=1$

SOLUCIÓN:

Observe la Fig. 3.6

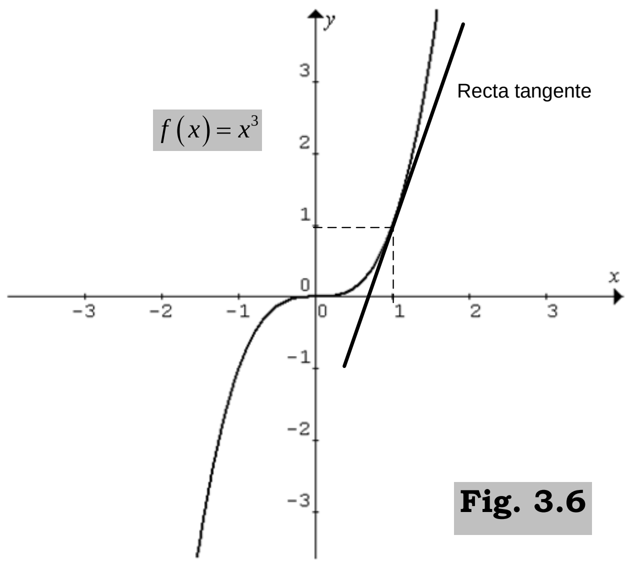


Fig. 3.6

La ecuación de una recta definida por un punto y su pendiente está dada por:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

El punto sería:

$$x_0=1 \quad \text{y} \quad y_0=f(x_0)=(1)^3=1$$

La pendiente sería:

$$m_{tg}=f'(x_0)=f'(1)=3x^2\Big|_{x=1}=3$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente sería: $\boxed{y-1=3(x-1)}$

Obviamente las reglas de correspondencia de las funciones no aparecen comúnmente en forma simple, por tanto habrá que considerar reglas para estos casos.

3.6.2 REGLAS DE DERIVACIÓN

Sean f y g funciones diferenciables y k una constante, entonces:

1. $\frac{d}{dx}(kf(x)) = kf´(x)$ (Múltiplo constante)
2. $\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f´(x)+g´(x)$ (Suma)
3. $\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)) = f´(x)-g´(x)$ (Resta)
4. $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f´(x)g(x)+f(x)g´(x)$ (Producto)
5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f´(x)g(x)-f(x)g´(x)}{\left[g(x)\right]^2}$ (Cociente)

Demostración

La justificación de las dos primeras de estas reglas sería:

1.
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(kf(x)) &= \lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{k\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}\\ &= k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= kf´(x)\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]+\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}\\ &= f´(x)+g´(x)\end{aligned}$$

3.
$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)g(x+h)\right]-\left[f(x)g(x)\right]}{h}$$

Al numerador le sumamos y restamos $f\left(x\right)g\left(x+h\right)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)-f\left(x\right)g\left(x+h\right)+f\left(x\right)g\left(x+h\right)}{h}$$

Agrupando y aplicando propiedades de los límites:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)\right]+\left[f(x)g(x+h)-f(x)g(x)\right]}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]g(x+h)+\left[g(x+h)-g(x)\right]f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}g(x+h)+\lim_{h\to 0}\frac{\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}f(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}$$

$$f'(x)\left[g(x)\right]+f(x)\left[g'(x)\right]$$

La demostración del resto de estas reglas se la dejamos para el lector.

Con lo anterior ya podemos obtener derivadas de funciones con reglas de correspondencias un tanto más complejas en su forma.

Ejemplo 1 (derivada del múltiplo constante)

Si $f(x)=\frac{4}{\sqrt[3]{x}}=4x^{-1/3}$ entonces $f'(x)=4\frac{d}{dx}\left(x^{-1/3}\right)=4\left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}\right)=-\frac{4}{3}x^{-4/3}$

Ejemplo 2 (Derivada de suma y resta)

Si $f(x)=4\sqrt{x}-\frac{2}{x}+3$ entonces

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(4\sqrt{x}\right)-\frac{d}{dx}\left(2x^{-1}\right)+\frac{d}{dx}(3)=4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+2x^{-2}+0$$

Ejemplo 3 (Derivada del producto)

Si $f(x)=xe^{x}$ entonces $f'(x)=\left[\frac{d}{dx}(x)\right]e^{x}+x\left[\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)\right]=1e^{x}+xe^{x}=e^{x}(1+x)$

Ejemplo 4 (Derivada del producto)

Si $f(x)=\left(x^{2}+2\right)\left(x^{3}+1\right)$ entonces:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left[\frac{d}{dx}\left(x^{2}+2\right)\right]\left(x^{3}+1\right)+\left(x^{2}+2\right)\left[\frac{d}{dx}\left(x^{3}+1\right)\right]\\&=(2x+0)\left(x^{3}+1\right)+\left(x^{2}+2\right)\left(3x^{2}+0\right)\\&=2x^{4}+2x+3x^{4}+6x^{2}\\&=5x^{4}+6x^{2}+2x\end{aligned}$$

Para el caso del producto de tres funciones, la regla sería:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)h(x)\right]=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

¡Generalícela!

Ejemplo 5 (Derivada del producto)

Si $f(x)=e^x senx \ln x$ entonces

$$f'(x)=\left[\frac{d}{dx}e^x\right]senx\ln x+e^x\left[\frac{d}{dx}senx\right]\ln x+e^x senx\left[\frac{d}{dx}\ln x\right]$$
$$=e^x senx\ln x+e^x\cos x\ln x+e^x senx\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ejemplo 6 (Derivada de cociente)

Si $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3+1}$ entonces

$$f'(x)=\frac{\left[\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)\right]\left(x^3+1\right)-\left(x^2+2\right)\left[\frac{d}{dx}\left(x^3+1\right)\right]}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{(2x)\left(x^3+1\right)-\left(x^2+2\right)\left(3x^2\right)}{\left(x^3+1\right)^2}$$
$$=\frac{2x^4+2x-3x^4-6x^2}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{-x^4-6x^2+2x}{\left(x^3+1\right)^2}$$

Con lo anterior, podemos resolver otros tipos problemas.

Ejemplo 7

Determine $f'(0)$, si $f(x)=x(x+1)(x+2)...(x+100)$.

SOLUCIÓN:

La derivada de f sería

$f'(x)=\left[(1)(x+1)(x+2)\cdots(x+100)\right]+\left[x(1)(x+2)\cdots(x+100)\right]+\left[x(x+1)(1)...(x+100)\right]+\cdots$ Ahora evaluamos la derivada en cero:

$$f'(0)=\left[(1)(0+1)(0+2)\cdots(0+100)\right]+\underbrace{\left[0(1)(0+2)\cdots(0+100)\right]}_{0}+\underbrace{\left[0(0+1)(1)...(0+100)\right]}_{0}+\cdots$$

$$f'(0)=(1)(2)\cdots(100)=100!$$

Ejemplo 8

Encuentre las ecuaciones de las rectas que contienen al punto $(-2,-5)$ y que son tangentes a la curva definida por la ecuación $y = x^2 + 4x$.

SOLUCIÓN:

Primeramente grafiquemos la curva y el punto. Fig. 3.7

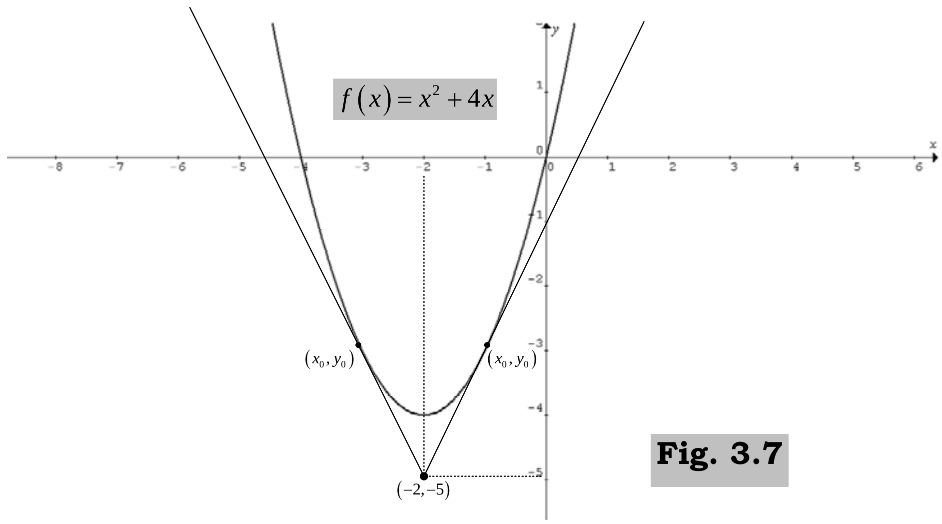


Fig. 3.7

Note que el punto $(-2,-5)$ no pertenece a la curva. Buscaremos ahora el punto de tangencia (observe que hay dos).

La pendiente de la recta tangente es la derivada f evaluada en $x = x_0$, es decir

$$m_{tg} = f'(x_0) = 2x + 4\big|_{x=x_0} = 2x_0 + 4$$

La pendiente de esta recta también se la puede calcular por los puntos $(-2,-5)$ y (x_0, y_0), es decir:

$$m_{tg} = \frac{y_0 - (-5)}{x_0 - (-2)} = \frac{y_0 + 5}{x_0 + 2}$$

El punto (x_0, y_0) pertenece a la curva, por tanto debe satisfacer su ecuación; es decir: $y_0 = x_0^{\ 2} + 4x_0$. Al reemplazar en la ecuación anterior, se obtiene:

$$m_{tg} = \frac{y_0 + 5}{x_0 + 2} = \frac{x_0^{\ 2} + 4x_0 + 5}{x_0 + 2}$$

Ahora igualamos las pendientes y encontramos x_0:

$$2x_0 + 4 = \frac{x_0^{\ 2} + 4x_0 + 5}{x_0 + 2}$$

$$2x_0^{\ 2} + 8x_0 + 8 = x_0^{\ 2} + 4x_0 + 5$$

$$x_0^{\ 2} + 4x_0 + 3 = 0$$

$$(x_0 + 3)(x_0 + 1) = 0$$

$$\boxed{x_0 = -3} \vee \boxed{x_0 = -1}$$

Estos valores los reemplazamos en $y_0 = x_0^{\,2} + 4x_0$, y obtenemos los respectivos y_0:

$$y_0 = (-3)^2 + 4(-3) = 9 - 12 = -3$$

$$y_0 = (-1)^2 + 4(-1) = 1 - 4 = -3$$

Por tanto, los puntos de tangencia son $(-3,-3)$ y $(-1,-3)$.

