2 Rectas en el plano

2.1 Ecuaciones de la recta en R^2
2.2 Posiciones relativas.

Objetivos.

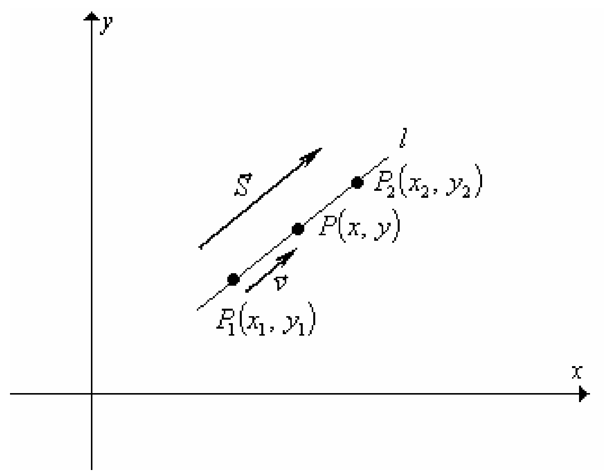
- Encontrar ecuaciones de rectas.
- Determinar si dos rectas son coincidentes, paralelas o si se intersecan en un punto.
- Encontrar la distancia entre un punto y una recta.
- Encontrar la distancia entre rectas paralelas
- Encontrar el punto de intersección entre rectas que se intersecan en un punto.
- Encontrar los ángulos de intersección entre rectas que se intersecan en un punto.

2.1. ECUACIONES DE LA RECTA EN R^2

Trataremos ahora de definir ecuaciones de la recta, partiendo de un análisis vectorial.

2.1.1 Ecuación de una recta definida por dos puntos

Es obvio que dos puntos definen una recta, observe la figura:



Llamemos a $\vec{S}=\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,\, y_2-y_1)$ **vector directriz** de la recta l.

Sea el vector $\vec{v}=\overrightarrow{P_1P}=(x-x_1,\, y-y_1)$, definido entre el punto $P_1(x_1,\, y_1)$ y un punto $P(x,\, y)$ cualquiera de la recta. Observe que $\vec{S}$ y $\vec{v}$ son paralelos, entonces $\vec{v}=k\vec{S}$ para $k\in\mathbb{R}$. Por consiguiente:

$$(x-x_1,\, y-y_1)=k(x_2-x_1,\, y_2-y_1)$$
$$(x-x_1,\, y-y_1)=(k(x_2-x_1),\, k(y_2-y_1))$$

Por igualdad de vectores:

$$\begin{cases} x-x_1=k(x_2-x_1) \\ y-y_1=k(y_2-y_1) \end{cases}$$

Finalmente:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$$

Ecuación de una recta definida por dos puntos $P_1(x_1,\, y_1)$ **y** $P_2(x_2,\, y_2)$

2.1. 2. Ecuación de una recta definida por un punto y su pendiente

Tomando la ecuación anterior en la forma $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)$

La medida de la inclinación de la recta se la llama **"Pendiente"**, se la denota como m y se la define como $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Entonces, tenemos:

$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$ **Ecuación de una recta definida por un punto $P_1(x_1, y_1)$ y su pendiente m**

2.1.3. Ecuación de una recta definida por un punto y un vector paralelo.

Considerando el vector directriz $\vec{S} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (s_x, s_y)$ como un vector paralelo a la recta, tenemos:

$\boxed{\dfrac{x - x_1}{s_x} = \dfrac{y - y_1}{s_y}}$ **Ecuación de una recta definida por un punto $P_1(x_1, y_1)$ y un vector paralelo $\vec{S} = (s_x, s_y)$.**

2.1.4. Ecuaciones Paramétricas de una recta

Considerando $\dfrac{x - x_1}{s_x} = \dfrac{y - y_1}{s_y} = t$ tenemos $\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{s_x} = t \\ \dfrac{y - y_1}{s_y} = t \end{cases}$

Por tanto otra forma de la ecuación de una recta, sería:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + s_x t \\ y = y_1 + s_y t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}}$$ **Ecuaciones Paramétricas.**

