Nociones de Topología

I) Espacios Métricos

Sea X un conjunto no vacío
Sea la función

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(p, q) \mapsto d(p, q) \qquad \text{(E1)}$$

$\forall p, q, r \in X$

i) $p \neq q, \quad d(p, q) > 0$
$p = q, \quad d(p, q) = 0$

ii) Conmutatividad (C1)
$d(p, q) = d(q, p)$

iii) "Desigualdad triangular"
$d(p, q) \leq d(q, r) + d(r, q)$

Def 1) La función "***d***" que satisface ***i, ii, iii***, la llamamos métrica.
Def 2) La estructura $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$ la llamaremos Espacio métrico.
Es decir, un espacio métrico es cualquier conjunto no vacío en el cual se puede definir una métrica.

Propiedades

P1) $\forall p, q \in X$, se verifica $(p, q) \geq 0$

Demostración
$d(p, p) \leq d(p, q) + d(q, p), \forall p, q \in X$
$0 \leq 2d(p, q)$ (DP1)
$\therefore \forall p, q \in X, \quad d(p, q) \geq 0$

P2) Si $d(p, q) = 0 \Rightarrow p = q$

Demostración "Por reducción al absurdo"
Sea $p \neq q \wedge d(p, q) = 0$
pero $p \neq q \Rightarrow d(p, q) > 0$
esto contradice $d(p, q) = 0$ (DP2)
$\therefore$ P2 es verdadero

Ejemplos de métricas:

1) $X = \mathbb{R},\ d(p,q) = |p - q|$

2) $X = \mathbb{R}^2,\ d\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$

3) $X = \mathbb{R}^2,\ d\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Max}\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$

Actividad en clase

Determinar que 1,2,3 son métricas.

Tarea 1

T 1.1) $X = \mathbb{R},\ \ d(p,q) = [|p - q|]$

a) (X, d) es un espacio métrico?

b) ¿Qué propiedad sí cumple y qué propiedad no cumple?

II) Elementos de los Espacios Métricos.

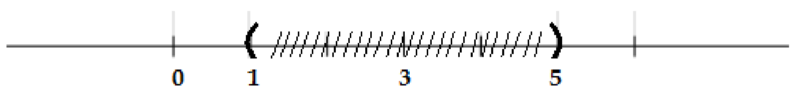
***Def* 2.1) Entorno**.- Sea (X, d) espacio métrico, Se dice entorno, vecindad o bola al conjunto $N_r(p) = \{\ q \in X,\ \ d(p,q) < r\}$, al punto "$p$" le llamamos centro y a "r" lo llamamos radio.

Caso particular.

$$N_r(p) = \{q \in X,\ \ |p - q| < r\}$$

Ejemplo

Ej. 2.1) $N_2(3) = \{q \in \mathbb{R},\ \ |q - 3| < 2\}$



Ej. 2.2) $N_{-1}(0) = \{q \in \mathbb{R},\ \ |q - (0)| < -1\}$

$N_{-1}(0) = \emptyset$

Observamos que el radio debe ser positivo.

Observación:

Otra notación puede ser: $B(P, \delta) = N_\delta(p)$

Entorno "No Incluido".

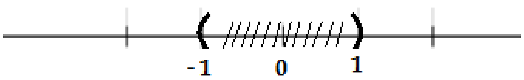
***Def* 2.1.1).** $\overset{o}{N}_r\,(p) = \{\, q \in X,\ \ 0 < d(p,q) < r\}$

A este conjunto lo llamamos entorno "No Incluido" por cuanto

$\overset{o}{N}r(p) = N_r(p) - \{p\}$ es decir no incluye el punto centro.

Ejemplo:

Ej.2.3) $\overset{o}{N}_1(0) = \{q \in \mathbb{R};\ < |q - 0| < 1\}$



En adelante con frecuencia tomaremos la métrica euclidiana, es decir

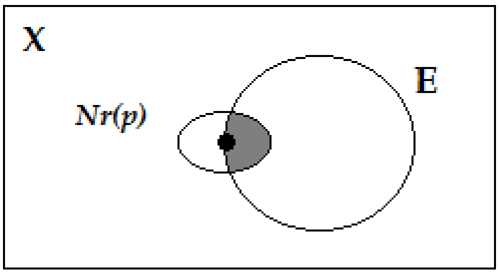
$$d(x, y) = |x - y|$$

***Def* 2.2) Punto de acumulación o Punto Límite.**

Sea $E \subset X,\ \ p \in X$, no necesariamente $p \in E$, se dice que p es un punto de acumulación del conjunto E si y solo si, $\forall r > 0$

$$\overset{o}{N}r(p) \cap E \neq \emptyset$$

Esto significa que siempre se puede encontrar un punto del conjunto E tan cercano al punto p como se quiera.