Las respectivas pendientes serían:

$$m_{tg} = 2(-3) + 4 = -2$$
$$m_{tg} = 2(-1) + 4 = +2$$

Finalmente las ecuaciones de las rectas tangentes serían:

$$\boxed{\begin{array}{c} y-(-3) = -2\left(x-(-3)\right) \\ y+3 = -2(x+3) \\ \boxed{y = -2x-9} \end{array}} \quad \text{y} \quad \boxed{\begin{array}{c} y-(-3) = 2\left(x-(-1)\right) \\ y+3 = 2(x+1) \\ \boxed{y = 2x-1} \end{array}}$$

Ejemplo 9

Si f, g y h son funciones tales que $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{2f(x)+3g(x)}$, $f(1)=3$, $g(1)=-3$, $f'(1)=-2$, $g'(1)=1$. Determine $h'(1)$.

Solución:

La derivada de h sería:

$$\begin{aligned} h'(x) &= D_x\left[\frac{f(x)g(x)}{2f(x)+3g(x)}\right] \\ &= \frac{D_x\left[f(x)g(x)\right]\left[2f(x)+3g(x)\right] - f(x)g(x)D_x\left[2f(x)+3g(x)\right]}{\left[2f(x)+3g(x)\right]^2} \\ &= \frac{\left[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\right]\left[2f(x)+3g(x)\right] - f(x)g(x)\left[2f'(x)+3g'(x)\right]}{\left[2f(x)+3g(x)\right]^2} \end{aligned}$$

Ahora evaluando en 1:

$$\begin{aligned} h'(1) &= \frac{\left[f'(1)g(1)+f(1)g'(1)\right]\left[2f(1)+3g(1)\right] - f(1)g(1)\left[2f'(1)+3g'(1)\right]}{\left[2f(1)+3g(1)\right]^2} \\ &= \frac{\left[(-2)(-3)+(3)(1)\right]\left[2(3)+3(-3)\right] - (3)(-3)\left[2(-2)+3(1)\right]}{\left[2(3)+3(-3)\right]^2} \\ &= \frac{\left[6+3\right]\left[6-9\right]+9\left[-4+3\right]}{\left[6-9\right]^2} \\ &= \frac{[9][-3]+9[-1]}{[-3]^2} \\ &= \frac{-36}{9} \\ h'(1) &= -4 \end{aligned}$$

Ejemplo 10

Demuestre que las gráficas de $f(x)=\sqrt{2}senx$ y $g(x)=\sqrt{2}\cos x$ se intersecan en ángulo recto en cierto punto tal que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

SOLUCIÓN:

La intersección se obtiene igualando las ecuaciones, es decir: $\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,x=\sqrt{2}\cos x$, de aquí se obtiene $\mathrm{tg}\,x=1$, lo cual quiere decir que $x=\frac{\pi}{4}$

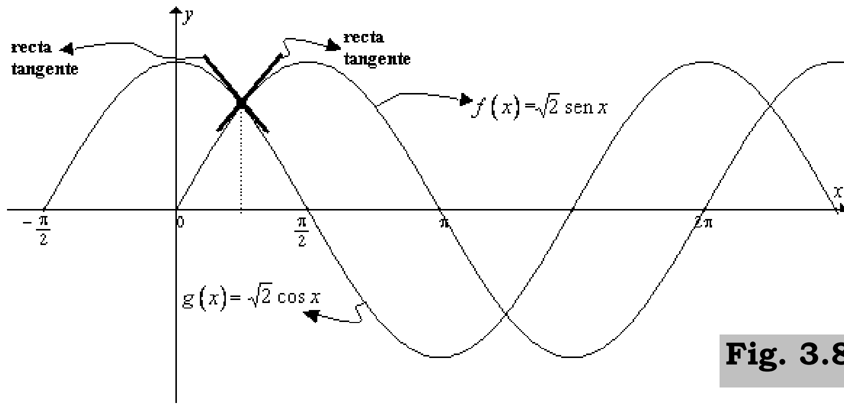


Fig. 3.8

Si las curvas se intersecan en ángulo recto quiere decir que las rectas tangentes en el punto de intersección son perpendiculares, es decir $m_1 m_2=-1$. Fig. 3.8

Si $f(x)=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,x$, entonces $f'(x)=\sqrt{2}\cos x$ que en el punto tenemos:

$$m_1=\sqrt{2}\cos\tfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$$

Si $g(x)=\sqrt{2}\cos x$, entonces $g'(x)=-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,x$ que en el punto tenemos:

$$m_2=-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{4}=-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1$$

Por tanto: $m_1 m_2=(1)(-1)=-1$ L.Q.Q.D.

Ejercicios Propuestos 3.3

1. Calcular las derivadas de las funciones cuyas reglas de correspondencia son:

a) $f(x)=4\sqrt[3]{x}+2\ln x-3e^x$ b) $f(x)=(x^3+2)(x^2+1)$ c) $f(x)=(x-senx)(x+\cos x)$ d) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x\,senx}$	e) $f(x)=\dfrac{xe^x}{senx+1}$ f) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2e^x\ln x$

2. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación $f(x)=x^2+2x+2$ en el punto $(1,5)$.

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función con regla de correspondencia $f(x)=3x^2+4$ y que sea paralela a la recta $3x+y+2=0$.

4. Encuentre las ecuaciones de las rectas que contienen al punto $(2,5)$ y que son tangentes a la curva definida por la ecuación $y = 4x - x^2$.

5. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la función f definida por $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 24x$ y que son paralelas a la recta cuya ecuación es $12x - y + 7 = 0$.

6. Una partícula se desplaza de izquierda a derecha siguiendo una trayectoria definida por la ecuación $y = x^2$. Determine el punto de la trayectoria para que la partícula se desplace ahora por la tangente de la trayectoria en ese punto y logre alcanzar el punto (4,15).

7. Una partícula se desplaza de izquierda a derecha siguiendo una trayectoria definida por la ecuación $y = 7 - x^2$. Un observador se encuentra el punto (4,0). Encuentre la distancia cuando la persona observa la partícula por primera vez.

8. Determine $f'(0)$, si $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-50)$

9. Si f , g y h son funciones tales que $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{3f(x) - 4g(x)}$, $f(3) = 2$, $g(3) = -2$, $f´(3) = -1$, $g´(3) = 2$. Determine $h´(3)$.

Para funciones compuestas disponemos de la regla de la cadena.

3.6.2.1 Regla de la Cadena

Sea $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Si g es diferenciable en "x_0" y f diferenciable en "$g(x_0)$" entonces la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es diferenciable en "x_0" y

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x)) \right|_{x=x_0} = f´(g(x_0))\left[g´(x_0)\right]$$

O lo que es lo mismo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\bigg|_{u=g(x)}$$

Ejemplo 1

Si $y = (x^2 + 2)^{20}$ entonces haciendo $u = g(x) = x^2 + 2$ tenemos $y = f(u) = u^{20}$ de donde $\dfrac{dy}{du} = 20u^{19}$ y $\dfrac{du}{dx} = 2x$.

Por tanto $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\left(20u^{19}\right)(2x)$ que al reemplazar "u" resulta

$$\frac{dy}{dx}=\left(20\left(x^2+2\right)^{19}\right)(2x)=40x\left(x^2+2\right)^{19}$$

El ejemplo anterior fue resuelto con un enfoque de cambio de variable para observar la regla de cadena. Pero en la práctica esto no es necesario, la regla de la cadena puede ser aplicada de manera rápida.

Ejemplo 2

Si $y=sen\underbrace{\left(x^3-3x\right)}_{u}$ entonces $y\acute{}=D_u\left(senu\right)D_x\left(x^3-3x\right)=\left[\cos\left(x^3-3x\right)\right]\left[3x^2-3\right]$

Ejemplo 3

Si $y=\underbrace{\left[\frac{x^3+3x^2+x}{x^2-1}\right]}_{u}^{30}$ entonces

$$y\acute{}=30\left[\frac{x^3+3x^2+x}{x^2-1}\right]^{29}D_x\left[\frac{x^3+3x^2+x}{x^2-1}\right]$$

$$=30\left[\frac{x^3+3x^2+x}{x^2-1}\right]^{29}\left[\frac{\left(3x^2+6x+1\right)\left(x^2-1\right)-\left(x^3+3x^2+x\right)(2x)}{\left(x^2-1\right)^2}\right]$$

Para el caso de funciones de la forma $y=f\left(g(h(x)\right)$ haciendo que $v=h(x)$ tenemos $y=f\left(g(v)\right)$ y ahora haciendo que $u=g(v)$ tenemos $y=f\left(u\right)$; entonces $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$.

