5 INTEGRALES IMPROPIAS

Objetivo:
Se pretende que el estudiante calcule integrales sobre regiones no acotadas y resuelva problemas de aplicación relacionados con las integrales impropias

Se trata ahora de trabajar con regiones que estén limitadas por curvas no acotadas, que tengan asíntotas horizontales y verticales

5.1 LÍMITES INFINITOS.

Se presentan cuando se plantean integrales de la forma $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$, o de la forma $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, o de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

En este caso, es una integral impropia porque uno de los límites de integración o ambos, no es una cantidad finita. En tal caso, deberá tratárselas con propiedad. Es decir:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\left[\int_{a}^{N} f(x)dx\right]$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{N\to-\infty}\left[\int_{N}^{a} f(x)dx\right]$$

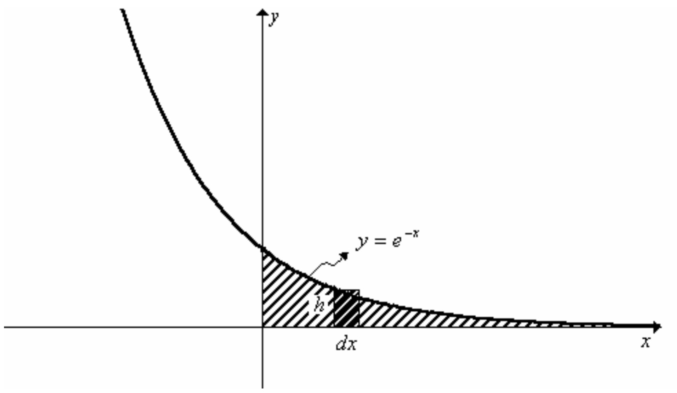
y finalmente la última integral por la propiedad de aditividad se la trataría así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

Ejemplo 1

Hallar el área de la región $R:\begin{cases} y = e^{-x} \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, en el primer cuadrante.

SOLUCIÓN:
Dibujando las curvas dadas e identificando la región tenemos:



El área de la región estaría dada por $A=\int_0^{\infty} e^{-x}dx$, la cual es una integral impropia, que escribiéndola con propiedad tenemos: $A=\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{N\to\infty}\left[\int_0^{N} e^{-x}dx\right]$

Al calcular la integral definida y luego tomando límite resulta:

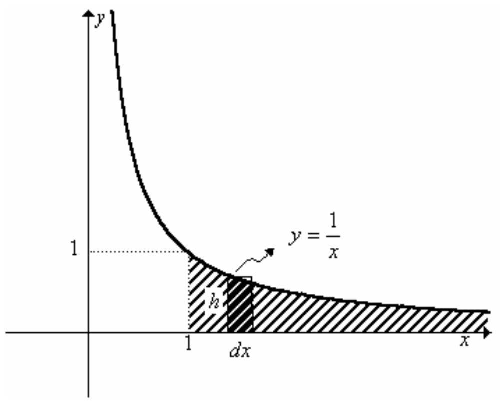
$$\lim_{N\to\infty}\left[\int_0^{N} e^{-x}dx\right] = \lim_{N\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^N = \lim_{N\to\infty}\left[1-e^{-N}\right] = 1-e^{-\infty} = 1$$

En este caso se dice que el área converge a 1 ($A=1\,u^2$)

Ejemplo 2

Hallar el área de la región $R:\begin{cases} y\leq \frac{1}{x} \\ x\geq 1 \\ y\geq 0\end{cases}$

SOLUCIÓN:



El área de la región estaría dada por $A=\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$, la cual es una integral impropia, que escribiéndola con propiedad tenemos: $A=\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{N\to\infty}\left[\int_1^{N}\frac{1}{x}dx\right]$

Al calcular la integral definida y luego tomando límite resulta:

$$\lim_{N\to\infty}\left[\int_1^{N}\frac{1}{x}dx\right] = \lim_{N\to\infty}\left[\ln x\right]_1^N = \lim_{N\to\infty}\left[\ln N-\ln 1\right] = \ln\infty-\ln 1 = \infty$$

En este caso se dice que la integral DIVERGE ($A=\infty$) es decir que haciendo la integral entre 1 y un número muy grande, el resultado es una cantidad muy grande.

Ejemplo 3

Hallar el volumen del sólido que se genera al rotar la región $R:\begin{cases} y \leq \frac{1}{x} \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$, alrededor del eje x.

