ANEXO B

GRAFICOS NO LINEALES

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Diferenciar una función potencial de una exponencial.
- Asignar de forma apropiada la escala logarítmica de los ejes
- Identificar el factor de escala observando las divisiones en los ejes del gráfico
- Obtener experimentalmente la relación matemática, entre dos magnitudes físicas, a partir de los datos proporcionados.

Construcción de una escala logarítmica.

Para construir una escala logarítmica se toman en cuenta los siguientes aspectos:

1. Se selecciona el factor de escala (fe), que es la distancia donde se desea construir un ciclo completo; del 1 al 10; del 100 al 1000; del 1000 al 10000 y así sucesivamente.
2. Se selecciona la función logarítmica para crear la escala logarítmica. X=(fe)log(n)
3. Los valores de n son los valores de la escala logarítmica es decir 1, 2, 3, 4 5, 6, 7, 8, 9 y 10; para el primer ciclo.
4. Los valores de X corresponden a la posición donde deben ubicarse los distintos valores de n.

$x_1 = \log(1)*10\ cm = 0\ cm.$

$x_2 = \log(2)*10\ cm = 3.01\ cm$

$x_3 = \log(3)*10\ cm = 4.77\ cm$

$x_4 = \log(4)*10\ cm = 6.01\ cm$

$x_5 = \log(5)*10\ cm = 6.99\ cm$

$x_6 = \log(6)*10\ cm = 7.78\ cm$

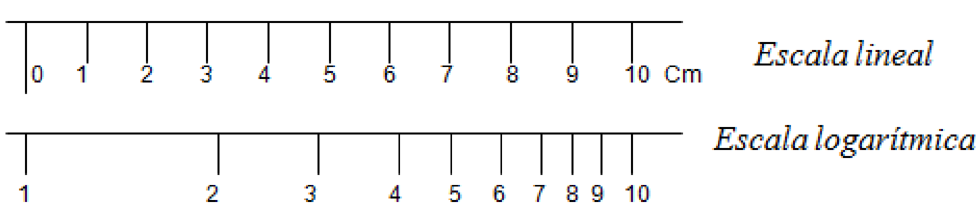
$x_7 = \log(7)*10\ cm = 8.45\ cm$

$x_8 = \log(8)*10\ cm = 9.03\ cm$

$x_9 = \log(9)*10\ cm = 9.54\ cm$

$x_{10} = \log(10)*10cm = 10\ cm$

*El número **1** se ubicará a una distancia 0 cm, el **2** a 3.01 cm, el **3** a 4.77 cm, ...*



Linealización de curvas usando escalas logarítmicas.

El segundo método de transformar una curva en recta, se lo utiliza cuando no se tiene ningún conocimiento ni sospecha sobre el valor del exponente n

Asumimos que la relación es del tipo $y = ax^n$, donde ***a*** y ***n*** son constantes desconocidas cuyo valor se debe determinar experimentalmente. Se puede intentar utilizar el método de cambio de variables graficando y vs x^n, probando diversos valores de n hasta que resulte una línea recta. Esto puede resultar largo y aburrido, porque si usted no está familiarizado con el fenómeno será difícil acertar con el valor apropiado entre el infinito número de posibilidades. Es más directo y elegante usar logaritmos, operando sobre ambos miembros se obtiene: $\log y = n \log x + \log a$

Ahora: Si y es variable, también lo es log y.

Si x es variable, también lo es log x.

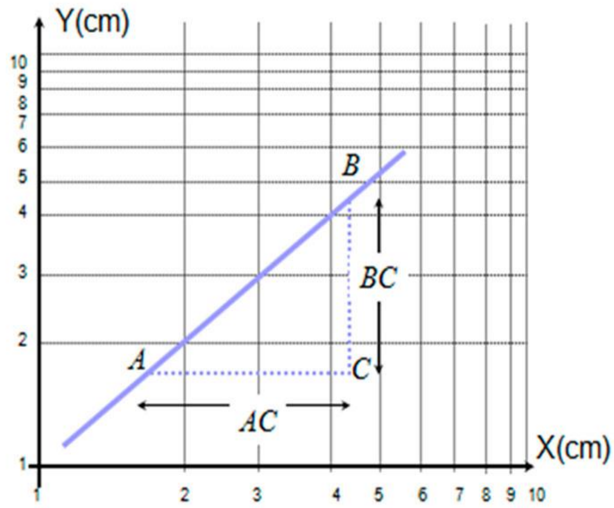
Si a y b son constantes, también lo son log a y n.