O más simplemente $y\acute{}=\left[f\acute{}\left(g(h(x))\right)\right]\left[g\acute{}(h(x))\right]\left[h\acute{}(x)\right]$

Ejemplo 4

Si $y=\cos^4\left(3x^2\right)=\underbrace{\left[\cos\underbrace{\left(3x^2\right)}_{v}\right]}_{u}^{4}$ entonces:

$$\begin{aligned} y' &= 4\left[\cos\left(3x^2\right)\right]^3 D_x\left[\cos\left(3x^2\right)\right] \\ &= 4\left[\cos\left(3x^2\right)\right]^3\left[-\operatorname{sen}\left(3x^2\right)\right]D_x\left(3x^2\right) \\ &= 4\left[\cos\left(3x^2\right)\right]^3\left[-\operatorname{sen}\left(3x^2\right)\right][6x] \end{aligned}$$

Ahora analicemos los siguientes ejercicios resueltos:

Ejercicio Resuelto 1

Si $f(2)=4$, $f'(4)=6$, $f'(2)=-2$ hallar:

a) $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^3$ en $x=2$ b) $(f\circ f)'(2)$

SOLUCIÓN:

a) $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$ que en $x=2$ sería:

$$3[f(2)]^2 f'(2) = 3(4)^2(-2) = -96$$

b) $(f\circ f)'(2) = [f(f(2))]' = \left[f'(\overbrace{f(2)}^{4})\right][f'(2)] = [f'(4)][f'(2)] = (6)(-2) = -12$

Ejercicio Resuelto 2

Si $H=\dfrac{f\circ g}{h}$ y además: $h(2)=-1;\ g(2)=3;\ f(3)=2;\ h'(2)=-2;\ f'(3)=5;\ g'(2)=-3$; determine $H'(2)$.

SOLUCIÓN:

Como $H(x)=\dfrac{f\circ g}{h}$ entonces:

$$\begin{aligned} H'(x) = D_x\left[\frac{f(g(x))}{h(x)}\right] &= \frac{D_x[f(g(x))]h(x) - f(g(x))h'(x)}{[h(x)]^2} \\ &= \frac{[f'(g(x))]g'(x)h(x) - f(g(x))h'(x)}{[h(x)]^2} \end{aligned}$$

que en $x=2$ sería:

$$\begin{aligned} H'(2) &= \frac{\left[f'(\overbrace{g(2)}^{3})\right]g'(2)h(2) - f(g(2))h'(2)}{[h(2)]^2} \\ &= \frac{[f'(3)](-3)(-1) - [f(3)](-2)}{(-1)^2} \\ &= \frac{(5)(-3)(-1)-(2)(-2)}{1} \\ H'(2) &= 19 \end{aligned}$$

Ejercicio Resuelto 3

Demuestre que la derivada de una función par es una función impar

SOLUCIÓN:

Sea f una función par, entonces se cumple que $f(-x) = f(x)$. Ahora tomando derivada a ambos miembros de la igualdad tenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} D_x\left[f(-x)\right] &= D_x\left[f(x)\right] \\ \left[f'(-x)\right](-1) &= f'(x) \\ -f'(-x) &= f'(x) \\ f'(-x) &= -f'(x) \end{aligned}}$$

La última igualdad nos indica que f' es una función impar. L.Q.Q.D

Finalmente las fórmulas de derivadas para funciones compuestas quedarían:

Sea $u = u(x)$, entonces:

1. $D_x(u^n) = n\left(u^{n-1}\right)u'$
2. $D_x(e^u) = e^u u'$
3. $D_x(a^u) = a^u(\ln a)u'$
4. $D_x(\ln u) = \dfrac{1}{u}u'$
5. $D_x(\log_a u) = \dfrac{1}{u\ln a}u'$
6. $D_x(\operatorname{sen} u) = (\cos u)u'$
7. $D_x(\cos u) = (-\operatorname{sen} u)u'$
8. $D_x(\tan u) = \left(\sec^2 u\right)u'$
9. $D_x(\cot u) = \left(-\csc^2 u\right)u'$
10. $D_x(\sec u) = (\sec u \tan u)u'$
11. $D_x(\csc u) = (-\csc u \cot u)u'$

Ejercicios Propuestos 3.4

1. Calcular las derivadas de las funciones cuyas reglas de correspondencia son:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$	e) $f(x)=\left(\dfrac{senx}{\cos 2x}\right)^3$
b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$	f) $f(x)=\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]$
c) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	g) $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}\right)-\dfrac{1}{x^2-4}$
d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$	

2. Si $V=\{f\,/\,f \text{ es una función derivable en un intervalo } I\}$. Demuestre que:

   $\forall f\in V\left[f(-x)=-f(x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)\right]$ (La derivada de una función impar es una función par)

3. Hallar $(f\circ g)'(x)$, si $f(u)=e^{u^2}$ y $u=g(x)=\sqrt[4]{1+\cos^2(2x)}$

4. Sean *f*, *g* y *h* funciones diferenciales para todo $x\in IR$, tales que:

   $g(a)=2,\ g'(a)=-2,\ h(2)=3,\ h'(2)=-1,\ f(3)=3,\ f'(3)=-5,\ f(a)=a,\ f'(a)=-2$.

   $h(a)=a,\quad h'(a)=4$

   En $x=a$ determine el valor de:

   a) $(g\circ f)'$ b) $(g\circ h)'$ c) $(h\circ g)'$

   d) $(f\circ h\circ g)'$ e) $\left(\dfrac{f\circ h\circ g-h\circ g}{g\circ f}\right)'$

5. Sea $f(0)=0$ y $f'(0)=2$, encuentre la derivada de $f(f(f(f(x))))$ en $x=0$.

6. Suponga que f es derivable y que existen 2 puntos x_1 y x_2 tales que $f(x_1)=x_2$ y $f(x_2)=x_1$. Sea $g(x)=f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)$ pruebe que $g'(x_1)=g'(x_2)$

7. Pruebe que si un polinomio $p(x)$ es divisible entre $(ax+b)^2$ entonces $p'(x)$ es divisible entre $(ax+b)$.

   Sugerencia: Escriba el polinomio de la forma $p(x)=\left[c(x)\right](ax+b)^2$ y derívelo.

3.6.3 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La derivada es una función por tanto se podría obtener también la derivada de esta función y así sucesivamente. Es decir:

Sea $y=f(x)$ una función "n" veces derivable, entonces:

La ***primera derivada*** es:

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=D_x y=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

La ***segunda derivada*** es:

$$D_x(y')=y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=D_x^2 y=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

La ***tercera derivada*** es:

$$D_x(y'')=y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}=D_x^3 y=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}$$

En fin, La $n-ésima$ ***derivada*** es:

$$y^n=f^n(x)=\frac{d^ny}{dx^n}=D_x^n y=\lim_{h\to 0}\frac{f^{n-1}(x+h)-f^{n-1}(x)}{h}$$

Ejemplo 1

Hallar $D_x^n\left(\frac{1}{1-2x}\right)$

SOLUCIÓN:

Aquí tenemos: $y=\frac{1}{1-2x}=(1-2x)^{-1}$.

Obteniendo derivadas hasta poder generalizarla, resulta:

$$y'=-(1-2x)^{-2}(-2)=(1-2x)^{-2}2=1!(1-2x)^{-2}2^1$$
$$y''=2(-2)(1-2x)^{-3}(-2)=2(1-2x)^{-3}2^2=(2!)(1-2x)^{-3}2^2$$
$$y'''=2(-3)(1-2x)^{-4}(-2)2^2=(2\times 3)(1-2x)^{-4}2^3=(3!)(1-2x)^{-4}2^3$$
$$y^{IV}=(2\times 3)(-4)(1-2x)^{-5}(-2)2^3=(2\times 3\times 4)(1-2x)^{-5}2^4=(4!)(1-2x)^{-5}2^4$$

Directamente la quinta derivada sería $y^V=(5!)(1-2x)^{-6}2^5$

Por tanto la "n-ésima" derivada sería: $y^n=(n!)(1-2x)^{-(n+1)}2^n$

Ejemplo 2

Hallar $D_x^n\left(\dfrac{1}{1+3x}\right)$

SOLUCIÓN:

Aquí tenemos: $y=\dfrac{1}{1+3x}=(1+3x)^{-1}$.

Obteniendo derivadas:

$$
\begin{aligned}
y' &= -(1+3x)^{-2}(3)\\
y'' &= +2(1+3x)^{-3}(3^2)\\
y''' &= -(2\times 3)(1+3x)^{-4}(3^3)\\
y^{IV} &= +(2\times 3\times 4)(1+3x)^{-5}(3^4)
\end{aligned}
$$

Directamente la quinta derivada sería $y^V=-(5!)(1+3x)^{-6}(3^5)$

Por tanto la "n-ésima" derivada sería: $y^n=(-1)^n(n!)(1+3x)^{-(n+1)}(3^n)$

Ejemplo 3

Demuestre que $D_x^n(x^n)=n!$; $n\in\mathbb{N}$

SOLUCIÓN:

Como $y=x^n$ entonces:

$$
\begin{aligned}
y' &= nx^{n-1}\\
y'' &= n(n-1)x^{n-2}\\
y''' &= n(n-1)(n-2)x^{n-3}\\
&\cdots\\
y^n &= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-(n-1))x^{n-n}\\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(1)\\
&= n!
\end{aligned}
$$

Ejercicio Propuesto 3.5

1. Calcular las derivadas de orden superior indicadas.

a. $\dfrac{d^4}{dx^4}\left[\cos\left(x^2\right)\right]$	d. $D_x{}^n\left(\dfrac{5}{4-x}\right)$
b. $\dfrac{d^2}{dx^2}\left[\dfrac{x\,sen^2(\pi x)}{1+x}\right]$	e. $D_x{}^{30}\left[\dfrac{1+x}{1-x}\right]$
c. $\dfrac{d^n}{dx^n}\left[xe^x\right]$	f. $\dfrac{d^{35}}{dx^{35}}\left[xsenx\right]$

2. Determine $\frac{d}{dx}\left[x\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1+x}\right)\right]$
3. Usando el símbolo factorial, encuentre una fórmula para:

$$D_x^n\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right),\ n\in\mathbb{N}$$

4. Determine un polinomio P de grado 3 tal que $P(1)=1$, $P'(1)=3$, $P''(1)=6$, $P'''(1)=12$.

Hasta aquí hemos tratado con funciones cuyas reglas de correspondencia estaban dadas por una ecuación de la forma $y=f(x)$, esta forma la llamaremos en adelante **EXPLÍCITA**; suponga ahora que la ecuación de una función esté dada en la forma $F(x,y)=0$, forma que le llamaremos **IMPLÍCITA**, y suponga que se desea obtener la derivada y' de esta ecuación sin necesidad de despejar y; de ahí la necesidad de mencionar mecanismo de derivación para este tipo de problema.