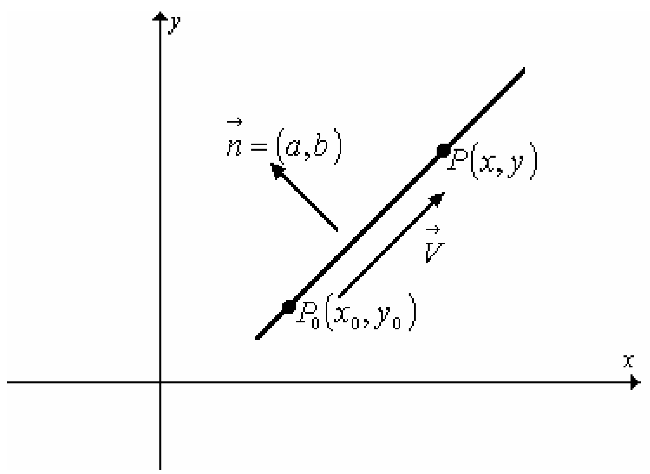
2.1.5. Ecuación Vectorial de una recta.

De lo anterior tenemos $l:(x,y)=(x_1,y_1)+(s_x,s_y)t$ considerando $\vec{V}=(x,y)$ el vector posición de un punto de la recta, $\vec{V_1}=(x_1,y_1)$ el vector posición de un punto de la recta y $\vec{S}=(s_x,s_y)$ un vector paralelo a la recta; tenemos:

$\boxed{\vec{V}=\vec{V_1}+\vec{S}t}$ **Ecuación Vectorial de una recta**.

2.1.6. Ecuación de la recta definida por un punto y un vector normal

Ahora suponga que se tiene un vector $\vec{n}=(a,b)$ perpendicular a la recta



El vector $\vec{n}=(a,b)$ y el vector $\vec{V}=\overrightarrow{P_0P_1}=(x-x_0,y-y_0)$ son ortogonales, por tanto $\vec{n}\bullet\vec{V}=0$.

Reemplazando tenemos $(a,b)\bullet(x-x_0,y-y_0)=0$

Y resolviendo resulta:

$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)=0}$ **Ecuación de la recta definida por un punto** $P_0(x_0,y_0)$ **y un vector normal** $\vec{n}=(a,b)$

2.1.7. Ecuación general de una recta

En la última ecuación resolviendo, resulta:

$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0$$
$$ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$$

Haciendo $c = -ax_0 - by_0$ resulta:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$ **Ecuación general de una recta**

Ejemplo 1

Hallar la ecuación general de la recta que contiene a los puntos $(-2,3)$ y $(1,-2)$

SOLUCIÓN:

Utilizando $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ y los puntos dados $P_1(-2,3)$ y $P_2(1,-2)$ (No importa el orden)

Reemplazando tenemos: $\frac{x-(-2)}{1-(-2)} = \frac{y-3}{-2-3}$

Resolviendo y despejando tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-5}\\ -5x-10 = 3y-9\\ 5x+3y+1=0\end{array}}$$

Ejemplo 2

Hallar la ecuación general y ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al punto $(7,3)$ y es paralela a la recta que tiene por ecuación $3x + y + 1 = 0$

SOLUCIÓN:

La recta dada tiene vector normal $\vec{n} = (3,1)$. Como la recta buscada es paralela a esta recta entonces un vector normal sería el mismo.

Empleamos la forma de la ecuación de la recta definida por un punto y un vector normal

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

reemplazando tenemos:

$$3(x-7) + 1(y-3) = 0$$
$$3x - 21 + y - 3 = 0$$
$$3x + y - 24 = 0$$

En la última ecuación, despejando y tenemos $y = -3x + 24$. Una parametrización sería

$$\begin{cases} x = t \\ y = 24 - 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3

Hallar la ecuación general de la recta que contiene al punto $(-2,-1)$ y es perpendicular a la recta que tiene por ecuación $5x+3y-1=0$

SOLUCIÓN:

La recta dada tiene vector normal $\overrightarrow{n}=(5,3)$. Como la recta buscada es perpendicular a esta recta entonces un vector directriz sería el mismo. Es decir $\overrightarrow{S}=(5,3)$

Empleamos la forma de la ecuación de la recta definida por un punto y un vector paralelo

$$\frac{x-x_1}{s_x}=\frac{y-y_1}{s_y}$$

Reemplazando y resolviendo, tenemos:

$$\frac{x-(-2)}{5}=\frac{y-(-1)}{3}$$
$$\frac{x+2}{5}=\frac{y+1}{3}$$
$$3x+6=5y+5$$
$$3x-5y+1=0$$

Ejemplo 4

Demuestre que la ecuación de la recta que contiene a los puntos $(A,0)$ y $(0,B)$ es $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1$

