GEOMETRIA DEL ESPACIO

1. SUPERFICIE PRISMÁTICA Y PRISMA
2. SUPERFICIE PIRAMIDAL Y PIRÁMIDE
3. CUERPOS REDONDOS.
4. SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

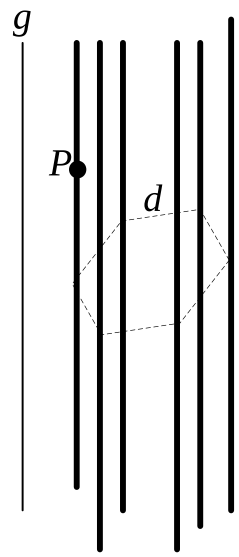
Objetivos:

- Determinar áreas de superficies.
- Determinar volúmenes de sólidos.

1. SUPERFICIE PRISMÁTICA Y PRISMA

1.2 DEFINICIÓN

> Suponga que se tiene una poligonal d y que se trazan rectas paralelas a una recta dada g siguiendo la poligonal; al conjunto de puntos que pertenecen a estas rectas se denomina ***SUPERFICIE PRISMÁTICA INDEFINIDA***.

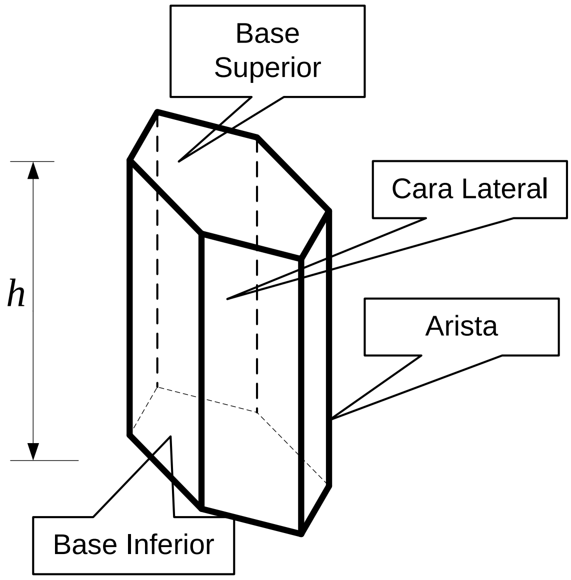


A la recta g se la llama **generatriz** y a la poligonal d **directriz**.

Observe que la **superficie prismática** sería la **frontera**.

En cambio **PRISMA** sería ya no considerar a la poligonal solamente sino a su región interior también, es decir al polígono. Por tanto nos estaríamos refiriendo al **sólido**.

Si consideramos la región limitada entre dos planos paralelos tenemos un **PRISMA DEFINIDO**. Aquí surgen las siguientes definiciones. A los polígonos de los planos se los denomina BASE. Si g es una recta perpendicular a los planos que contienen a las base, tenemos un ***Prisma Recto definido***. Caso contrario se lo llama ***Prisma Oblicuo***. Nos dedicaremos al estudio sólo de los Prismas rectos.



Las definiciones que surgen para este cuerpo están ilustradas en el dibujo anterior. La distancia entre las bases se denomina **altura** y se la denota con la letra h.

1.1 ÁREA DE LA SUPERFICIE DE UN PRISMA.

El **área de la base** es el área de una figura plana, por lo general un polígono, por tanto su calculo se lo realiza igual que en geometría plana.

El **área de la superficie lateral**, se la determinada hallando el área de cada una de las caras laterales y luego habrá que sumarlas. Si la base es un polígono entonces las caras laterales son rectángulos y si el polígono es regular bastará con hallar al área de una cara y multiplicarla por el número de lados.

El **área total** será igual a la suma del área lateral con el doble del área de una de las bases. Es decir:

$$\boxed{A_{Total} = A_{Lateral} + 2A_{Base}}$$

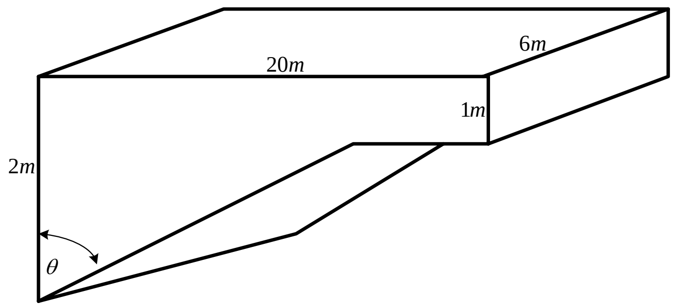
1.2 VOLUMEN DE UN PRISMA.