3.6.4 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Para obtener y' en una función implícita $F(x,y)=0$ sin necesidad de despejar y; es más, suponga que no se pueda despejar y, hay que considerarla como $F(x,f(x))=0$ y derivando cada miembro de la ecuación tomando en cuenta las reglas mencionadas lograríamos lo deseado.

Ejemplo

Sea $x^4-y^5=0$ la ecuación de una función (asegúrese que en verdad representa una función) la derivada la podemos obtener por una de las siguientes formas:

1. Despejando y (forma explícita: $y=x^{4/5}$) entonces:

$$y'=\frac{4}{5}x^{-1/5}$$

2. Sin despejar y (forma implícita: $x^4-y^5=0$).

La consideraremos como $x^4-\left[f(x)\right]^5=0$. Ahora derivamos cada miembro de la ecuación:

$$D_x\left[x^4-\left[f(x)\right]^5\right]=D_x\left[0\right]$$

$$4x^3-5\left[f(x)\right]^4f'(x)=0$$

Ahora despejamos $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{4x^3}{5\left[f(x)\right]^4}$$

Por ahora podemos comprobar que los resultados son los mismos, simplemente habría que reemplazar $f(x)=x^{4/5}$:

$$f'(x)=\frac{4x^3}{5\left[f(x)\right]^4}=\frac{4x^3}{5\left[x^{4/5}\right]^4}=\frac{4x^3}{5x^{16/5}}=\frac{4}{5}x^{-1/5}$$

Ejemplo 2

Sea $x^2+y^2=1$ con $y\geq 0$ (semicircunferencia), hallar y'

SOLUCIÓN:

PRIMER MÉTODO.

Como es posible despejar y, tenemos $y=+\sqrt{1-x^2}$

Entonces: $\boxed{\begin{aligned} y' &= \tfrac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-1/2}(-2x)\\ &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{y}\end{aligned}}$

SEGUNDO MÉTODO.

Implícitamente consiste en observar la ecuación dada como $x^2+\left[f(x)\right]^2=1$ y tomar derivada a ambos miembros de la igualdad: $\boxed{\begin{aligned} &D_x\left(x^2+\left[f(x)\right]^2\right)=D_x(1)\\ &2x+2f(x)f'(x)=0\end{aligned}}$

que es lo mismo que: $2x+2yy'=0$

despajando y' resulta: $\boxed{y'=-\frac{x}{y}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

Una dificultad puede ser que la ecuación dada no represente lugar geométrico.

Ejemplo

Suponga que la ecuación fuese $x^2+y^2=-1$

Esta ecuación no representa lugar geométrico, sin embargo obtener y' sería de la misma forma que el ejemplo anterior.

En los ejemplos anteriores se demuestra que la derivación implícita es válida, la comprobación no siempre va a ser posible. Pero lo que se requiere es obtener la derivada y es lo que hemos dejado explicado.

Observe además que las ecuaciones implícitas podrían representar no sólo funciones sino una relación cualquiera, entonces estaríamos en capacidad de obtener la derivada en cualquier punto de esa relación.

Ahora analicemos los siguientes ejercicios resueltos.

Ejercicio Resuelto 1

Hallar y' para $4x^3 + 7xy^2 = 2y^3$

SOLUCIÓN:

Obteniendo derivada a ambos miembros y resolviendo tenemos:

$$D_x\left(4x^3 + 7xy^2\right) = D_x\left(2y^3\right)$$
$$12x^2 + \left(7y^2 + 7x2yy'\right) = 6y^2y'$$
$$12x^2 + 7y^2 + 14xyy' = 6y^2y'$$

Despejando y' resulta: $\boxed{y' = \dfrac{12x^2 + 7y^2}{6y^2 - 14xy}}$

Ejercicio Resuelto 2

Hallar y' para $x + \ln\left(x^2y\right) + 3y^2 = 2x^2 - 1$

SOLUCIÓN:

Obteniendo derivada a ambos miembros, tenemos:

$$D_x\left(x + \ln\left(x^2y\right) + 3y^2\right) = D_x\left(2x^2 - 1\right)$$
$$1 + \frac{1}{x^2y}\left[2xy + x^2y'\right] + 6yy' = 4x$$
$$1 + \frac{2}{x} + \frac{y'}{y} + 6yy' = 4x$$

Despejando y' resulta:

$$\boxed{y' = \frac{4x - 1 - \frac{2}{x}}{6y + \frac{1}{y}}}$$

Ejercicio Resuelto 3

Hallar y' para $\cos\left(xy^2\right) = y^2 + x\sqrt{x+y}$

SOLUCIÓN:

Obteniendo derivada a ambos miembros, tenemos:

$$D_x\left(\cos\left(xy^2\right)\right) = D_x\left(y^2 + x\sqrt{x+y}\right)$$
$$-\operatorname{sen}\left(xy^2\right)\left[1y^2 + x2yy'\right] = 2yy' + 1\sqrt{x+y} + x\left[\tfrac{1}{2}(x+y)^{-1/2}(1+y')\right]$$
$$-y^2\operatorname{sen}\left(xy^2\right) - 2xyy'\operatorname{sen}\left(xy^2\right) = 2yy' + \sqrt{x+y} + \frac{x}{2\sqrt{x+y}} + \frac{xy'}{2\sqrt{x+y}}$$

Despejando y' resulta:

$$\boxed{y' = \frac{-y^2\operatorname{sen}\left(xy^2\right) - \sqrt{x+y} - \dfrac{x}{2\sqrt{x+y}}}{2y + \dfrac{x}{2\sqrt{x+y}} + 2xy\operatorname{sen}\left(xy^2\right)}}$$

Ejercicio Resuelto 4

Determinar la ecuación de la recta normal a la curva cuya ecuación es $x\cos y = sen(x+y)$ en $P(0,0)$.

SOLUCIÓN:

La recta normal es la perpendicular a la recta tangente, por tanto $m_{normal} = -\dfrac{1}{m_{\text{tg}}}$

Ahora $m_{\text{tg}} = y'\big|_{(0,0)}$. Obteniendo y' resulta:
$$\begin{array}{|l|}\hline D_x\left(x\cos y\right) = D_x\left(\text{sen}(x+y)\right)\\ 1\cos y + x(-\text{sen}\, y y') = \cos(x+y)[1+y']\\ \hline\end{array}$$

En la última expresión se puede reemplazar las coordenadas del punto, es decir: $x=0$ y $y=0$ y luego despejar y':
$$\begin{array}{|l|}\hline \cos 0 + 0(-\text{sen}\, 0 y') = \cos(0+0)[1+y']\\ 1+0 = 1+y'\\ y'=0\\ \hline\end{array}$$.

Esto quiere decir que la recta tangente es horizontal y por tanto la recta normal será vertical con pendiente $m_{normal} = -\dfrac{1}{0} = -\infty$

Y su ecuación será:
$$\begin{array}{|l|}\hline y-0 = -\dfrac{1}{0}(x-0)\\ x=0\\ \hline\end{array}$$
(el eje y).

Ejercicio Resuelto 5

Sea $x^2y - 2y^3 = 2$. Encuentre y'' en (2,1).

SOLUCIÓN:

Primero se encuentra y':
$$\begin{array}{|l|}\hline D_x\left(x^2y-2y^3\right) = D_x(2)\\ 2xy + x^2y' - 6y^2y' = 0\\ \hline\end{array}$$

En (2,1) sería:
$$\begin{array}{|l|}\hline 2(2)(1) + (2)^2y' - 6(1)^2y' = 0\\ y' = 2\\ \hline\end{array}$$

Ahora encontramos y'' volviendo a derivar implícitamente:
$$\begin{array}{|r|}\hline D_x\left(2xy + x^2y' - 6y^2y'\right) = D_x(0)\\ 2y + 2xy' + 2xy' + x^2y'' - \left(12yy'y' + 6y^2y''\right) = 0\\ \hline\end{array}$$

En (2,1) sería:
$$\begin{array}{|r|}\hline 2(1) + 2(2)(2) + 2(2)(2) + (2)^2y'' - 12(1)(2)(2) - 6(1)^2y'' = 0\\ 2+8+8+4y'' - 48 - 6y'' = 0\\ y'' = 15\\ \hline\end{array}$$

Ejercicios Propuestos 3.6

1. Encontrar $\frac{dy}{dx}$ para:

a. $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ b. $\ln(xy)+y=1$ c. $e^{xy}+\ln y=0$	d. $\sec y+\tan y=xy$ e. $\ln(xy)+\sqrt{y}=5$

2. Demuestre que la rectas tangente a las curvas definidas por las ecuaciones $y^2=4x^3$ y $2x^2+3y^2=14$ en el punto $(1,2)$ son perpendiculares entre sí.
3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación $x^3+3xy^3+y=5$ en el punto $(1,1)$
4. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la grafica de $(x^2+y^2)^3=8x^2y^2$ en el punto $(1,-1)$
5. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación $xy-sen\left[\frac{\pi}{2}(x+y)\right]+1=2$ en el punto $(1,1)$
6. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=2$ que es paralela a la recta $x+y+6=0$
7. Determine las ecuaciones de la recta normal a la curva que tiene por ecuación $x^2y^2=(y+1)^2(4-y)^2$ en el punto $(0,-2)$.
8. Determine la ecuación de la recta normal a la curva definida por la ecuación $x\cos(2y)=3\operatorname{sen}(x+y)$ en el punto $(0,0)$.
9. Determine todos los puntos de la función f que define la ecuación $x^2+y^3=2xy$ donde la recta tangente a f sea horizontal.
10. Encuentre y'' si $x^3-4y^2+3=0$
11. Calcula: $\frac{d^2y}{dx^2}$ para $x^{2/3}+y^{2/3}=1$
12. Para la función $y=f(x)$ dada en forma implícita por la ecuación

$x-\operatorname{tg} y+e^{y-\frac{\pi}{4}}=2$ determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ en el punto $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$.