SOLUCIÓN:

Empleando la forma de la ecuación de la recta definida por dos puntos:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Reemplazando $P_1(A,0)$ y $P_2(0,B)$, tenemos:

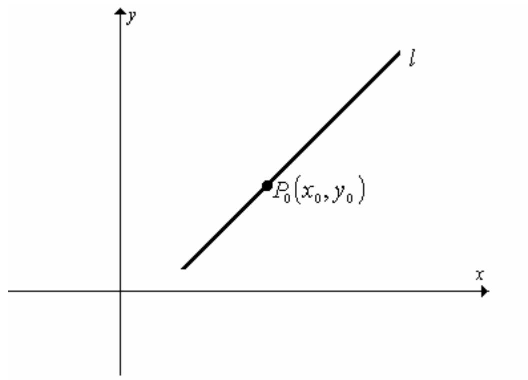
$$\frac{x-A}{0-A}=\frac{y-0}{B-0}$$
$$\frac{x-A}{-A}=\frac{y}{B}$$
$$-\frac{x}{A}+1=\frac{y}{B}$$
$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1 \quad l.q.q.d.$$

2.2. POSICIONES RELATIVAS.

2.2.1 Entre un punto y una recta

2.2.1.1 Un punto P_0 pertenece a la recta l

Un punto P_0 de coordenadas (x_0, y_0) pertenece a la recta l con ecuación $ax + by + c = 0$ si y sólo si las coordenadas del punto satisfacen la ecuación de la recta, es decir $ax_0 + by_0 + c = 0$.

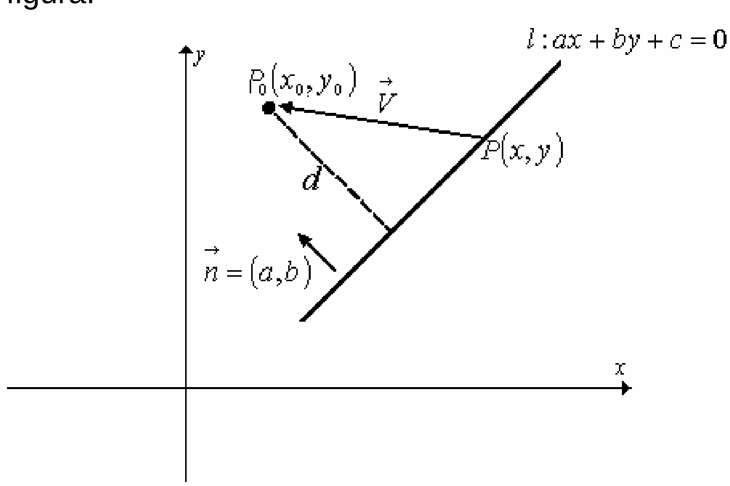


2.2.1.2 El punto P_0 no pertenece a la recta l.

Un punto P_0 de coordenadas (x_0, y_0) **no pertenece** a la recta l con ecuación $ax + by + c = 0$ si y sólo si **las coordenadas del punto no satisfacen la ecuación** de la recta, es decir $ax_0 + by_0 + c \neq 0$.

En este caso podemos determinar la formula de la distancia entre el punto y la recta.

Observe la figura:



La distancia del punto P_0 a la recta será la proyección escalar de $\vec{V}$ sobre $\vec{n}$. El vector $\vec{V}$ está definido entre los puntos $P_0(x_0, y_0)$ y $P(x,y)$ donde $y = \frac{-c-ax}{b}$ (despejando de la ecuación de la recta). Es decir,

$$\vec{V} = \overrightarrow{PP_0} = \left(x_0 - x,\, y_0 - \frac{-c-ax}{b} \right).$$

Ahora,

$$d(P_0, l) = \operatorname{Proy}_{\vec{n}} \vec{V} = \left| \frac{\vec{V} \bullet \vec{n}}{\left\| \vec{n} \right\|} \right| = \left| \frac{\left(x_0 - x,\; y_0 + \frac{c+ax}{b} \right) \bullet (a,b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{(x_0 - x)a + \left(y_0 + \frac{c+ax}{b} \right) b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{ax_0 - ax + by_0 + c + ax}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Por tanto:

$$\boxed{d(P_0, l) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|}$$

Ejemplo

Hallar la distancia entre el punto $(2,1)$ y la recta que tiene por ecuación $3x + y + 1 = 0$