El volumen de todo prisma está dado por el producto del área de una base por la altura. Es decir:

$$\boxed{V = A_{Base}h}$$

Ejercicio propuestos 1.

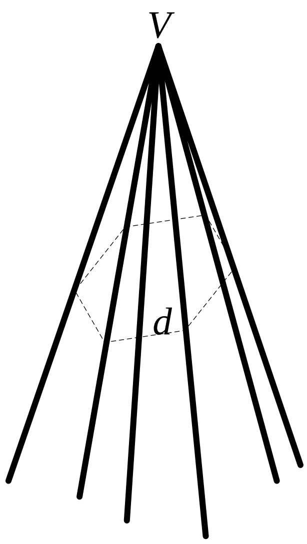
1. Se necesita construir una piscina como se indica en la gráfica. Si el metro cúbico de agua tiene un costo de 1 dólar ¿Cuánto gastaría en llenar la piscina?
   $\theta = \arctan 10$



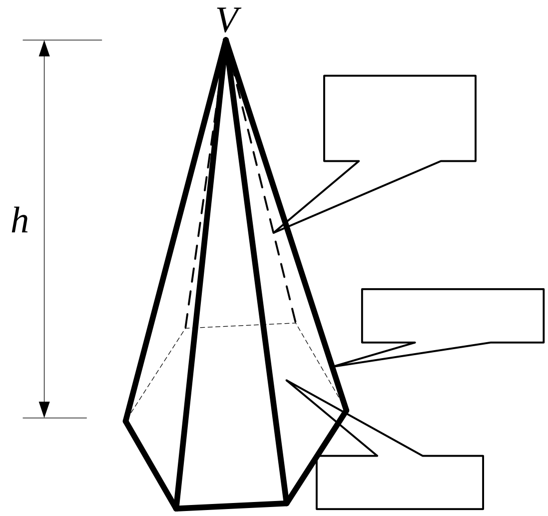
Resp. $150

2. SUPERFICIE PIRAMIDAL Y PIRÁMIDE

Sea un polígono convexo. Sea V un punto tal que no pertenece al plano que contiene al polígono. Se denomina ***SUPERFICIE PIRAMIDAL O ÁNGULO POLIÉDRICO*** al conjunto de puntos pertenecientes a semirrectas que tienen como origen a V y que intersecan a la poligonal del polígono.



Si las semirrectas intersecan a todo el **polígono**, tenemos una región sólida que se denomina **Pirámide Indefinida**. Si consideramos la región superior de la superficie piramidal limitada inferiormente por un plano que la corta tenemos una **Pirámide Definida** o simplemente una **pirámide** de altura h, y si el pie de la altura de la pirámide equidista de los vértices de la base tenemos una **pirámide recta**. Las definiciones se ilustran en la figura.



2.1 ÁREA DE LA SUPERFICIE PIRAMIDAL

La base es un polígono, igual que en los primas, por tanto el área de esta superficie se la determina de la misma forma como ya se ha mencionado.

El **área de la superficie lateral**, se la determinada hallando el área de cada una de las caras laterales y luego sumarlas. Si la base es un polígono entonces las caras laterales son triángulo y si el polígono es regular bastará con hallar al área de una cara y multiplicarla por el número de lados.

El **área total** será igual a la suma del área lateral con el área de la base. Es decir:

$$\boxed{A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base}}$$

2.1.1 VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

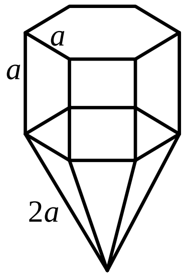
El volumen de toda pirámide está dado por: $\boxed{V = \frac{1}{3} A_{Base} h}$

Ejercicio propuestos 2

1. Hallar el volumen de una pirámide triangular en la que todos sus lados y aristas tienen la misma longitud l.

   Resp. $V=\frac{\sqrt{2}}{12}l^3$

2. Determine el volumen del sólido que se muestra en la figura:



   Resp. $V=\frac{3}{2}a^3\left(\sqrt{3}+1\right)$

3. Encuentre el área de la superficie lateral de un tetraedro, cuyas caras laterales son congruentes, cuya apotema mide el triple de la arista de la base y la circunferencia circunscrita a la base mide 24π cm.