3.6.5 DERIVACIÓN PARAMÉTRICA

Las ecuaciones de ciertas trayectorias son dadas en la forma:

$$C:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

Tanto x como y están expresadas en términos del parámetro t, el objetivo será hallar directamente $\frac{dy}{dx}$.

3.6.5.1 Teorema de la derivada de funciones definidas por ecuaciones paramétricas.

Suponga que $x = x(t)$ y $y = y(t)$ son funciones continuamente diferenciables, y que $x'(t) \neq 0$ para cualquier "t" de cierto intervalo. Entonces las ecuaciones paramétricas definen a "y" como una función diferenciable de "x" y su derivada es:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

Ejemplo 1

Sea la circunferencia con ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = 1$, la derivada también puede ser hallada partiendo de su ecuación paramétrica $C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$, es decir: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{-\operatorname{sen} t} = -\frac{x}{y}$

Esta manera representaría un tercer método para hallar la derivada, tal como se puede observar.

Ejemplo 2

Sea $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t sent \end{cases}$ hallar $\frac{dy}{dx}$

SOLUCIÓN:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t sent + e^t \cos t}{e^t \cos t - e^t sent} = \frac{sent + \cos t}{\cos t - sent}$$

Para hallar derivadas de orden superior, observe que la primera derivada es función de "t", es decir que $\frac{dy}{dx} = y'(t)$; por tanto:

Segunda derivada: $$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[y'(t)\right] = \frac{d\left[y'(t)\right]}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d\left[y'(t)\right]}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = y''(t)}$$

Tercera Derivada: $\boxed{\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{d}{dx}\left[y''(t)\right]=\dfrac{d\left[y''(t)\right]}{dt}\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\frac{d\left[y''(t)\right]}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=y'''(t)}$

Y así sucesivamente.

Ejemplo 1

Sea $C:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\operatorname{sen} t\end{cases}$ hallar $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

SOLUCIÓN:

Ya encontramos la **primera derivada**: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t}{-\operatorname{sen} t}=-\cot(t)$

La **segunda derivada** sería: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}(y')}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{d}{dt}(-\cot t)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\left(-\csc^2 t\right)}{-sent}=-\csc^3 t$

La **tercera derivada** sería: $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{\frac{d}{dt}(y'')}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(-\csc^3 t\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-3\csc^2 t\left(-\csc t\cot t\right)}{-sent}=-3\csc^4 t\cos t$

Ejemplo 2

Sea $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t sent\end{cases}$ hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

SOLUCIÓN:

La **primera derivada** ya la encontramos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t sent+e^t\cos t}{e^t\cos t-e^t sent}=\frac{sent+\cos t}{\cos t-sent}$$

La **segunda derivada** sería:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(y')}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{sent+\cos t}{\cos t-sent}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\frac{(\cos t-sent)(\cos t-sent)-(sent+\cos t)(-sent-\cos t)}{(\cos t-sent)^2}}{e^t\cos t-e^t sent}$$

$$=\frac{\frac{(\cos t-sent)^2+(sent+\cos t)^2}{(\cos t-sent)^2}}{e^t\cos t-e^t sent}=$$

$$=\frac{\cos^2 t-2\cos t sent+sen^2 t+sen^2 t+2\cos t sent+\cos^2 t}{e^t(\cos t-sent)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{e^t(\cos t-sent)^3}$$

Ejemplo 3

Calcular $\frac{d^n y}{dx^n}$ para: $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^m \quad ; m \in R \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Hallando las primeras derivadas, suficientes hasta poder generalizar, tenemos:

Primera derivada: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{mt^{m-1}}{\frac{1}{t}} = \frac{mt^m t^{-1}}{t^{-1}} = mt^m$

Segunda derivada: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d[y´(t)]}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{m^2 t^{m-1}}{t^{-1}} = m^2 t^m$

Tercera derivada: $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\frac{d[y´´(t)]}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{m^3 t^{m-1}}{t^{-1}} = m^3 t^m$

Directamente, la cuarta derivada sería: $\frac{d^4 y}{dx^4} = m^4 t^m$

Por tanto: $\boxed{\frac{d^n y}{dx^n} = m^n t^m}$

Ejercicios Propuestos 3.7

1. Hallar $\frac{dy}{dx}$ para:

a. $\begin{cases} x = a(\cos t + tsent) \\ y = a(sent - t\cos t) \end{cases}$	b. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases}$

2. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ en $t = \frac{\pi}{2}$

3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ en el punto (1,2)

4. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $\begin{cases} x = 4\operatorname{sen} 2t - 3\cos 3t \\ y = 3\operatorname{sen} t + 4\cos 2t \end{cases}$ en $t = 0$

5. Sea C la curva con ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t^3 + 4t - 1 \end{cases}$; $t \in IR$. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a C y que pasen por el origen.

6. Sea C la curva con ecuaciones paramétricas $\begin{cases} y = \cos t \\ x = \ln(\cos t) \end{cases}$. Calcule a) $\frac{d^2 y}{dx^2}$ y b) $\frac{d^3 y}{dx^3}$

3.6.6 DERIVACIÓN POLAR

Si una curva tiene sus ecuaciones en coordenadas polares, para encontrar la derivada procedemos del mismo modo que para ecuaciones paramétricas.

Si tenemos $r = f(\theta)$ y como $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\ sen(\theta) \end{cases}$

Al reemplazar queda $\begin{cases} x = f(\theta)\cos(\theta) \\ y = f(\theta)sen(\theta) \end{cases}$

Entonces $$\frac{dy}{dx} = \left.\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\right| = \frac{f'(\theta)sen\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)sen\theta}$$

Para encontrar la ecuación de la recta tangente:

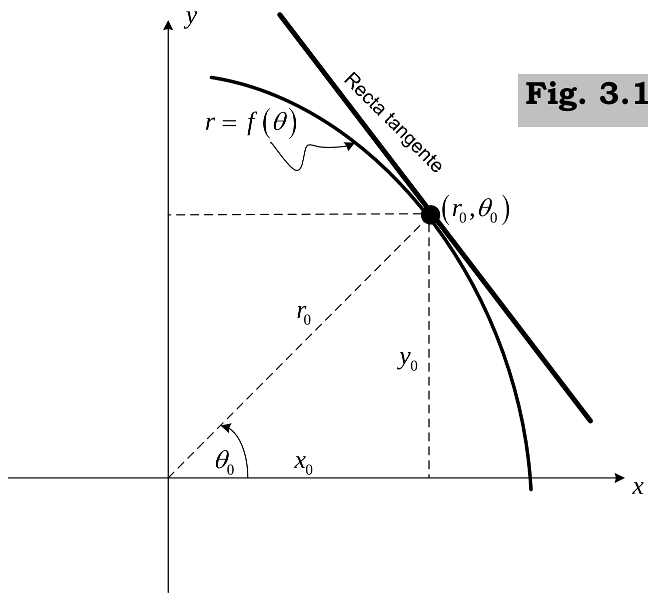


Fig. 3.13

Considere que la ecuación cartesiana de una recta, definida por un punto y su pendiente, es de la forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Entonces:

$$
x_0 = f(\theta_0)\cos\theta_0
$$
$$
y_0 = f(\theta_0)sen\theta_0
$$
$$
m = \frac{dy}{dx} = \left.\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = \frac{f'(\theta_0)sen\theta_0 + f(\theta_0)\cos\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0 - f(\theta_0)sen\theta_0}
$$

Ejemplo

Encuentre la ecuación de la recta tangente a $r = f(\theta) = 4\,\mathrm{sen}\,3\theta$ en $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

SOLUCIÓN:

Observa la gráfica:

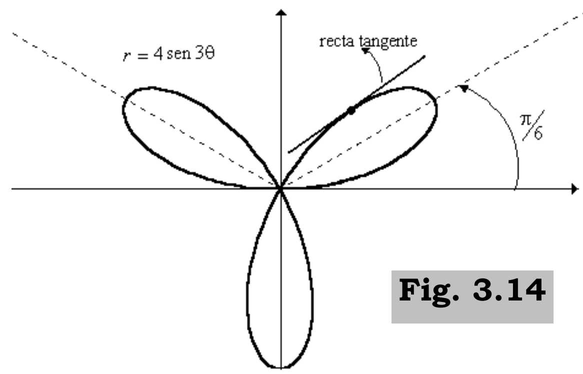


Fig. 3.14

En este caso
$$
\begin{aligned}
x_0 &= f(\theta_0)\cos(\theta_0) = f(\tfrac{\pi}{4})\cos(\tfrac{\pi}{4})\\
&= \left[4\,\mathrm{sen}\,3\tfrac{\pi}{4}\right]\cos\tfrac{\pi}{4}\\
&= 4\tfrac{\sqrt{2}}{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\\
x_0 &= 2
\end{aligned}
$$
y
$$
\begin{aligned}
y_0 &= f(\theta_0)\,\mathrm{sen}(\theta_0) = f(\tfrac{\pi}{4})\,\mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{4})\\
&= \left[4\,\mathrm{sen}\,3\tfrac{\pi}{4}\right]\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{4}\\
&= 4\tfrac{\sqrt{2}}{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\\
y_0 &= 2
\end{aligned}
$$

