

2 Sucesiones

2.1 SUCESIONES

2.2 SUMAS Y NOTACIÓN SIGMA

Objetivos:

Se pretende que el estudiante:

- Determine convergencia o divergencia de sucesiones.
- Analice Monotonía de sucesiones.
- Conozca las propiedades de la notación sigma.

2.1. SUCESIONES

2.1.1 DEFINICIÓN.

Sucesión es una función, denotada como $\{a_n\}$, cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos y su rango son números reales. Es decir:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\mapsto X \subseteq \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n) = a_n \end{aligned}$$

Es común referirse al rango de la sucesión, por tanto la sucesión se presenta como una secuencia de términos $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Si la sucesión tiene una cantidad determinada de términos se la llamará **SUCESIÓN FINITA**. Si la sucesión tiene una cantidad no definida de términos, se la llamará **SUCESIÓN INFINITA**.

Ejemplo

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{n}{2n+1} \right\} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \dots \right\}$$

La manera como se presentó la sucesión en el ejemplo anterior se denomina **forma explícita**, pero se la puede expresar como una **formula de recursión**.

Ejemplo

$$a_1 = 1; \quad a_n = a_{n-1} + 3; \quad n \geq 2$$

Es decir:

$$a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

Y así sucesivamente.

2.1.2 Convergencia y Límite

Una sucesión $\{a_n\}$, es **convergente** si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe. Caso contrario; es decir, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ no existe, se dice que la sucesión es **divergente**.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe, es decir si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, significa que:

$$\forall \xi > 0, \exists N > 0 \text{ tal que } n > N \Rightarrow |a_n - L| < \xi$$

Ejemplo.

Determinar si $\{a_n\} = \left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN:

Para determinar si es convergente o divergente se halla $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la sucesión es convergente y además converge a $\frac{1}{2}$

TEOREMA

Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión sea convergente es que sea acotada.

Note que, para la sucesión anterior la **mínima cota superior** es $\frac{1}{2}$ y la **máxima cota inferior** es $\frac{1}{3}$.

PREGUNTA: ¿POR QUÉ SE DICE MÍNIMA COTA SUPERIOR? ¿POR QUÉ SE DICE MÁXIMA COTA SUPERIOR?

Ejemplo

Determinar si $\{a_n\} = \left\{n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$ es convergente o divergente.

SOLUCION:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(\frac{\pi}{n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \right]$$

Haciendo $u = \frac{\pi}{n}$ entonces, si $n \rightarrow \infty$ tenemos que $u \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \pi \left[\frac{\operatorname{sen} u}{u} \right] = \pi \lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen} u}{u} \right] = \pi(1) = \pi. \quad \text{Por tanto}$$

converge.

TEOREMA

Si a_n y b_n son sucesiones convergentes, entonces:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n; \quad k \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

2.1.3 SUCESIONES MONOTONAS

Una sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** si sus términos son **no decrecientes**, es decir:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots;$$

ó si sus términos son **no crecientes**; es decir:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots.$$

Lo anterior quiere decir que si se cumple que $a_n \leq a_{n+1}$ o $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ será una sucesión **CRECIENTE**. Caso contrario, es decir si da que $a_n \geq a_{n+1}$ o $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ será una sucesión **DECRECIENTE**.

Ejemplo 1

Determinar si la sucesión $a_n = \frac{n}{2n+1}$ es creciente o decreciente.

SOLUCIÓN:

En este caso $a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$

Al dividir ambas expresiones, resulta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2n+3}}{\frac{n}{2n+1}} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n+3)} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{2n^2 + 3n}$$

note que en la última expresión se observa que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ¿Por qué?.

Por tanto, la sucesión será CRECIENTE.

Ejemplo 2

Analice la sucesión $a_n = 3 + (-1)^n$

SOLUCIÓN:

Desarrollando la sucesión tenemos

$$\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\} = \{2, 4, 2, 4, \dots\}$$

Se observa que la sucesión no es monótona, no es convergente, si es acotada.

Ejemplo 3

Analice la sucesión $a_n = \frac{2^n}{n!}$

SOLUCIÓN:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$. El factorial es más creciente que la exponencial por tanto la sucesión converge a 0.

2. La sucesión es acotada debido a que es convergente.

$$3. \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}. \text{ Ahora } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^n 2^1}{n!(n+1)} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

Se observa que para $n \geq 1$, $\frac{2}{n+1} \leq 1$ por tanto la sucesión es decreciente.

Ejercicios propuestos 2.1

1. Determine si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes.

a. $\left\{ \frac{3n^2 + 1}{2n^2 - n} \right\}$	e. $\left\{ \frac{2n+1}{3n^2 - n} \right\}$
b. $\left\{ \frac{2n^2 + 1}{3n-1} \right\}$	f. $\left\{ \frac{\ln n}{n^2} \right\}$
c. $\left\{ \frac{n}{n+1} \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$	g. $\left\{ \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \right\}$
d. $\left\{ \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n \right\}$	

2. Determine si las sucesiones son crecientes, decrecientes o no monótonas.

a. $\left\{ \frac{3n-1}{4n+5} \right\}$	d. $\sin(n\pi)$
b. $\left\{ \frac{5^n}{1+5^{2n}} \right\}$	e. $\left\{ \frac{n!}{3^n} \right\}$
c. $\left\{ \frac{n!}{1 \bullet 3 \bullet 5 \bullet \dots \bullet (2n-1)} \right\}$	

2.2. SUMAS Y NOTACIÓN SIGMA

Sea la secuencia $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

La suma de estos números, puede ser expresada mediante una notación que denota abreviación, el símbolo empleado es el de sigma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Entonces, la notación sigma significa una suma de término, desde el primero hasta el n-ésimo. Podemos tener una suma finita de términos como también podemos tener una suma infinita.

Ejemplo 1

$$\sum_{i=1}^4 \frac{i}{i^2+1} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{i=1} + \underbrace{\frac{2}{5}}_{i=2} + \underbrace{\frac{3}{10}}_{i=3} + \underbrace{\frac{4}{17}}_{i=4}$$

Ejemplo 1

$$1+2+3+4+\dots+n+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

2.2.1 Propiedades

Sean $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ dos sucesiones y sea C una constante, entonces

$$1. \sum_{i=1}^n C a_i = C \sum_{i=1}^n a_i$$

$$2. \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$$

Alguna formulas que se necesitarán más adelante son:

$$1. \quad \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \quad \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3. \quad \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$4. \quad \sum_{i=1}^n i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

¡No olvide demostrarlas!