   Resp. $A=1944\ cm^2$

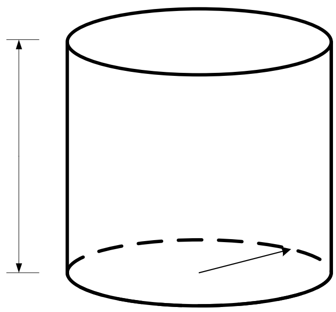
4. Un recipiente sin tapa tiene la forma de una pirámide regular invertida, donde su altura mide 3 pies y su base es un hexágono inscrito de una circunferencia de diámetro igual a 2 pies. Se desea pintar 100 de estos recipientes por dentro y por fuera, para lo cual se utilizará pintura donde con un galón se puede pintar 470 pies cuadrados. Determine la cantidad de galones de esa pintura que se necesitarán para pintar los 100 recipientes.

   Resp. $\frac{30}{47}\sqrt{39}$ gal.

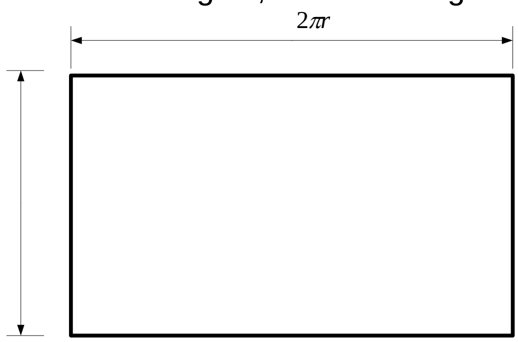
3. CUERPOS REDONDOS.

3.1 CILINDRO.

El cilindro es un prisma circular, es decir sus bases son círculos. Las dimensiones que lo definen es la medida del radio de su base y su altura.



La superficie lateral es un rectángulo, observe la figura:



Entonces, el **área de la superficie lateral** sería: $\boxed{A_{Lateral} = 2\pi rh}$

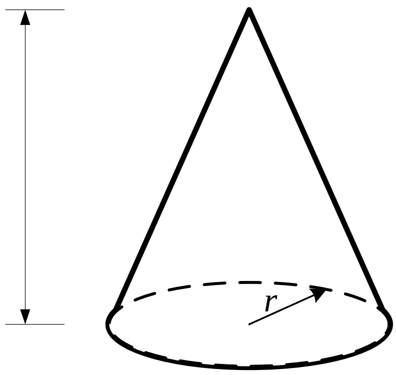
Y su **área total** sería: $\boxed{A_{Total} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r\left(r+h\right)}$

Su **volumen** sería $\boxed{V = \pi r^2 h}$

h

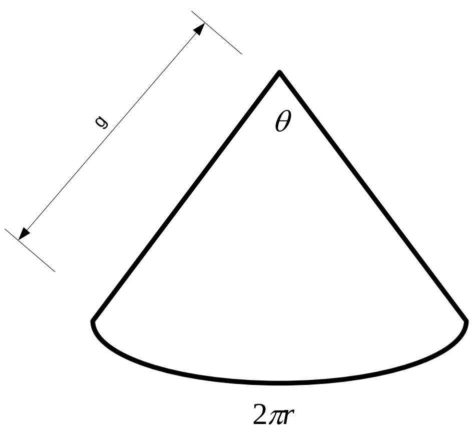
3.2 CONO.

El cono es una pirámide circular, es decir su base es un círculo



Las dimensiones que la definen es el radio de su base y su altura.

La **superficie lateral** es un sector circular



Llamando g a la **GENERATRÍZ** del cono, observe la figura anterior, el **área de la superficie lateral** sería:

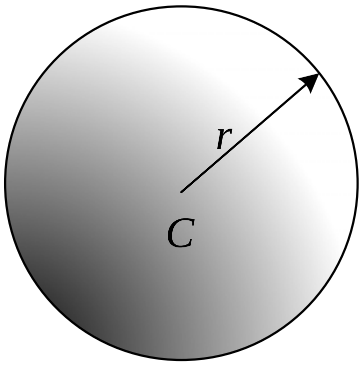
$$A_{Lateral} = \frac{1}{2}g^2\theta$$

Pero $\theta = \frac{2\pi r}{g}$ entonces $A_{Lateral} = \frac{1}{2}g^2\left(\frac{2\pi r}{g}\right) = \pi rg$

Su **volumen** sería: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

3.3 SUPERFICIE ESFÉRICA

Sea C un punto del espacio y sea r un número positivo. La superficie esférica es el conjunto de punto tales que su distancia a C es **igual** a r.