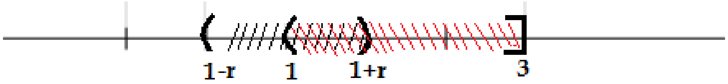


Ejemplo:

Ej. 2.4) $X = \mathbb{R},\ \ E = (1 \quad 3],\ \ p = 1$

Se puede verificar $\forall r > 0$

$$\overset{o}{N}r(1) \cap E \neq \emptyset$$



Observamos $\overset{\circ}{N}r(1) \cap E = (1 \quad 1+r) \neq \emptyset, \ \forall r > 0$ que $p = 1 \notin E$

***<u>Def</u> 2.3)* Punto Aislado.**

Sea $X = \mathbb{R}, \ \ E \subset X$, se dice que p es un punto aislado del conjunto E si y solo si $p \in E$ y p no es punto de acumulación de E.

Ej. 2.5) $X = \mathbb{R}, \ \ E = \{1,2,3\}$

$$p = 1 \ es \ punto \ aislado \ de \ E$$
$$p = 2 \ es \ un \ punto \ aislado \ de \ E$$
$$p = 3 \ es \ un \ punto \ aislado \ de \ E$$

***<u>Def</u> 2.4)* Conjunto Cerrado.**

Sea, $E \subset X$, se dice que E no es cerrado si y solo si todos sus puntos límites o de acumulación pertenecen a él.

Ej. 2.6) $X = \mathbb{R}, \ \ E = (1 \quad 3]$

No es cerrado, ya que 1 es el punto de acumulación de E y $1 \notin E$

Ej. 2.7) Si E no tiene puntos de acumulación entonces E es cerrado.

***<u>Def</u> 2.5)* Punto Interior.**

Sea $E \subset X$, se dice que p es punto interior de E si y solo si $\exists r > 0, \ \ Nr(p) \subset E$

Observamos que, si p es punto interior de E entonces $p \in E$

***<u>Def</u> 2.6)* Conjunto Abierto.**

Sea $E \subset X$, se dice E es conjunto abierto si y solo si todos sus puntos son puntos interiores.

Observaciones:

Decir "No Cerrado" no implica "Abierto".

Decir "No Abierto" no implica "Cerrado".

Existen conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez.

<u>Proposición 2.1</u>

Toda vecindad es un conjunto abierto.

Demostración

Sea $q \in Nr(p)$,

Pide demostrar que: q es punto interior de $Nr(p)$ (DP2.1)

Si $q \in Nr(p) \Rightarrow d(p,q) < r$
por propiedad de los números reales $\exists \varepsilon > 0$, tal que

$$d(p,q) + \varepsilon < r$$
$$\Rightarrow d(p,q) < r - \varepsilon$$

Ahora construimos $N\varepsilon(q)$, tenemos que
$d(p,t) \leq d(p,q) + d(q,t) < (r-\varepsilon) + \varepsilon$,
Es decir $d(p,t) < r \Rightarrow t \in Nr(p)$.
Por lo tanto $\forall t \in N\varepsilon(q) \Rightarrow t \in Nr(p)$,
esto significa $N\varepsilon(q) \subset Nr(p)$
A la vez concluimos que q es punto interior de $Nr(p)$,
Por lo tanto todos los puntos de $Nr(p)$ son puntos interiores,
entonces $Nr(p)$ es abierto.

Proposición 2.2

Si p es un punto límite de un conjunto E, entonces toda vecindad de p contiene infinitos puntos de E.

Demostración:
Por construcción
(Actividad en clase)

***Def* 2.7) Punto de Adherencia.**

Un punto $p \in X$ es punto de Adherencia del conjunto $E \subset X$ si todo $N\varepsilon(p)$ es tal que

$$N\varepsilon(p) \cap E \neq \emptyset$$

Se hace evidente que todo punto interior y todo punto límite del conjunto es punto de adherencia, esto incluye a los puntos de frontera.

***Def* 2.8) Clausura de $A \equiv \overline{A}$**

$$\overline{A} = \{p \;/\; p \textit{ es punto de adherencia de } A\}$$

Proposición 2.3

El conjunto $\overline{A}$ es conjunto cerrado.

Observación: Se evidencia que: A es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$

***Def* 2.9) $A' \overset{\Delta}{\equiv}$ conjunto derivado.**

Sea $A \subset X$,

$$A' = \{p \;/\; p \textit{ punto de acumulación de } A\}$$

***<u>Def</u> 2.10)* Punto de Frontera.**
$q \in X, \quad E \subset X$ (no necesariamente pertenece a E)
Se dice que: q es punto de frontera de E si y solo si
$\forall \varepsilon > 0, \quad N\varepsilon(q) \cap E \neq \emptyset \quad \wedge \; N\varepsilon(q) \cap E^C \neq \emptyset$

***<u>Def</u> 2.11)* $\partial E \equiv$ frontera de E**

$$\partial E = \{q \; / \; q \; punto \; de \; frontera \; de \; E \}$$

<u>Proposición 2.4</u>
∂E es un conjunto cerrado.

<u>Proposición 2.5</u>
Todo punto aislado de un conjunto es punto de frontera y también es punto de adherencia del conjunto.