Para la pendiente, tenemos: $f'(\theta) = 12\cos 3\theta$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{f'(\theta_0)sen\theta_0 + f(\theta_0)\cos\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0 - f(\theta_0)sen\theta_0}\\
&= \frac{\left[12\cos 3\frac{\pi}{4}\right]sen\frac{\pi}{4} + \left[4sen3\frac{\pi}{4}\right]\cos\frac{\pi}{4}}{\left[12\cos 3\frac{\pi}{4}\right]\cos\frac{\pi}{4} - \left[4sen3\frac{\pi}{4}\right]sen\frac{\pi}{4}}\\
&= \frac{\left[-12\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\frac{\sqrt{2}}{2} + \left[4\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left[-12\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\frac{\sqrt{2}}{2} - \left[4\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\frac{\sqrt{2}}{2}}\\
&= \frac{-6+2}{-6-2}\\
m &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente estaría dada por:
$$
\begin{aligned}
y - y_0 &= m(x - x_0)\\
y - 2 &= \tfrac{1}{2}(x-2)
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos 3.8

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a $r = -4\cos 3\theta$ en $\theta_0 = \pi/4$
2. Hallar la ecuación de la recta tangente a $r = 4sen3\theta$ en $\theta_0 = \pi/6$
3. Hallar la ecuación de la recta tangente a $r = \sqrt{2}sen3\theta$ en $\theta_0 = \pi/6$
4. Hallar la ecuación de la recta tangente a $r = 3 - 4sen3\theta$ en $\theta_0 = \pi/3$

3.6.7 DERIVADAS DE FUNCIONES INVERSAS

3.6.7.1 Teorema de existencia de la función inversa.

Si f es una función estrictamente monótona en su dominio entonces f tiene una inversa.

El teorema nos indica que es suficiente definir que una función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente para saber que es una función que tiene inversa. Ahora nos vamos a preocupar de la derivada de la función inversa.

3.6.7.2 Teorema de la derivada de la función inversa.

Sea f una función derivable y estrictamente monótona en un intervalo I. Si $f'(x) \neq 0$ en cierto "x" en I, entonces f^{-1} es derivable en el punto correspondiente "y", y

$$\boxed{\left[\frac{d}{dx} f^{-1}\right](y) = \frac{1}{f'(x)}}$$

Lo que en esencia nos manifiesta el teorema es que la pendiente de la recta tangente a f (m_1) y la pendiente de la recta tangente a f^{-1} (m_2) se relacionan de la forma $\boxed{m_2 = \frac{1}{m_1}}$. Y que se puede encontrar la derivada de la inversa f^{-1}, trabajando con f en el punto correspondiente. Es decir, sin necesidad de conocer la regla de correspondencia de f^{-1}.

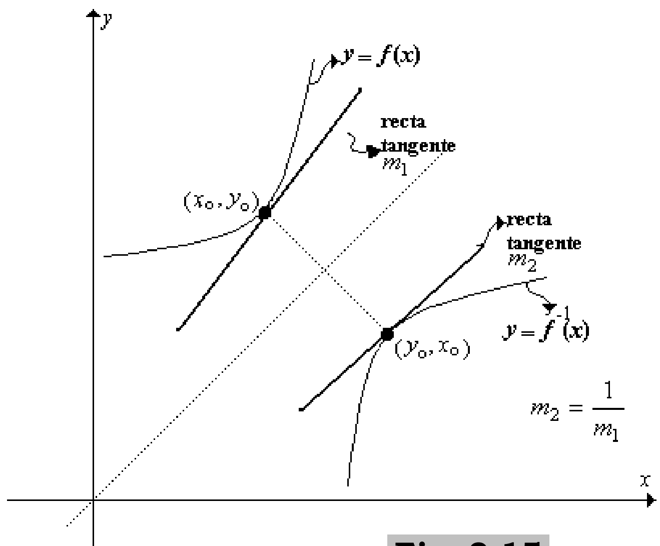


Fig. 3.15

Ejemplo 1

Sea $f(x) = x^5 + 2x + 1$ una función estrictamente monótona. Hallar $\left[\frac{d}{dx} f^{-1}\right](4)$

SOLUCIÓN:

En este caso "4" es rango para f por tanto habrá que encontrar el correspondiente x para reemplazarlo en:

$$\left[\frac{d}{dx} f^{-1}\right](4) = \frac{1}{f'(x)}$$

Entonces, teniendo $4 = x^5 + 2x + 1$ por inspección deducimos que $x = 1$ la satisface.

Por lo tanto, $\left[\frac{d}{dx} f^{-1}\right](4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5(1)^4 + 2} = \frac{1}{7}$

No olvide que este resultado significa que la recta tangente a f en el punto $(1,4)$ tiene pendiente $m = 7$ y por tanto su ecuación sería: $\boxed{y - 4 = 7(x - 1)}$

En cambio, la recta tangente a f^{-1} en el punto correspondiente $(4,1)$ tiene pendiente $m = \frac{1}{7}$ y por ecuación: $\boxed{y - 1 = \frac{1}{7}(x - 4)}$

Ejemplo 2

Obtenga la derivada para la función inversa de $f(x)=e^{x}$ empleando el teorema de la derivada de la función inversa.

SOLUCIÓN:

De acuerdo al Teorema de la Derivada de la Función Inversa $\left[\frac{d}{dx}f^{-1}\right](x)=\frac{1}{f'(y)}$

Como $f(x)=y=e^{x}$ tenemos que $f'(x)=e^{x}$ y $f'(y)=e^{y}$ y además al cambiar la variable resulta $x=e^{y}$, lo cual nos permite decir que: $f'(y)=x$

Bien, reemplazando $\left[\frac{d}{dx}f^{-1}\right](x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{x}$

(No olvide la inversa de la función exponencial es la logarítmica, es decir: $f^{-1}(x)=\ln x$, cuya derivada la determinamos con su definición)

3.6.7.3 Derivadas de las Funciones Trigonométricas Inversas

$$D_x(\operatorname{arcsen} x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ;-1<x<1$$

$$D_x(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ;-1<x<1$$

$$D_x(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$D_x(\operatorname{arc} co \operatorname{tg} x)=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$D_x(arc\sec x)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad ;|x|>1$$

Demostración:

Demostraremos la primera.

Planteemos el problema de la siguiente manera:

Sea $f(x)=y=\operatorname{sen} x$ hallar $D_x\left[f^{-1}(x)\right]=D_x[\operatorname{arcsen} x]$

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema de la Derivada de la función inversa tenemos:

$$D_x\left[f^{-1}(x)\right]=D_x[arcsenx]=\frac{1}{f'(y)}$$

Entonces, $f'(y)=\cos y$. Ahora habrá que encontrar $\cos y$, sabiendo que $x=seny$ (cambiando la variable en la función dada).

Por trigonometría, decir que $seny=\frac{x}{1}$ significa que $\cos y=\sqrt{1-x^2}$ (observe la figura 3.16)

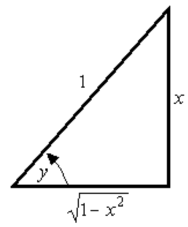


Fig. 3.16

Por lo tanto, $D_x[arcsenx]=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ L.Q.Q.D.

Las fórmulas anteriores pueden ser generalizadas para una función $u=u(x)$

$$D_x(\operatorname{arcsen}u)=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u' \quad ;-1<u<1$$
$$D_x(\arccos u)=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u' \quad ;-1<u<1$$
$$D_x(\operatorname{arctg}u)=\frac{1}{1+u^2}u'$$
$$D_x(arc\sec u)=\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}u' \quad ;|u|>1$$

Ejemplo

Hallar y' para $arc\ \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

SOLUCIÓN:

Derivando implícitamente, tenemos:

$$D_x\left[arc\ tg\left(\frac{y}{x}\right)\right]=D_x\left[\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right]$$
$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}D_x\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}D_x\left(x^2+y^2\right)$$
$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left[\frac{y'x-y(1)}{x^2}\right]=\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\left[2x+2yy'\right]$$
$$\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\left[\frac{xy'-y}{x^2}\right]=\frac{\cancel{2}(x+yy')}{\cancel{2}\left(x^2+y^2\right)}$$
$$\frac{x^2(xy'-y)}{x^2\left(x^2+y^2\right)}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$
$$xy'-y=x+yy'$$
$$xy'-yy'=x+y$$
$$y'=\frac{x+y}{x-y}$$

Ejercicios Propuestos 3.9

1. Si $f(x)=x^7+3x^3+2$ hallar $\left(\frac{d}{dx}f^{-1}\right)(6)$
2. Si $f(x)=x^2-3x+1$ para $x>3/2$; hallar $\left(\frac{d}{dx}f^{-1}\right)(5)$.
3. Hallar $\left(\frac{dg}{dx}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)$, si g es la función inversa de f tal que: $f(x)=\ln x+arc\ \mathrm{tg}\, x$
4. Si f es una función inversible y diferenciable. Si en el punto $(2,4)\in f$, la recta tangente es paralela a la recta $x-3y+2=0$ determine el valor de $\left(\frac{d}{dx}f^{-1}\right)(4)$.
5. Hallar la ecuación de la recta tangente a la inversa de la función $f(x)=x^3+2x-3$ en el punto $\left(0,f^{-1}(0)\right)$
6. Determine la ecuación de la recta tangente a la función $y=f^{-1}(x)$ en el punto $\left(-2,f^{-1}(-2)\right)$ donde $f(x)=3x^3+2x+3,\quad x\in IR$
7. Hallar la ecuación de la recta normal a la inversa de f en $\left(2a,f^{-1}(2a)\right)$ si se conoce que $f´(a)=f(a)=2a$.
8. Hallar $\left(\frac{d}{dx}f^{-1}\right)(0)$ conociendo que la ecuación $\cos(xy)+x-3y=2$ define una función invertible $\left(y=f(x)\right)$ en un intervalo que contiene el punto $x=1$ y $f(1)=0$
9. Calcular $\frac{dy}{dx}$, para :

a. $y=xarcsenx-\ln\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]$	c. $y=arctg\left(\frac{4senx}{3+5\cos x}\right)$
b. $y=xarctg\left(\frac{x}{2}\right)-\ln\left(x^2+4\right)$	d. $y=e^{arctg\left(x^3+senx\right)}$

3.6.8 DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Cuando las reglas de correspondencia de los lugares geométricos son un tanto complicadas o cuando son funciones potenciales de la forma $y=f(x)^{g(x)}$, lo mejor será aplicar logaritmo y derivar implícitamente.

