Método general para la incertidumbre de un resultado en funciones de dos o más variables

Consideremos a Z como un resultado obtenido a partir de las magnitudes (datos) X y Y de tal manera que están relacionadas mediante la ecuación: Z = X + Y, es decir Z = f (X, Y); en este caso otra vez X aportará en la incertidumbre con δX , mientras que Y aportará en la incertidumbre con δY, luego:

$$Z \pm \delta Z = (X \pm \delta X) + (Y \pm \delta Y)$$

Reordenando: $Z \pm \delta Z = X + Y \pm \delta X + \delta Y$

Por lo tanto $\delta Z = \delta X + \delta Y$

Ahora, si se utiliza el cálculo, como las dos variables aportan a la incertidumbre de Z, entonces se podría obtener cada incertidumbre por separado y sumarlos. Si la función es Z = X + Y, usando derivadas parciales (es decir derivando con respecto a cada variable asumiendo a la otra momentáneamente constante) $\frac{\partial Z}{\partial X} = 1$ entonces $\partial Z = \partial X$ o δZ = δX pero eso es solo lo que aporta X porque se mantuvo a Y constante, ahora si derivamos con respecto a Y obtenemos $\partial Z = \partial Y$ o δZ = δY, por lo tanto δZ sería igual a la suma de los aportes de X y Y, es decir δZ = δX +δY, lo que anteriormente se obtuvo.

Generalizando podemos decir que, si **F = f (X, Y, Z)** entonces:

$$F = f(X, Y, Z)$$

$$dF = \pm \left\{ \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \delta z \right\}$$

$$\delta F = \pm \left\{ \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \delta z \right\}$$

Observar que las barras indican el valor absoluto de las derivadas, por lo que las incertidumbres no se pueden eliminar.

Por ejemplo si Z = X – Y, entonces $\frac{\partial Z}{\partial X} = 1$ y $\partial Z = \partial X$, así , $\partial Z = -\partial Y$, por lo tanto se podría pensar que δZ = δX – δY, pero eso disminuiría el margen de la propagación es más si δX = δY, se eliminaría, obteniéndose un δZ = 0, lo cual no es posible si X y Y tienen incertidumbre. Para evitar estos problemas se considera el más amplio margen de posibilidad para Z, y eso es cuando se suman las incertidumbres, para eso se utiliza las barras de valor absoluto. Por lo tanto, si $Z = X - Y$, entonces $\delta Z = \delta X + \delta Y$.

Ejemplo 1:

Un estudiante realizó la medición de un cuadrado obteniendo el valor de (10.8 ± 0.1) cm. Desea encontrar el área del cuadrado con su respectiva incertidumbre. Para este caso tenemos una variable a la que llamaremos "X" y usaremos la siguiente nomenclatura para la medida así:

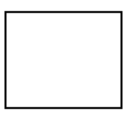
$(X\pm\delta X)$; donde X es el valor medido y δX: es la incertidumbre de la medición

Por lo tanto la medida del AREA se reportará así:

$(A\pm\delta A)$; donde A es el área y δA es la incertidumbre del área

Sabemos que el área de un cuadrado es $A=X^2$

X

X 

Dado X= (10,8±0.1) cm

Área= $X^2 = (10{,}8)^2 = 116{,}64 cm^2$

Si tenemos en cuenta las reglas de multiplicación y división con cifras significativas nuestro resultado necesita tener 3 cifras significativas ya que $(10{,}8)^2$ es como si tuviéramos 10,8x10,8 por lo que debemos tener siempre presente estas reglas, entonces nuestro resultado del Área de nuestro cuadrado es: **117 cm^2**

Existen tres métodos para calcular la incertidumbre.

- Uso de las diferencias finitas, el cual ya ha sido revisado
- Calculo diferencial
- Calculo por logaritmo neperiano

PRIMER MÉTODO (USO DE DIFERENCIAS FINITAS)

Área mínima:

$A_{min}= (X-\boldsymbol{\delta}X)^2$ $A_{min}= (10.8 - 0.1)^2 = (10.7)^2$ $A_{min}= 114.49 \approx 114$ $A_{min}= 114 cm^2$

Área máxima:

$A_{max}= (X+\delta X)^2$ $A_{max}= (10.8+0.1)^2 = (10.9)^2$ $A_{max}= 118.81 \approx 119$ $A_{max}= 119 cm^2$

Una vez obtenido los valores máximos y mínimos del área se procede a la siguiente operación.