SOLUCIÓN:

El volumen del sólido estaría dado por $V = \pi \int_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$, esto es una integral impropia, que escribiéndola con propiedad tenemos: $V = \pi \int_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \lim_{N\to\infty} \left[\int_{1}^{N} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx \right]$

Al calcular la integral definida y luego tomar límite resulta:

$$\pi \lim_{N\to\infty} \left[\int_{1}^{N} \frac{1}{x^2} dx \right] = \pi \lim_{N\to\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{1}^{N} = \pi \lim_{N\to\infty} \left[1 - \frac{1}{N} \right] = \pi$$

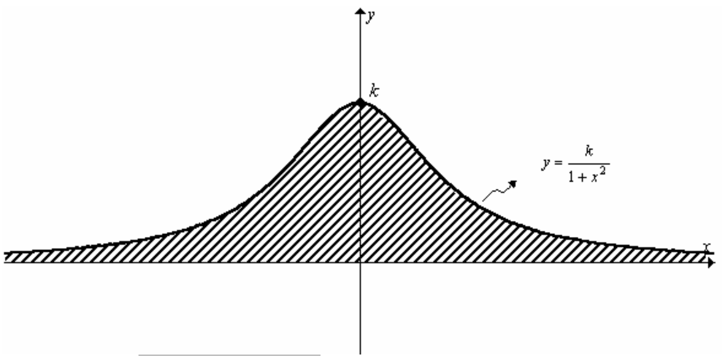
Note que mientras el área era divergente el volumen es CONVERGETE. La convergencia o divergencia de la integral depende de su forma algebraica.

Ejemplo 3

Determina el valor de "k" para que el área bajo la curva de $y = \frac{k}{1+x^2}$ sea iguala a 1.

SOLUCIÓN:

Dibujando la curva para un k positivo sería:



El área estaría dado por $A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{1+x^2} dx$.

Como es una función par, aplicando simetría, tendremos $A = 2\int_{0}^{\infty} \frac{k}{1+x^2} dx$.

Escribiéndola con propiedad y resolviendo:

$$
\begin{aligned}
A &= 2\lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{k}{1+x^2}\,dx\\
&= 2k\lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{1}{1+x^2}\,dx\\
&= 2k\lim_{N\to\infty}\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^N\\
&= 2k\left[\operatorname{arctg}\infty-\operatorname{arctg}0\right]\\
&= 2k\,\tfrac{\pi}{2}\\
A &= k\pi
\end{aligned}
$$

Si la condición es que $A = 1\,u^2$ entonces $k\pi = 1$ por tanto $k = \frac{1}{\pi}$

Ejemplo 4

Determine para que valores de "p" la integral impropia $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$ converge y para que valores diverge.

SOLUCIÓN:

Escribiendo con propiedad la integral impropia tenemos: $\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x^p}\,dx$

Se observa que hay que considerar 2 casos: si $p=1$ y si $p\neq 1$

Primero si $p=1$ tenemos:

$$\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\ln x\right]_1^N = \lim_{N\to\infty}\left[LnN-\ln 1\right]=\infty \text{ (Diverge)}$$

Segundo si $p\neq 1$ tenemos:

$$\lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-p}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{N^{1-p}}{1-p}-\frac{1^{1-p}}{1-p}\right]$$

de lo último hay que considerar dos casos:

Si $p<1$ entonces $\lim_{N\to\infty}\left[\frac{N^{1-p}}{1-p}-\frac{1^{1-p}}{1-p}\right]=\infty-\frac{1}{1-p}=\infty$ (diverge)

Si $p>1$ entonces $\lim_{N\to\infty}\left[\frac{N^{1-p}}{1-p}-\frac{1^{1-p}}{1-p}\right]=\frac{1}{\infty}-\frac{1}{1-p}=0-\frac{1}{1-p}$ (converge)

Por lo tanto: $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\begin{cases}\infty & ;\ p\leq 1\\ \frac{1}{p-1} & ;\ p>1\end{cases}$

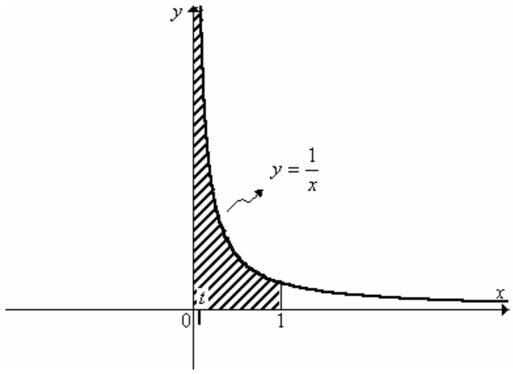
5.2 INTEGRANDOS INFINITOS

Ahora trataremos regiones que están limitadas por curvas no acotadas, las graficas de las curvas tienen asíntotas verticales

Ejemplo 1

Hallar el área de la región $R:\begin{cases} y \leq \frac{1}{x} \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$.