Ejemplo 1

Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $y=x^x$

SOLUCIÓN:

Primero, aplicando logaritmo, tenemos:

$$\ln y=\ln x^x$$
$$\ln y=x\ln x$$

Ahora derivando implícitamente, resulta:

$$D_x(\ln y) = D_x(x\ln x)$$
$$\frac{1}{y}y' = (1)\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$y' = y[\ln x + 1]$$
$$y' = x^x[\ln x + 1]$$

Ejemplo 2

Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $y = [\operatorname{sen} 2x]^{\operatorname{arctg} x}$

SOLUCIÓN:

Primero, aplicando logaritmo, tenemos:
$$\ln y = \ln\left([\operatorname{sen} 2x]^{\operatorname{arctg} x}\right)$$
$$\ln y = \operatorname{arctg} x \ln(\operatorname{sen} 2x)$$

Ahora derivando implícitamente, resulta:

$$D_x \ln y = D_x[\operatorname{arctg} x \ln(\operatorname{sen} 2x)]$$
$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{1+x^2}\ln(\operatorname{sen} 2x) + \operatorname{arctg} x\left[\frac{1}{\operatorname{sen} 2x}(\cos 2x)(2)\right]$$
$$y' = y\left[\frac{\ln(\operatorname{sen} 2x)}{1+x^2} + \frac{2\operatorname{arctg} x \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}\right]$$
$$y' = [\operatorname{sen} 2x]^{\operatorname{arctg} x}\left[\frac{\ln(\operatorname{sen} 2x)}{1+x^2} + \frac{2\operatorname{arctg} x \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}\right]$$

Ejemplo 3

Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $y = x^{x^x}$

SOLUCIÓN:

Ahora, hay que aplicar dos veces logaritmo.
Primero, aplicando logaritmo tenemos:

$$\ln y = \ln\left(x^{x^x}\right)$$
$$\ln y = x^x \ln x$$

Luego, volvemos a aplicar logaritmo:

$$\ln(\ln y) = \ln\left(x^x \ln x\right)$$
$$\ln(\ln y) = \ln x^x + \ln(\ln x)$$
$$\ln(\ln y) = x\ln x + \ln(\ln x)$$

Y ahora sí, derivamos implícitamente:

$$D_x\left[\ln(\ln y)\right]=D_x\left[x\ln x+\ln(\ln x)\right]$$
$$\frac{1}{\ln y}\frac{1}{y}y'=(1)\ln x+x\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}$$
$$y'=y\ln y\left[\ln x+1+\frac{1}{x\ln x}\right]$$
$$y'=x^{x^x}\ln x^{x^x}\left[\ln x+1+\frac{1}{x\ln x}\right]$$
$$y'=x^{x^x}x^x\ln x\left[\ln x+1+\frac{1}{x\ln x}\right]$$

Existen situaciones en que es recomendable emplear la derivación logarítmica

Ejemplo

Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $y=\frac{\sqrt{x^2+2}\,\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}$

SOLUCIÓN:

Primero, aplicando logaritmo, tenemos:

$$\ln[y]=\ln\left[\frac{\sqrt{x^2+2}\,\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}\right]$$
$$\ln y=\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)+\tfrac{1}{3}\ln\left(1+\operatorname{arctg}x\right)-\tfrac{1}{4}\ln\left(1+e^x\right)$$

Ahora derivando implícitamente, resulta:

$$D_x(\ln y)=D_x\left(\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)+\tfrac{1}{3}\ln(1+arctgx)-\tfrac{1}{4}\ln\left(1+e^x\right)\right)$$
$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2}(2x)+\frac{1}{3}\frac{1}{1+arctgx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)-\frac{1}{4}\frac{1}{1+e^x}\left(e^x\right)$$
$$y'=y\left[\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2}(2x)+\frac{1}{3}\frac{1}{1+arctgx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)-\frac{1}{4}\frac{1}{1+e^x}\left(e^x\right)\right]$$

Finalmente, reemplazando resulta:

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+2}\,\sqrt[3]{1+arctgx}}{\sqrt[4]{1+e^x}}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2}(2x)+\frac{1}{3}\frac{1}{1+arctgx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)-\frac{1}{4}\frac{1}{1+e^x}\left(e^x\right)\right]$$

Ejercicios Propuestos 3.10

1. Calcular $\frac{dy}{dx}$, para :

a. $y=\frac{\sec^5 x\ \sqrt[3]{tgx+1}}{\sqrt{\csc x^3-4}}$	e. $y=x^n n^x$
b. $y=\sqrt[4]{x^3}\cos 4x\ \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\left(4x-x^3\right)^5}$	f. $y=\left[\frac{arcsen\left(sen^2 x\right)}{\arccos\left(\cos^2 x\right)}\right]^{arctg^2 x}$

c. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}\,arcsen(e^{x^2})$ d. $y=x^{3^x}$	g. $y=\left(arcsen\left(1+e^{2x}\right)\right)^{\sec x}$ h. $y=\left(\ln\left(sen(3x)\right)\right)^{arctg(\cos(3x))}$ i. $(x+y)^y=x^2+y^2$ j. $y=\left(1+x^2\right)^x$

2. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación $y=\left(1+e^x\right)^{\ln(x+1)}$ en el punto $(0,1)$

3. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación. $x^y+y^x=2$ en el punto $(1,1)$.

4. Determine $\dfrac{d^2y}{dx^2}(1,2)$, si existe, para $x^y+xy=3$

3.7 FUNCIONES HIPERBÓLICAS.

Existen funciones especiales, denominadas Hiperbólicas, que se definen a partir de la función exponencial.

3.7.1 FUNCIÓN SENOHIPERBÓLICO

Su regla de correspondencia es $\boxed{y=f(x)=senhx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}}$

Por tanto su gráfica sería:

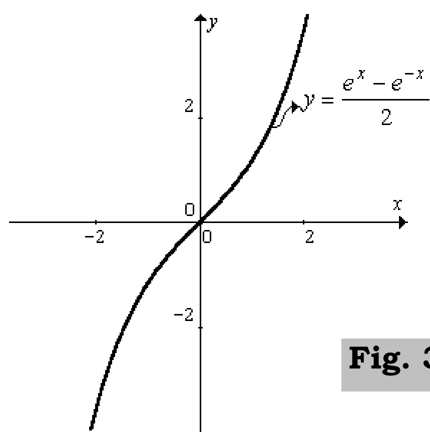


Fig. 3.17

3.7.2 FUNCIÓN COSENOHIPERBÓLICO

Su regla de correspondencia es: $\boxed{y=f(x)=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}$

Por tanto su gráfica sería:

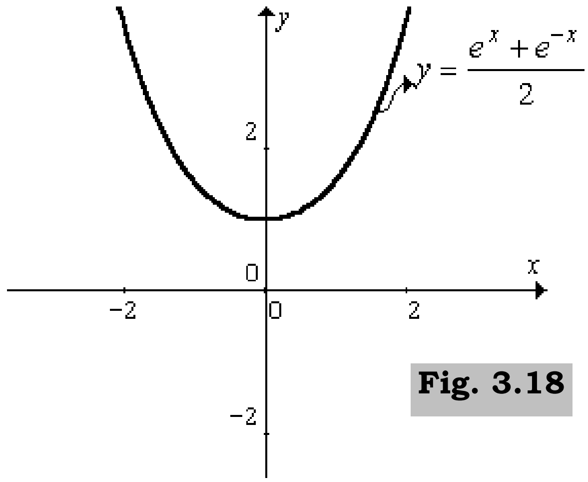


Fig. 3.18

3.7.3 FUNCIÓN TANGENTEHIPERBÓLICA

Su regla de correspondencia es:

$$\boxed{y = f(x) = tghx = \frac{senhx}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$

Por tanto, su gráfica sería:

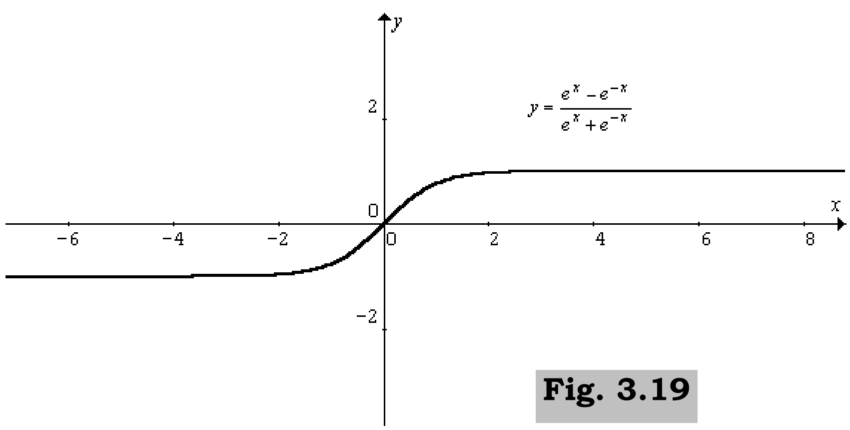


Fig. 3.19

Se puede demostrar que $\boxed{\cosh^2 x - senh^2 x = 1}$

3.7.4 DERIVADAS DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$D_x(\operatorname{senh} x) = \cosh x$$
$$D_x(\cosh x) = \operatorname{senh} x$$
$$D_x(\operatorname{tgh} x) = \sec h^2 x$$
$$D_x(c\operatorname{tgh} x) = -\csc h^2 x$$
$$D_x(\sec hx) = -\sec hx \operatorname{tgh} x$$
$$D_x(\csc hx) = -\csc hxc \operatorname{tgh} x$$

¡Demuéstrelas!