$X = \mathbb{R}; \quad A \subset \mathbb{R}$

A	A'	$\overline{A}$	∂A	**Abierto**	**Cerrado**
$(0 \quad 1)$	$[0 \quad 1]$	$[0 \quad 1]$	$\{0,1\}$	Si	No
$(0 \quad 1]$	$[0 \quad 1]$	$[0 \quad 1]$	$\{0,1\}$	No	No
$[0 \quad 1]$	$[0 \quad 1]$	$[0 \quad 1]$	$\{0,1\}$	No	Si
$(0 \quad 1] \cup \{2\}$	$[0 \quad 1]$	$[0 \quad 1] \cup \{2\}$	$\{0,1\}$	No	No
$[0 \quad 1] \cup \{2\}$	$[0 \quad 1]$	$[0 \quad 1] \cup \{2\}$	$\{0,1,2\}$	No	Si
$\{0,1,2\}$	$\emptyset$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$	No	Si
$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\right\}$	$\{1\}$	$A \cup \{1\}$	$A \cup \{1\}$	No	No
$\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \; / \; n \in \mathbb{N}\right\}$	$\{-1,1\}$	$A \cup \{-1,1\}$	$A \cup \{-1,1\}$	No	No

<u>Actividad</u>.
Teorema.- Un conjunto E es abierto si y solo si E^C es cerrado.
Sea $X = \mathbb{R}$
1) Proposición. $\emptyset$ es abierto,
2) Proposición. $\emptyset$ es cerrado,
3) Proposición. $\mathbb{R}$ es abierto,
4) Proposición. $\mathbb{R}$ es cerrado,
5) Proposición. $\overline{E} = E \cup E'$

Procedemos a la demostración del teorema

Demostración: " E^C *es cerrado* $\Rightarrow E$ *es abierto* "

Tomamos $\forall p \in E$

Esto implica que $p \notin E^c$, además E^c es cerrado entonces p no puede ser punto de acumulación, esto es:

$\neg (\forall r > 0, \; \overset{o}{N}r(p) \cap E^c \neq \emptyset)$

Equivalente: $\exists r > 0 \; \overset{o}{N}r(p) \cap E^c = \emptyset$, además $p \notin E^c$, entonces

$(\overset{o}{N}r(p) \cap E^c) \cup \{p\} = \emptyset,$

Entonces $Nr(p) \cap E^c = \emptyset \Rightarrow Nr(p) \subset E$

Esto significa que p es punto interior de E, por lo tanto todos los puntos de E son interiores y en consecuencia E es conjunto Abierto. LQQD.

Demostración: " E *es abierto* $\Rightarrow E^C$ *es cerrado* "

Sea p cualquier punto de acumulación del conjunto E^C, entonces tenemos dos posibilidades

1.- $p \notin E^c$

2.- $p \in E^c$

Demostraremos que la primera posibilidad no es posible.

En efecto si $p \notin E^c \Rightarrow p \in E$, pero E es conjunto abierto por consiguiente p es punto interior de E, lo cual significa que:

$$\exists r > 0, Nr(p) \subset E \Rightarrow \overset{o}{N_r}(p) \subset E \Rightarrow \overset{o}{N_r}(p) \cap E^c = \emptyset$$

Por tanto p no es punto de acumulación de E^c lo cual es contradictorio,

Solo queda la segunda posibilidad: $p \in E^c$,

Es decir todos los puntos de acumulación del conjunto E^c pertenecen al conjunto E^c, entonces por definición E^c es un conjunto cerrado. LQQD.

III. Convergencia en Espacios Métricos.

Sea (X, d) *Espacio Métrico*, $E = \{p_n\} \subset X$,

$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ si y solo si $[\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N \Rightarrow d(p_n, p) < \varepsilon]$

Para un espacio métrico euclidiano $d(x, y) = |x - y|$

Si p existe decimos que p_n converge caso contrario diverge.

Límite de Funciones.

<u>Def 2.12</u>.- Sean $(X, d_x), (Y, d_y)$ espacios métricos, sea $E \subset X$ y $f: E \to Y$ y p punto límite de E, decimos:

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in N_\delta(p) \cap E \Rightarrow f(x) \in N_\varepsilon(L)$$

Su equivalente en un espacio métrico Euclidiano

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in E, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Observación.
La existencia del límite de una función tiene sentido en un punto de acumulación o punto límite, llamado así por cuanto se lo usa especialmente para definir el límite.

Continuidad de funciones.

Def 2-13.- $(X, d_x), (Y, d_y)$ espacios métricos $E \subset X,\ p \in E$ y $f: E \to Y$
Se dice que f es contínua en p si y solo si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in E, d_x(x, p) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

Su equivalente en un espacio Euclidiano

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in E, |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Observación.
* En el límite, p debe ser punto de acumulación del conjunto, no necesariamente debe pertenecer al conjunto.
* En el límite, los acercamientos se realizan por todos los lados posibles.

Ej.
$X = \mathbb{R},\ \ E = (0 \quad 1)$
$f: (0 \quad 1) \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
Calcular:
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$
En efecto $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ no se tiene en cuenta los acercamientos por la izquierda del punto cero, por cuando no son parte del dominio.

Observación:

Proposición: Toda función es continua en los puntos aislados de su dominio. Esta proposición se la puede demostrar por la definición de continuidad

Proposición Si p es un punto límite o de acumulación entonces f es contínua en p si y solo si:
$\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$