3.3.1 ESFERA.

La esfera, en cambio, es el conjunto de puntos tales que su distancia al centro es **menor o igual** a r.

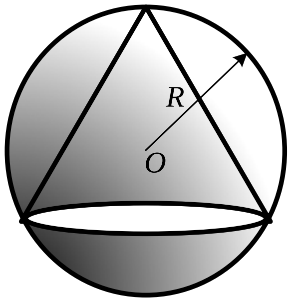
La Esfera entonces es la región interior con su frontera.

El **área de la superficie esférica** es: $A = 4\pi r^2$

Y su **volumen** es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Ejemplo

Un cono recto está inscrito en una esfera de radio R y centro O. Si el volumen y radio del cono es $12\pi\ cm^3$ y $3\,cm$ respectivamente. Halle el área de la esfera.



SOLUCIÓN:

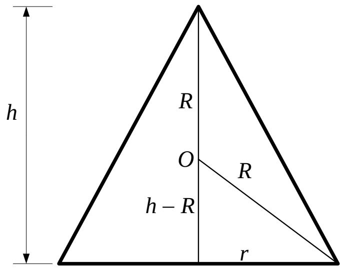
Como el área de la esfera es función del radio, entonces debemos encontrarlo.

Llamemos h a la altura del cono y r al radio de la base del cono. El radio es dato del problema y la altura puede ser calculada debido a que nos proporcionan el valor del volumen del cono.

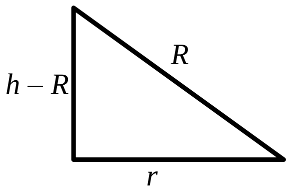
$$V_C = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$12\pi = \frac{1}{3}\pi(3)^2 h \Rightarrow h = 4$$

Ahora observe la figura:



Aplicando El teorema de Pitágoras al triángulo



Tenemos

$$R^2 = r^2 + (h-R)^2$$

$$R^2 = r^2 + h^2 - 2hR + R^2$$

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$$

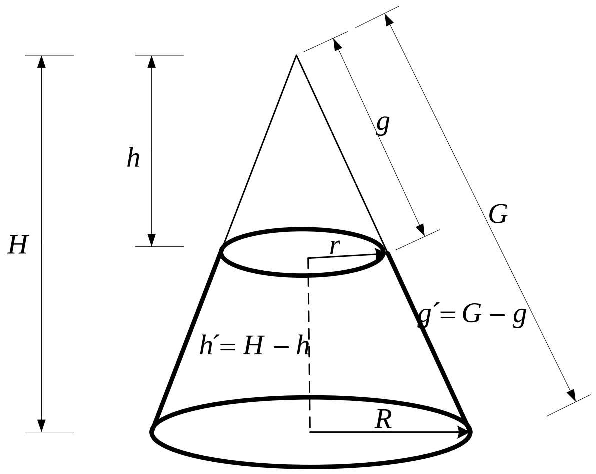
$$R = \frac{3^2 + 4^2}{2(4)} = \frac{25}{8}$$

Finalmente

$$A_E = 4\pi\left(\frac{25}{8}\right)^2 = \frac{625\pi}{16}cm^2$$

3.4 CONO TRUNCADO

Analicemos un **tronco de cono.**



Note que: $\boxed{\dfrac{r}{R} = \dfrac{h}{H} = \dfrac{g}{G}}$

Su **volumen** es:

$\boxed{V = \dfrac{\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)h'}$ ¡Demuéstrelo!

El **área de su superficie lateral** es:

$\boxed{A_L = \pi\left(R + r\right)g'}$ ¡Demuéstrela!

Ejercicios Propuestos 3.

1. Una esfera está inscrita en un cono y la longitud del diámetro de la base del cono es igual a la longitud de la generatriz del mismo, los cuales miden 10 cm. Determine el volumen de la esfera. Resp. $\dfrac{500\sqrt{3}\pi}{27}cm^3$.

2. Una esfera está situada dentro de un cilindro de manera que la altura y el diámetro del cilindro tienen la misma dimensión que el diámetro de la esfera. Determine la relación entre el área de la superficie esférica y el área de la superficie lateral del cilindro.

   Resp. 1.

3. En una esfera de radio r se tiene inscrito un cilindro de tal manera que el diámetro del cilindro es congruente con el radio de la esfera. Calcule la relación entre el volumen del cilindro y el volumen de la esfera.