Misceláneos

1. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique formalmente su respuesta.

a) Si $f'(2) = g'(2) = g(2) = 2$ entonces $\left(\frac{d(f \circ g)}{dx}\right)(2) = 4$

b) La función $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ no es derivable en $x = 0$

c) Si f y g son derivables en $x = c$ y $f'(c) = g(c) = 0$ y $h(x) = f(x)g(x)$ entonces $h'(c) = 0$.

d) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto $(1,1)$ es $y - 1 = 3(x - 1)$.

e) La expresión $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$ es la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ cuando $x = \frac{\pi}{2}$.

f) La función $f(x) = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene rectas tangentes con pendiente 4.

g) Si $y(x) = x^{x^x}$ entonces $y'(x) = x^{x^x} x^x \left(\ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x}\right)$

h) Si $g(x) = f\left(e^{f(x)}\right)$ tal que $f(0) = \ln 2$, $f'(0) = -2$ y $f'(2) = 3$ entonces $g'(0) = -12$

i) Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a) = f(b)$ entonces en algún punto del intervalo abierto (a,b), la función f tiene una recta tangente que es paralela al eje x.

j) Si f es una función invertible entonces $\left(\frac{d}{dx} f^{-1}\right)(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

k) Si f, g y h son funciones tales que $(f \circ g \circ h)'(2) = 4$, $g(1) = g'(1) = -1$ y $h(2) = h'(2) = 1$ entonces $f'(-1) = 0$

l) Si f es una función inversible y derivable tal que $f'(1) = 4$ y $f(1) = -2$ entonces $\left(\frac{d}{dx} f^{-1}\right)(-2) = 1$.

m) Si $h(x)= f\left(1+ f(1+ f(x))\right)$, $f(1)=1$, $f(2)=-1$, $f´(1)=5$, $f´(2)=-2$ y $f´(0)=3$ entonces $h´(1)=-30$

n) La función de variable real f con regla de correspondencia $f(x)=\begin{cases} 2x-1; & x\geq 1 \\ \sqrt{x} & ; 0\leq x<1 \\ 3x & ; \quad x<0 \end{cases}$ es derivable en todo su dominio.

o) Existen funciones g y h tales que la función $f(x)=\begin{cases} g(x) & ; x\leq 0 \\ 3x^2-5x+4 & ; 0<x<1 \\ h(x) & ; x\geq 1 \end{cases}$ es derivable en todo $\mathbb{R}$.

p) Si tenemos las curvas $f(x)=x^2+ax+b$ y $g(x)=x^3+cx$. Entonces no existen valores $a,b,c\in\mathbb{R}$, tales que ellas posean una recta tangente común en el punto $(2,2)$.

q) Si la ecuación $x^y = y^x$ define una función $y = f(x)$ entonces la ecuación de la recta tangente a f en el punto $(1,1)$ es $y = x-1$.

r) Si g es la función inversa de $f(x)=2x+\ln x$ entonces $g´(2)=\frac{2}{5}$.

s) Si f es una función de variable real tal que $f(x)=\begin{cases} 3x & ; x\leq 1 \\ x^2+2 & ; x>1 \end{cases}$ entonces $f´(1)$ existe.

t) $f´(2)=g´(2)=g(2)=2$ entonces $(f\circ g)´(2)=4$.

u) Si $f(c)=g(c)=0$ y $h(x)= f(x)g(x)$ entonces $h´(c)=0$

v) Si C es un lugar geométrico en el plano cuyos puntos satisfacen la ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ; a,b\in\mathbb{R}-\{0\}$, entonces la recta tangente a C en cualquier punto $P(x_0,y_0)\in C$, tiene por ecuación $\frac{x_0 y}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1$

w) Si f y g son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $f´= g´$ entonces $f = g$

2. Encuentre $\frac{dy}{dx}$ para

a. $x^2y^2+e^{\cos\left(x^2+y^2\right)} = x\cos y$	h. $y(x)=\frac{\sqrt{x^2+2}\ \sqrt[3]{1+\operatorname{arctg} x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}$
b. $y(x)=\left(x^2+1\right)^{\ln x}$	i. $y(x)=(sen3x)^{arctg\left(x^2\right)}$
c. $y(x)=\sqrt{\operatorname{sen}\left(\ln^2\left(\cos x+e^{3x}\right)\right)}$	j. $y(x)=\operatorname{arcsen}(\ln x)+e^{\operatorname{arctg}^2 x}$
d. $y\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y}\right)=1-\frac{x}{y^2}$	k. $\ln(x+y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$
e. $y(x)=x^{e^x}+e^{x^x}$	l. $y(x)=e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg}\left(e^x\right)$
f. $y(x)=\sqrt{x}\cos\sqrt{x+\sqrt{x}}$	m. $(x+y)^y = x^2$
g. $y(x)=\ln\sqrt{\frac{2+3x}{2-3x}}$	

3. Hallar $\frac{d}{dx}\left[\left[f(x)\right]^2+1\right]$

4. Determine los valores para " a ", " b " y " c " de modo que la función $f(x)=\begin{cases} x^4\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^4}\right) & ;x<0 \\ ax+b & ;0\leq x\leq 1 \\ cx^2+d & ;x>1 \end{cases}$

   Sea continua en $x=0$ y derivable en $x=1$. Además determine, de ser posible, $\left[f'(-2)\right]\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]-f'(\pi+1)$

5. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva definida por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=2\sec t \\ y=2tan t \end{cases}$

   en $t=-\frac{\pi}{6}$

6. Si $f'(x)=x^3e^{x^2}$, $f(1)=0$ y $g(x)=\sqrt{(x+1)^2+3}$ determine el valor de $(g\circ f)'(1)$.

7. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva definida por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t\cos t \end{cases}$ en el punto $(0,0)$.

8. Determine la ecuación de la recta tangente a la función f en $x=1$ donde f , g y h son funciones diferenciables en todo IR . f tiene como regla de correspondencia a $f(x)=h\left(x^2g(x)\right)$ y se conoce que $g(1)=2$, $g'(1)=-2$, $h'(2)=-3$ y $h(2)=-1$

9. Determine los puntos del intervalo $\left[-1,2\right]$ donde la función $f(x)=\left[\!\left[|x|\right]\!\right]+|x-1|$ sea derivable.

10. Determine los valores reales que puede tomar " k " para que $\left(\frac{d}{dx}f^{-1}\right)(1)=\frac{1}{k^2+5k}$. Considere que $f(4)=1$ y $f'(x)=-x^2+10x$.

11. Para la función $y=f(x)$ cuyas ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x=\arccos t \\ y=\operatorname{arcsen} t-t \end{cases}$, $t\in(-1,1)$ determine $\frac{d^3y}{dx^3}$.

12. Para la función $y=f(x)$ cuyas ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=t\ln t \end{cases}$, $t>0$ determine $\frac{d^3y}{dx^3}$ en el punto $(2,0)$

13. Determine a, b y c conociendo que las curvas $y=x^2+ax+b$ y $y=cx-x^2$ tienen una recta tangente común en el punto $(1,0)$.

14. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva cuya ecuación es $\ln\left(x^2-y\right)-\operatorname{tg}\frac{y}{x}=xy$ en el punto $(1,0)$.

15. Encuentre la ecuación de la recta normal a la curva C en el punto $(1,2)$. Donde C está definida por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=\frac{2t^2}{t+1} \\ y=\frac{3-t}{t} \end{cases}$, $t\in IR-\{-1,0\}$

16. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ para $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \operatorname{sen} t \end{cases}$, $t \in IR$

17. Hallar $\frac{dy}{dx}$ en el punto $(0,\pi)$ donde x e y satisfacen la ecuación $xy^2 + \operatorname{sen}(x+y) - x = 0$.

18. Sea $y = f(x)$ función tal que $h = f^{-1}$. Sea $y \geq 0$ si $h(y) = \frac{y}{y+1} - \frac{2}{y+2}$ calcular $f'(1)$

19. Determine la ecuación de la recta tangente y normal a la curva definida por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$; $t \in [0, 2\pi]$; $a > 0$ en el punto $\left(-a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3, a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \right)$.

20. Determine los valores de a, b, c para que las funciones f y f' sean continuas en todo su dominio; donde f es una función tal que $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x + a & ; x \geq 0 \\ be^x + c & ; x < 0 \end{cases}$.

21. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva definida por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = (1+\cos t)\cos t \\ y = (1+\cos t)\operatorname{sen} t \end{cases}$ en $t = \frac{\pi}{2}$.

22. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación $y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 4$; en el punto $(1,0)$.

23. Hallar le ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación $xy + \ln y = 1$; en el punto $(1,1)$.

24. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva definida por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ en el punto $(1,2)$.

25. Demuestre que la derivada de $F(x) = \operatorname{sen} x[f(\cos x)]$ es una función Par.

26. Determine el valor de k de manera que la recta definida por $3x - y + k = 0$ sea tangente a la parábola definida por $y = 2x^2 - 5x + 1$.

27. Hallar $\frac{d^{50}}{dx^{50}}\left[\frac{1-x}{1+x}\right]$

28. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva definida por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = e^{2t} - 1 \\ y = e^{-2t} + 2 \end{cases}$ cuando $t = 0$

29. Determine la ecuación de la recta tangente a la función f cuya regla de correspondencia es $f(x) = x^2 - 6x + 6$, y además dicha recta es paralela a la recta que contiene al origen y al vértice de la parábola.

30. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ inversible y con regla de correspondencia $f(x) = x^3 + 3x - 10$ entonces determine $\left[\frac{d}{dx} f^{-1}\right](4)$