Por lo tanto, la anterior ecuación puede escribirse con un cambio de variables: $\log y = w$, $\log x = z$, tal que $w = nz + b$. Que representa la ecuación de una recta. Se podría graficar $\log y$ vs $\log x$ en papel milimetrado y obtener una recta pero su efecto equivalente, es usar y graficar en las escalas logarítmica tanto en el eje Y como para el eje X.

Gráficos log-log

Por lo tanto si los datos experimentales al graficarse en la carta log-log se linealizan, entonces su ecuación empírica es de la forma $y = ax^n$, n es la pendiente que puede obtenerse por el método analítico o por el geométrico.

$$n = \frac{\frac{\overline{BC}}{f1}}{\frac{\overline{AC}}{f2}} = \frac{\log y2 - \log y1}{\log x2 - \log x1}$$; Mientras que **a** se puede obtener por evaluación remplazando en



$$a = \frac{y_3}{(x_3)^n}$$

distancia AC

distancia BC

f_1 factor en y

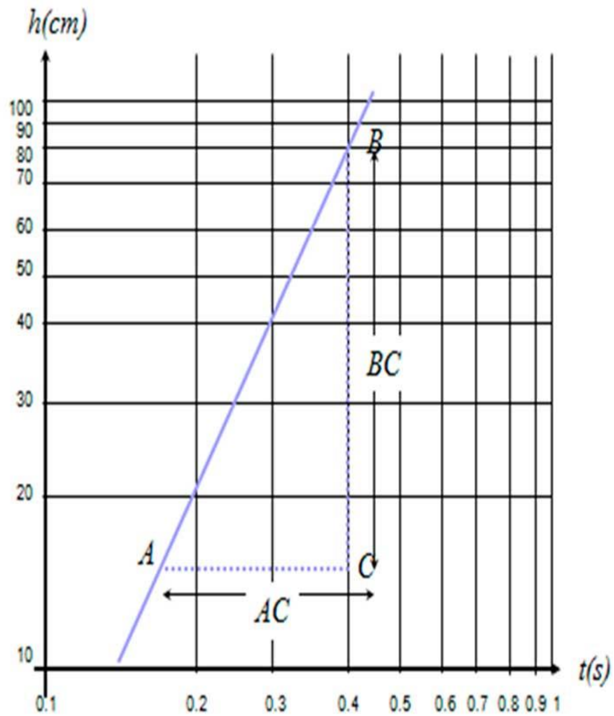
f_2 factor en x

Ejemplo de Aplicación.

En una práctica de caída libre se tomaron los siguientes datos de altura y tiempo de caída.

$h(cm)$	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0
$t(s)$	0.143	0.202	0.247	0.286	0.319	0.350

Se pide: a) Realizar un gráfico logarítmico h vs t, b) Determinar la pendiente y c) Encontrar la ecuación empírica.



$$n = \frac{\frac{\overline{BC}}{f1}}{\frac{\overline{AC}}{f2}} = \frac{\frac{5.6cm}{7.5cm}}{\frac{2.5cm}{6.7cm}} \quad o \quad n = \frac{\log\left(\frac{80cm}{20cm}\right)}{\log\left(\frac{0.4s}{0.2s}\right)}$$