   Resp. $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

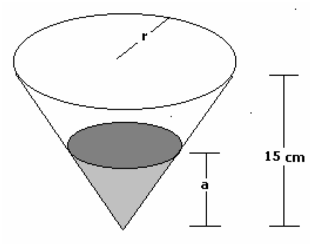
4. Sean dos esferas concéntricas, con la característica de que la esfera externa se encuentra circunscrita a un cono cuya generatriz mide 3 cm., y es igual en longitud al diámetro de su base; la esfera interna está inscrita en el mismo cono. Determine el volumen del espacio entre las dos esferas.

Resp. $\frac{7}{2}\sqrt{3}\pi\ cm^3$.

5. Un globo esférico contiene originalmente $\frac{32\pi}{3}cm^3$ de aire. Luego de inflarlo más, se halla que su diámetro ha crecido 2 cm. Determine el volumen de aire que se incrementó.

Resp. $\Delta V = \frac{76}{3}\pi\ cm^3$

6. Un recipiente en forma de cono recto de 15 cm. de altura y radio ‘r’ tiene sus $\frac{8}{27}$ partes llenas de helado, determine la altura ‘a’ del helado.



Resp. $a = 10$

7. En un cono circular recto donde el diámetro de la base y su altura miden 3m., se inscribe otro cono cuya altura mide 2m. de manera que él vértice del cono inscrito coincide con el centro de la base del cono circunscrito. Determine el volumen del cono inscrito.

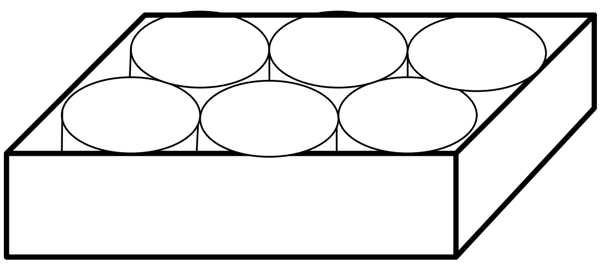
Resp. $V = \frac{\pi}{6}m^3$

8. Dos esferas tangentes externamente tienen radios de longitud iguala 8 cm. y 12 cm. respectivamente. Las esferas están situadas sobre la superficie lisa de una mesa. Determine la distancia entre los dos puntos de tangencia de las esferas con la mesa.

Resp. $d = 8\sqrt{6}\ cm$

9. Si la longitud del radio de un cono recto aumenta en un 25% y la longitud de su generatriz disminuye en un 60%, determine en qué porcentaje disminuye el área de la superficie lateral del cono. Resp. 50%

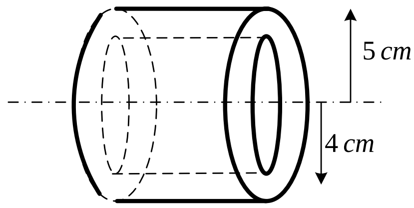
10. En una caja cuya superficie corresponde a la de un paralelepípedo recto rectangular caben exactamente seis latas cilíndricas de radio r. ¿Cuál es la razón entre el volumen de las seis latas juntas y el volumen de la caja?



Resp. $\frac{\pi}{4}$

11. Una empresa necesita enlatar productos para exportación. Los requerimientos son los siguientes: el envase debe ser cilíndrico con una capacidad de $400\,cm^3$ y un diámetro de longitud igual a $15\,cm$. Si se desea colocar una etiqueta adhesiva que recubra la superficie lateral externa, cuánto material deberá utilizar en la elaboración de 1000 latas. Resp. $\frac{320000}{3}cm^2$

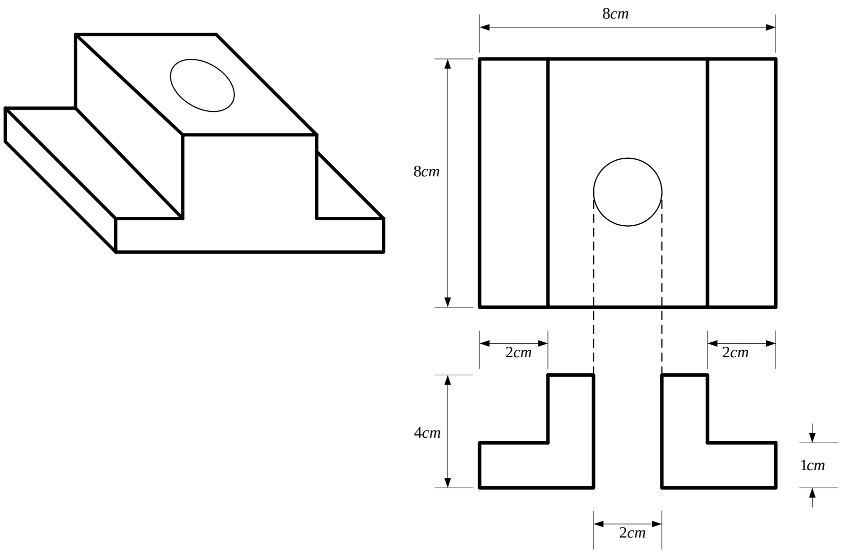
12. Se tiene una orden de trabajo de 1000 cojinetes de bronce, los mismos que tienen la siguiente forma:



Sabiendo que en el proceso de fundición del bronce se tiene una pérdida del 10% del material fundente, ¿qué cantidad de bronce (cm^3) hay que considerar en la fundición para obtener el número de cojinetes que se desean?
Resp. $99000\pi\ cm^3$

13. Una esfera de radio r está inscrita en un prisma recto de base hexagonal, tal que la esfera es tangencial a cada una de las caras laterales y a las bases. Determine la razón entre el volumen de la esfera y el volumen del prisma
Resp. $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

14. Determine el volumen de la pieza de acero que se muestra en la figura:

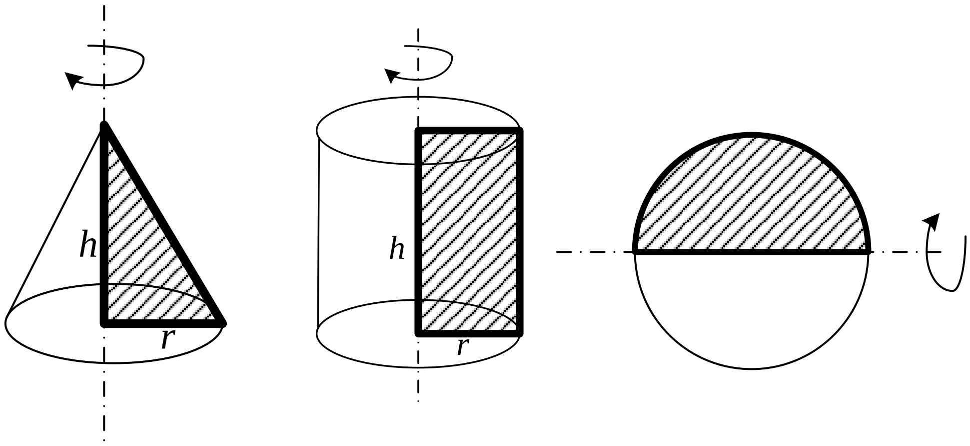


Resp. $V = 4(40-\pi)\,cm^3$

4 SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

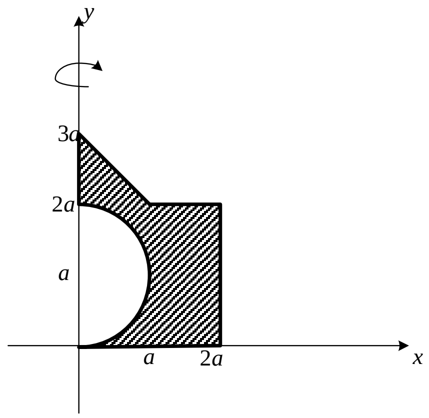
Las figuras planas conocidas, como los triángulos, rectángulos y circunferencias, pueden ser giradas con respecto a un eje y se generan los sólidos de revolución. Estos sólidos serán cuerpos redondos.

Consideraremos sólo ejes verticales u horizontales.



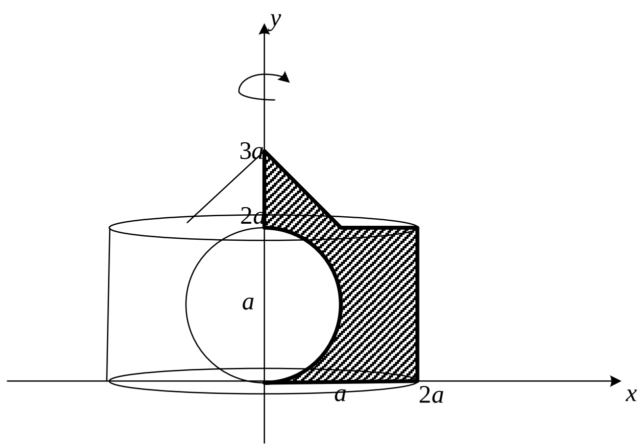
Ejemplo 1.

Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región sombreada alrededor del eje y.



SOLUCIÓN:

Observe que al hacer girar 360° la región sombreada alrededor del eje y, se forma un sólido compuesto de un cono con un cilindro y en su interior hay un vacío de una esfera.



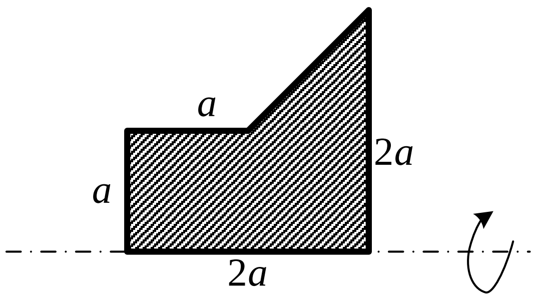
Por tanto: $V = V_{cono} + V_{cilindro} - V_{esfera}$

Entonces

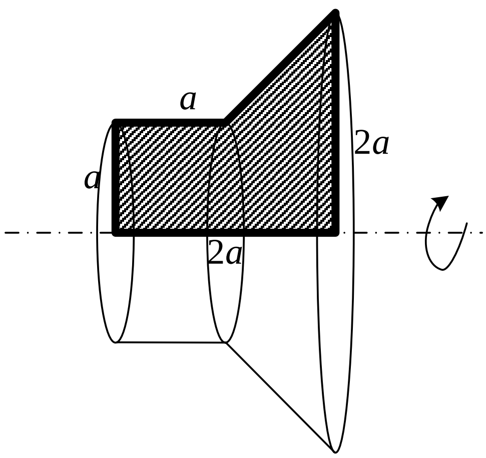
$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 a + \pi(2a)^2(2a) - \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{1}{3}\pi a^3 + 8\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 = 7\pi a^3$$

Ejemplo 2

Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región sombreada alrededor del eje indicado.



SOLUCIÓN:
El sólido generado está compuesto por un cilindro y un tronco de cono.



Por tanto:

$$V = \pi a^2 a + \frac{\pi}{3}\left(a^2 + 2aa + (2a)^2\right)a = \pi a^3 + \frac{7}{3}\pi a^3 = \frac{10}{3}\pi a^3$$

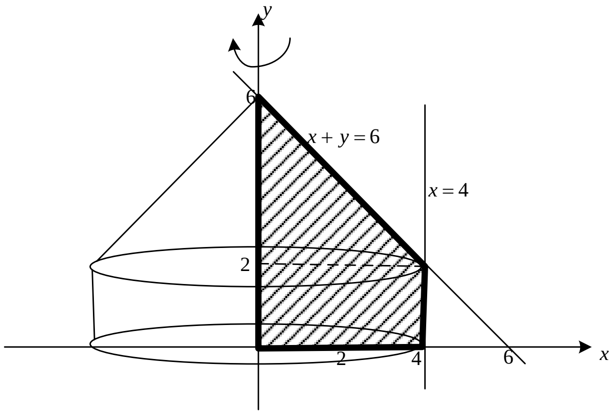
Ejemplo 3

Sea R una región de $\mathbb{R}^2$ definida por $\begin{cases} x \leq 4 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Hallar el volumen del sólido que se genera al girar R alrededor del eje:
a) y b) x

SOLUCIÓN:

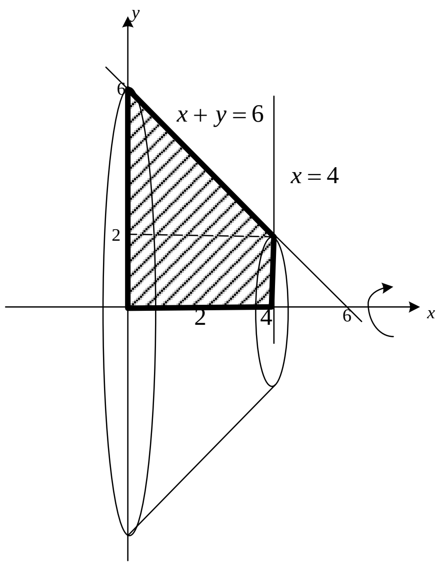
a) alrededor del eje y tenemos:



El sólido generado esta compuesto por un cono y un cilindro, entonces

$$V = V_{cono} + V_{cilindro} = \frac{1}{3}\pi(4)^2 4 + \pi(4)^2 2 = \frac{160}{3}\pi$$

b) Alrededor del eje x tenemos:

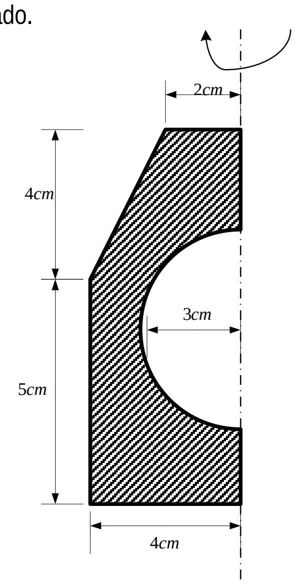


El sólido generado es un tronco de cono, entonces:

$$V = \frac{\pi}{3}\left((2)^2 + (2)(6) + (6)^2\right)(4) = \frac{208}{3}\pi$$

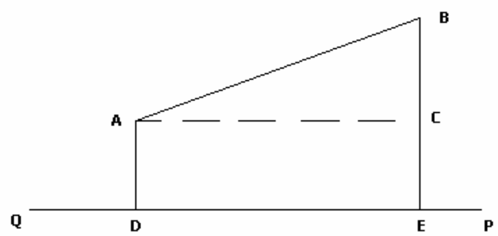
Ejercicios propuestos 4

1. Determine el volumen del sólido que se genera al girar la región sombreada alrededor del eje indicado.



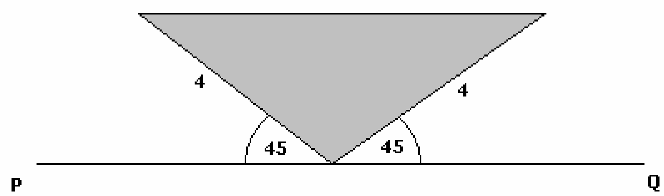
Resp. $V = \frac{244}{3}\pi\ cm^3$

2. En el trapecio de la figura, las longitudes de los segmentos AC y CE son respectivamente 2 m. y 1 m., la medida del ángulo CAB es $\frac{\pi}{4}$. La figura es rotada $360°$ alrededor del eje PQ. Calcular el volumen, y el área lateral del sólido de revolución generado.



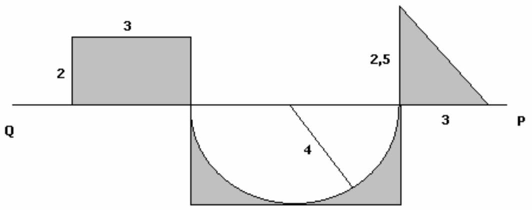
Resp. $\frac{26}{3}\pi\ m^3$.

3. Al rotar una vuelta completa, la parte sombreada del gráfico adjunto alrededor del eje PQ, encuentre el volumen del sólido generado.



Resp. $\frac{64}{3}\sqrt{2}\pi\ u^3$.

4. Al rotar una vuelta completa, la parte sombreada del gráfico adjunto alrededor del eje PQ, encuentre su volumen y su área lateral del sólido generado.



Resp. $\frac{731}{12}\pi\ u^3$ **.**

5. Determine el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por la semicircunferencia definida por la ecuación $x^2+y^2-4x-6y+12=0$, alrededor de la recta $y=3$. Resp. $V=\frac{4}{3}\pi$

6. Sea R la región limitada por $\begin{cases} y\geq 1-x \\ y\leq 2-x \\ y\leq 1 \\ y\geq 0 \end{cases}$

Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar R alrededor del eje $x=2$.

7. Sea R la región definida por $R=\left\{(x,y)\in R^2\ /\ 0\leq y\leq 5-x\wedge 2\leq x\leq 4\right\}$.
Determine el volumen del sólido que se genera al rotar R alrededor de:
a) eje x. b) la recta $x=4$

Resp. a) $V=\frac{26}{3}\pi$ b) $V=\frac{28}{3}\pi$

8. Sea la región $R=\left\{(x,y)\in R^2\ /\ 0\leq x\leq 6,\ y\geq 0,\ x-2y+4\geq 0,\ x+2y-12\leq 0\right\}$.
Determine el volumen del sólido que se genera al rotar R alrededor de la recta $x=6$.

Resp. a) $V=\frac{316}{3}\pi$