<u>SOLUCIÓN:</u>

Empleando la formula $d(P_0, l) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ tenemos:

$$d(P_0, l) = \left| \frac{3(2) + 1(1) + 1}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \right| = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

2.2.2 POSICIÓN RELATIVA ENTRE DOS RECTAS

2.2.2.1 Rectas coincidentes

Sea l_1 una recta con ecuación $a_1x+b_1y+c_1=0$ y sea l_2 una recta con ecuación $a_2x+b_2y+c_2=0$. Entonces l_1 y l_2 son coincidentes si y sólo si:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

Ejemplo

Las rectas con ecuaciones $2x+y-3=0$ y $6x+3y-9=0$ son COINCIDENTES debido a que $\frac{6}{2}=\frac{3}{1}=\frac{-9}{-3}=3$.

2.2.2.2 Rectas paralelas

Dos rectas l_1 y l_2 con ecuaciones $a_1x+b_1y+c_1=0$ y $a_2x+b_2y+c_2=0$ son paralelas si y sólo si:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

Ejemplo

Las rectas con ecuaciones $2x+y-3=0$ y $6x+3y+5=0$ son PARALELAS debido a que $\frac{6}{2}=\frac{3}{1}$

2.2.2.3 Rectas intersecantes en un punto

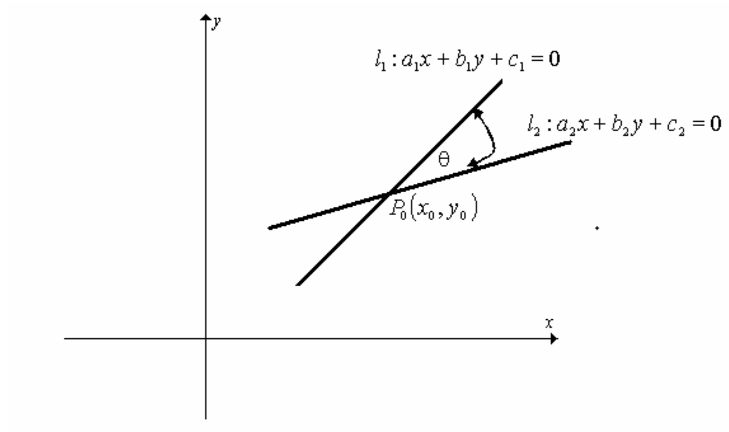
Dos rectas l_1 y l_2 con ecuaciones $a_1x+b_1y+c_1=0$ y $a_2x+b_2y+c_2=0$ se intersecan en un punto si y sólo si:

$$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$$

Ejemplo

Las rectas con ecuaciones $2x+y-3=0$ y $x+3y+5=0$ se INTERSECAN EN UN PUNTO debido a que $\frac{1}{2}\neq\frac{3}{1}$.

En este caso, es posible hallar el punto de intersección y los ángulos entre ellas.



Para encontrar el punto bastará con resolver el sistema simultáneo:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$$

Los ángulos de intersección entre las rectas serán los mismos que el de los vectores normales o el de los vectores directrices. Es decir:

$$\theta = ar\cos \frac{\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = ar\cos \frac{\vec{S}_1 \bullet \vec{S}_2}{\|\vec{s}_1\| \|\vec{S}_2\|}$$

Ejercicio resuelto

Hallar el ángulo de intersección entre las rectas cuyas ecuaciones son $l_1 : (x, y) = (1,2) + t(1, \sqrt{3})$ y $l_2 : (x, y) = (-1,2) + t(-\sqrt{3}, -1)$.

SOLUCIÓN:

En este caso los vectores directrices son $\vec{S}_1 = (1, \sqrt{3})$ y $\vec{S}_2 = (-\sqrt{3} - 1)$, por tanto

$$\theta = ar\cos \frac{\vec{S}_1 \bullet \vec{S}_2}{\|\vec{s}_1\| \|\vec{S}_2\|} = ar\cos \frac{(1, \sqrt{3}) \bullet (-\sqrt{3}, -1)}{(2)(2)} = ar\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5\frac{\pi}{6}$$

Hemos obtenido el ángulo mayor.

El ángulo menor sería $\frac{\pi}{6}$ ¿Porqué?