SOLUCIÓN:
La región referida sería:



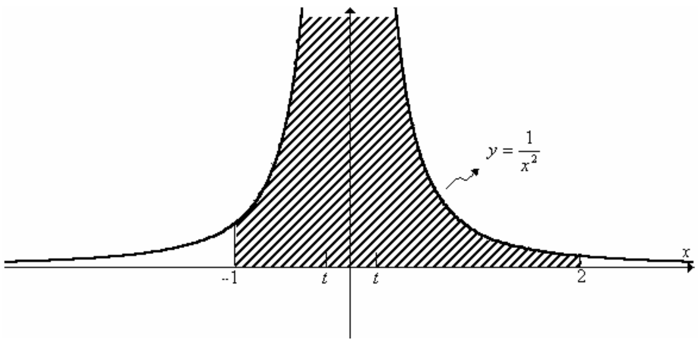
La integral para el área es: $A=\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ note que la función $f(x)=\frac{1}{x}$ no está definida en $x=0$ por tanto es una integral impropia, que escribiéndola con propiedad y resolviendo resulta:

$$A=\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\ln x\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left[\ln 1-\ln t\right] = 0-\ln 0^+ = \infty \text{ (diverge)}$$

Ejemplo 2

Calcular $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^2}dx$

SOLUCIÓN:



La función no está definida $x=0$, por tanto es una integral impropia que debemos tratarla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t}\frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{2}\frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{t\to 0^-}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{t} + \lim_{t\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_{t}^{2} \\
&= \lim_{t\to 0^-}\left[-1-\frac{1}{t}\right] + \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right] \\
&= \infty + \infty
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^2}\,dx = \infty (diverge)$$

Ejercicios propuestos 5.1

1. Evalúe la integral impropia dada o demuestre que es divergente.

1. $\int_{1}^{\infty} e^{x}dx$	4. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}dx$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$	5. $\int_{3}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{9+x^2}}$
3. $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx$	6. $\int_{0}^{3}\frac{dx}{x^2+x-2}$

2. Dada la curva $y=e^{-x}$, determine el área bajo la curva para $x\geq \ln 2$.

3. Encuentre el volumen del sólido generado al rotar R alrededor del eje y.
   $R=\left\{(x,y)/\, 0\leq x\leq 3 \wedge 0\leq y\leq x^{-1}\right\}$

4. Encuentre el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por $y=x,\quad y=\frac{1}{x},\quad y=0$; alrededor del eje x (en el primer cuadrante).

5. Sea R la región del primer cuadrante bajo la curva $y=x^{-2/3}$ y a la izquierda de $x=1$.
   a) Determine el área de la región R.
   b) Encuentre el volumen del sólido generado al rotar R alrededor del eje $y=-1$.

6. Encuentre los valores de "p" para los cuales la integral $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^p}\,dx$ converge y los valores para los cuales diverge.

Misceláneos

1. Sea la región R definida por $R=\left\{(x,y)\in IR^2\ /\ x\geq 0\wedge \frac{x}{x+1}\leq y\leq 1\right\}$. Calcule si es posible:
   a) El área de la región R.
   b) El volumen del sólido que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $y=1$
2. Calcular si es posible la longitud de la espiral $r=e^{-2\theta};\quad \theta\geq 0$.
3. Encuentre el volumen del sólido generado mediante la rotación de la región limitada por $y=e^x$, $y=0$, $x=\ln 3$; alrededor del eje x.
4. Hallar el volumen del sólido de revolución que se genera al girar la región limitada por $y=\frac{1}{x};\quad x>0$ y los ejes coodenados; alrededor del eje y.
5. Si $R=\left\{(x,y)\in IR^2\ /\ 0\leq y\leq \frac{1}{x^2+1}\wedge x\geq 0\right\}$. Determine si es posible el área de la región R.
6. Si $R=\left\{(x,y)\in IR^2\ /\ y\geq 0\wedge x\geq 1\wedge y\leq \frac{1}{x^3}\right\}$. Si es posible calcule el volumen del sólido que se genera al rotar la región R alrededor del eje $x=1$.
7. Determine el valor del área de la región, en el primer cuadrante, limitada por $y=\frac{1}{(x-1)^2}\wedge y=0$.
8. Encuentre el área de la región limitada por las $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, y los ejes coordenados en el primer cuadrante.
9. Calcular si es posible el volumen del sólido generado al rotar la región R alrededor del eje x, donde $R=\left\{(x,y)\in IR^2\ /\ y\geq 0\wedge y\leq x+1\wedge y\leq e^{-x}\right\}$.
10. Determine el volumen del sólido no acotado que se obtiene al girar en torno del eje "y" la región bajo la curva $y=e^{-x^2};\quad x\geq 0$.
11. Determine los valores de c, $c>0$, tal que el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje x, de la región limitada por el eje x, $x\geq 1$ y la función $f(x)=\frac{1}{x^C}$ exista.
12. Sea R la región definida por $R=\left\{(x,y)\in IR^2\ /\ \ln x\leq y\leq 1\wedge 0\leq x\leq e\right\}$. Calcule si es posible:
    a) El área de la región R.
    b) El volumen del sólido que se genera al rotar la región R alrededor del eje y.
13. Determine el perímetro de la región ubicada en el plano polar, que está limitada por:
    a) Una parte de la recta $\theta=\ln 2$
    b) El tramo de la cardioide $r=1+\cos\theta$ para $\pi\leq\theta\leq 2\pi$, y
    c) La espiral $r=2e^{-\theta},\quad 0\leq\theta\leq\ln 2$