$$n = 2.0$$

$$h = kt^n$$

$$h = kt^2$$

$$k = \frac{h_1}{t_1^2} = \frac{60cm}{(0.35s)^2 s^2} = 4.9x10^2 \frac{cm}{s^2}$$

La ecuación empírica será **h=490 t^2**

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

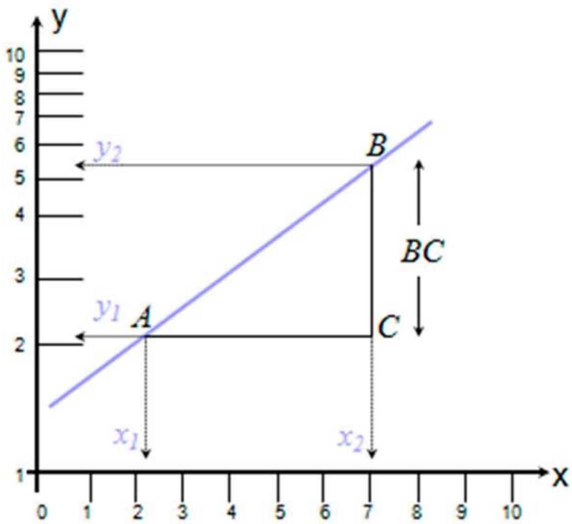
A parte de relaciones del tipo Y = aX^n + b, con a y b como incógnitas, y del tipo Y = aX^n con **a** y **n** como incógnitas, usted puede encontrar en sus estudios funciones exponenciales del tipo $Y=Y_0\times10^{kX}$, si sacamos los logaritmos a los términos de la igualdad tenemos: $\log(Y)=\log(Y_0)+\log(10^{kx})$ por lo tanto se tiene $\log(Y)=\log(Y_0) + kX$
Si se grafica en papel milimetrado log(Y) vs X se obtiene una línea recta donde k es la pendiente del gráfico.
Un resultado equivalente se tiene si se usa solo para el eje Y una escala logarítmica y una escala lineal para la variable X. El valor de la pendiente puede obtenerse por los métodos geométricos o analíticos.

$$k=\frac{\frac{\overline{BC}}{f1}}{x_2-x_1}=\frac{\log y_2-\log y_1}{x_2-x_1}$$

El valor de Y_0 se obtiene interpolando un punto y reemplazando en la siguiente expresión.

$$Y_0=\frac{y_3}{\left(10^{k\,X_3}\right)}$$

Por lo tanto si al graficar en una carta semi-log, los puntos experimentales se linealizan, entonces la ecuación empírica es de forma exponencial de la forma $Y=Y_0\times10^{kx}$



k es la pendiente

$$k=\frac{\frac{\overline{BC}}{f1}}{x_2-x_1}=\frac{\log y_2-\log y_1}{x_2-x_1}$$

x_1 y x_2 se leen en escala lineal

f_1 es el factor de escala en Y

Ejemplo de Aplicación.

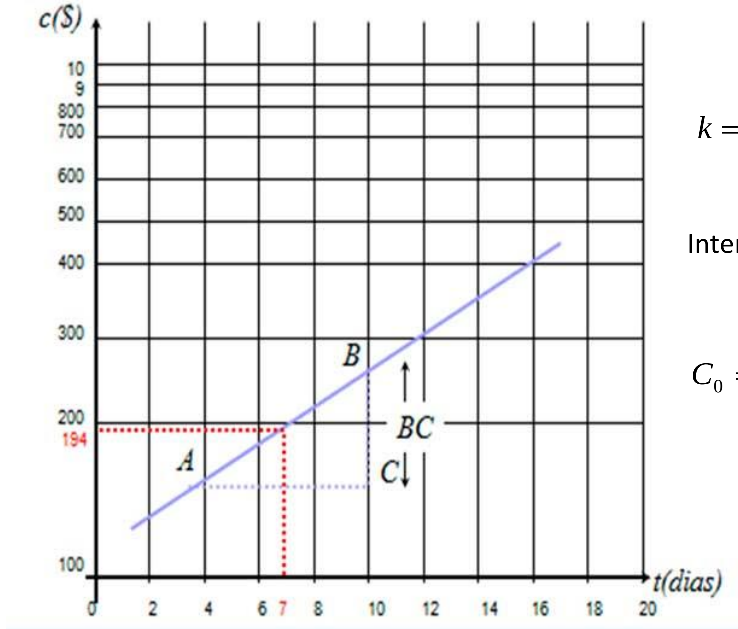
En un análisis de costos de un producto en el tiempo se tomaron los siguientes datos de costos y los tiempos.

c($)	120.7	132.6	160.1	212.4	309.6
t(s)	2.0	3.0	5.0	8.0	12.0

Se pide:

a) Realizar un gráfico utilizando la carta semi-logarítmica
b) Determinar la pendiente
c) Determinar la ecuación empírica.

La ecuación empírica está dada por: $\mathbf{C=100\times10^{0.041\,t}}$



$$k=\frac{\dfrac{\overline{BC}}{f1}}{t_2-t_1}=\frac{\dfrac{5.0cm}{19cm}}{(10.0-3.6)dia}=0.041\frac{1}{dia}$$

Interpolando t=7 dias -> C= 194

$$C_0=\frac{C}{\left(10^{kt}\right)}=\frac{194}{10^{0.041(7)}}=1.0*10^{2}$$

$$c=(1.0*10^{2})10^{0.041t}$$