Ejercicios Propuestos 2.1

1. Determine la ecuación general de la recta que contiene al punto P(3,2) y que es paralela a al vector $\vec{v} = 3i - j$
   Resp. $x + 3y - 9 = 0$
2. Determine la ecuación de la recta que contiene al punto (-2,1) y es paralela al vector $\langle 1,-3 \rangle$.
   Resp. $y + 3x + 5 = 0$
3. Determine la ecuación de la recta que contiene al punto P(2,1) y que es paralela a la recta dada por: $x = 3 + t \wedge y = -2t$
   Resp. $2x + y = 5$
4. Determine la ecuación general de la recta que contiene al punto P(2,1) y que es paralela a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 3 + t \wedge y = -2t$, $t \in IR$
   Resp. $2x + y - 5 = 0$
5. Determine la ecuación general de la recta que es paralela al vector $\vec{v} = (3,-4)$ y que contiene al punto que está dado por la intersección de las rectas que tienen por ecuación $x + y = 2$ y $2x - 4y = 1$
   Resp. $8x + 6y - 15 = 0$
6. Determine la ecuación general de la recta que es perpendicular a la recta con ecuación $4x + y - 1 = 0$, y que contiene al punto de intersección de las rectas con ecuaciones $2x - 5y + 3 = 0 \wedge x - 3y - 7 = 0$.
   Resp. $x - 4y - 24 = 0$
7. Sean las rectas $l_1 : ax + 2y - 3 = 0$ y $l_2 : 5x + by - 7 = 0$. Si su punto de intersección es $P(-1,3)$, determine los valores de a y b -
   Resp. $a = 3 \quad b = 4$
8. Determine la distancia de punto $P_0(2,3)$ a la recta de ecuación $2y + x - 4 = 0$
   Resp. $\frac{4}{\sqrt{5}}$
9. Determine la distancia entre las rectas $l_1 : 2x + 3y - 4 = 0$ y $l_2 : 6x + 9y - 3 = 0$
   Resp. $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$
10. Determine la menor distancia entre las rectas que tienen por ecuación $2x - 3y + 4 = 0$ y $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$
    Resp. $d = 0$
11. Determine el valor de "k" para que la distancia de la recta con ecuación $kx + 3y + 5 = 0$ al punto (-2,2) sea igual a 1.
    Resp. $\dfrac{22 \pm 2\sqrt{37}}{3}$
12. Determine la medida del ángulo agudo formado por las rectas cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = 1 \wedge y = 10 - t$ y $x = 1 - 2t \wedge y = 4 - 2t$.
    Resp. $\dfrac{\pi}{4}$
13. Determine la ecuación de la recta de pendiente $-\dfrac{3}{4}$ y que forma con los ejes coordenados, en el primer cuadrante, un triángulo cuya área tiene un valor de $24u^2$.
    Resp. $3x + 4y - 24 = 0$
14. Determine la ecuación de la recta que equidista de las rectas cuyas ecuaciones son: $x + 2y + 10 = 0$ y $x + 2y - 2 = 0$.
    Resp. $x + 2y + 4 = 0$
15. Encontrar el valor de "k" para que las rectas que tienen por ecuaciones $3kx + 9y = 5$ y $6x - 4y = 0$, sean perpendiculares.
    Resp. 2

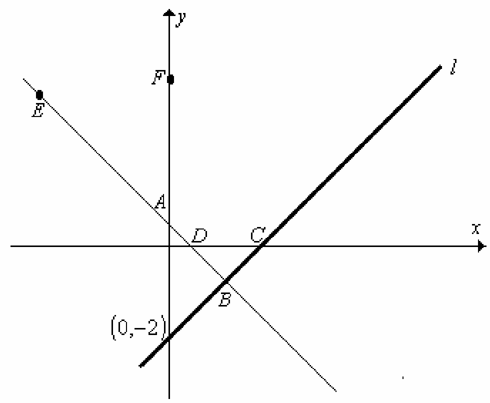
16. Encontrar el valor de "k" para que la recta que tiene por ecuación $3x - ky - 8 = 0$ forme un ángulo de medida $45°$ con la recta de ecuación $2x + 5y - 17 = 0$.
Resp. 7, -9/7

17. Determine la ecuación de la recta cuyo punto más cercano al origen es (3,4).
Resp. $3x + 4y - 25 = 0$

18. Determine todos los posibles valores de "k" para que la recta con ecuación $x + 2y + k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo cuya área tiene un valor de $16u^2$.
Resp. ± 8

19. Determine la ecuación de la recta " l ".

$\angle EAF = 40°$
$\angle DBC = 100°$



Resp. $x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$