Incertidumbre del área (δA)

$\delta A= (A_{max}-A_{min})/2$ $\delta A= (119-114)/2$ $\delta A= 2.5$

La respuesta quedaría:

A±δA= (117 ± 2.5) cm²

SEGUNDO MÉTODO (CÁLCULO DIFERENCIAL)

Calculamos la incertidumbre del área usando las propiedades del cálculo diferencial

$\frac{df}{dx} \approx \frac{\delta f}{\delta x}$ Decimos que es casi igual porque son valores muy pequeños.

$\delta f = \left|\frac{df}{dx}\right| \delta x$ Despejando δf.

$\delta A = \left|\frac{dA}{dx}\right| \delta x$ Remplazando en la fórmula despejada.

$\delta A = \left|\frac{d(x^2)}{dx}\right| \delta x$ Remplazando en A.

$\delta A = 2x\,\delta x$ Derivando x^2 con respecto a x.

$\delta A = 2\,(10.8)(0.1)$ Remplazando los valores de x y δx.

$\delta A = 2.16 \approx 2$ Resolviendo la multiplicación y redondeando a una cifra significativa porque esa será la única cifra que incidirá en la cifra dudosa de la medición.

$\mathbf{A \pm \delta A = (117 \pm 2)\,cm^2}$ Reportando la medición con su respectiva incertidumbre.

TERCER MÉTODO (USO DE LOGARÍTMO NATURAL)

Calculamos la incertidumbre del área usando las propiedades de logaritmo natural y el diferencial total de dicha función.

Luego aplicamos los siguientes pasos para el cálculo de la incertidumbre absoluta de nuestra medición indirecta utilizando el método antes mencionado:

$A = x^2$ Para este ejercicio utilizamos la fórmula para calcular el área de un cuadrado.

$\ln A = \ln x^2$ Aplicamos logaritmo natural (ln) a ambos lados.

$\ln A = 2 \ln x$ Utilizamos las propiedades de logaritmo natural para bajar nuestro exponente.

$\frac{d(\ln A)}{dA} = \frac{d(2\ln x)}{dx}$ Luego derivamos el $(\ln A)$ respecto a A; y $(2 \ln x)$ respecto a x.

$f = \ln x$ Definimos nuestra función. $\frac{df}{dx} = \frac{d|\ln x|}{dx}$ Derivamos nuestra función respecto a x.

$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}$ La derivada de nuestra función es $\frac{1}{x}$.

Como $\frac{df}{dx} \approx \frac{\delta f}{\delta x}$ cuando las diferencias son muy pequeñas (tienden a cero), por lo tanto:

$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{1}{x}$ Donde igualamos la incertidumbre absoluta de la función y la incertidumbre de la medición con el resultado de la derivación de nuestra función.

$\delta f = \frac{\delta x}{x}$ Despejando, nos queda que la incertidumbre absoluta de la función es igual a la incertidumbre de la medición sobre el valor de la medición.

Aplicando a nuestro ejercicio nos queda: $\frac{\delta A}{A} = \frac{2\delta x}{x}$ donde, δA es la incertidumbre absoluta de nuestra medición indirecta, A es el valor del área, δx es la incertidumbre de nuestra medición directa y x es el valor de nuestra medición directa.

Despejando y remplazando datos tenemos que: $\delta A = 2\left(\frac{0{,}1}{10{,}8}\right)117$

Realizando la multiplicación nos queda: $\delta A = 2{,}16$

El resultado de la multiplicación nos dio un número con 3cifras significativas, por lo que no es un resultado válido, ya que en nuestra multiplicación anterior debíamos tener en cuenta las reglas para la multiplicación y división con cifras significativas. Así que redondeamos nuestra cantidad hasta una cifra significativa: $\delta A = 2$

Por lo tanto nuestra respuesta final nos queda: **A±δA= (117±2) cm^2**

Ejemplo 2:

Se utilizó un calibrador Vernier para la medición del diámetro y el espesor de una moneda; con los datos obtenidos encontrar el área de la circunferencia de la moneda y el volumen de la misma. Diámetro: a $\pm$ δa = (26,30 $\pm$ 0,05) mm; espesor: h $\pm$ δh = (1,90 $\pm$ 0,05) mm

$$A = \frac{\pi a^2}{4} = 543.33 \qquad \frac{\delta A}{\delta a} = \frac{2\pi\, a}{4} \qquad \frac{\delta A}{\delta a} = \frac{\pi\, a}{2}$$

$$\delta A = \left|\frac{\pi\, a}{2}\right| \delta a \qquad \delta A = 2.07 \qquad A \pm \delta A = (543.3\ \pm 2.0)[mm]^2$$

$$\text{V=A h} \qquad \text{V=543.3 * 1.90} \qquad \text{V= 1032.27 =1032 =1.03 x}10^3\ [mm]^3$$

$$\delta V = \pm\left[\frac{\pi h(2a)}{4}\delta a + \frac{\pi a^2}{4}\delta h\right] \qquad \delta V = \pm\left[\frac{\pi h a}{2}\delta a + \frac{\pi a^2}{4}\delta h\right]$$

$$\delta V = \pm[3.9246 + 27.16] = 31.08 = 0.03x10^3\ [mm]^3$$

$$V \pm\ \delta V = (1.03\text{x}0.03)\text{x } 10^3\ [mm]^3$$

Ejemplo 3

Un péndulo simple se usa para obtener el valor de la aceleración de la gravedad (g), usando $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ periodo T medido fue (1.24 ± 0.02)s y la longitud es de (0.381 ± 0.002) m ¿Cuál es el valor de este resultado (g) con su incertidumbre absoluta y relativa?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \frac{g}{l} = \frac{4\pi^2}{T^2} \qquad g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \qquad g = \frac{4\pi^2(0.381)}{(1.24)^2} = 9.7823 = 9.78\,m/s^2$$

$$\delta g = \pm\left[\left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\delta l + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\delta T\right] \qquad \frac{\partial g}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{T^2} \qquad \frac{\partial g}{\partial T} = 4\pi^2 l\left|\frac{\partial}{\partial T}\left(T^{-2}\right)\right|$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} = 4\pi^2 l\left(\frac{2}{T^3}\right) = \frac{8\pi^2 l}{T^3}$$

$$\delta g = \pm\left[\frac{4\pi^2}{T^2}\delta l + \frac{8\pi^2 l}{T^3}\delta T\right]$$

$$\delta g = \pm\left[\frac{4\pi^2}{(1.24)^2}(0.002) + \frac{8\pi^2(0.381)}{(1.24)^3}(0.02)\right]$$

$$\delta g = \pm 0.3669 = \pm 0.37$$

$$g = 9.78 \pm 0.37\,m/s^2$$

$$\frac{\delta g}{g}x100 = \pm\frac{0.37}{9.78}x100$$

$$\frac{\delta g}{g}x100 = \pm 3.78\%$$

Ejemplo 4:

Determinar la incertidumbre relativa porcentual del resultado obtenido del volumen de un alambre (cuyo diámetro es d = (3.00±0.01) mm. y su longitud L = (50.0±0.2) cm

$$V = \left(\frac{\pi\, d^2 L}{4}\right) \qquad \delta\mathbf{V} = \pm\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{d}}\delta\,\mathbf{d} + \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{L}}\delta\,\mathbf{L}\right]$$

$$\delta V = \pm\left[\frac{\pi\, L(2d)}{4}\delta\, d + \frac{\pi\, d^2}{4}\delta\, L\right] \qquad \frac{\delta V}{V} = \pm\left[2\frac{\delta\, d}{d} + \frac{\delta\, L}{L}\right]$$

$$\frac{\delta V}{V} = \pm\frac{\left[\frac{\pi\, Ld}{2}\delta\, d + \frac{\pi\, d^2}{4}\delta\, L\right]}{\frac{\pi\, d^2 L}{4}} \qquad \%\frac{\delta V}{V} = \pm\left[2\frac{0.01}{3} + \frac{0.2}{50}\right]*100 \qquad \%\frac{\delta V}{V} = \pm 1.06\%$$