CÁLCULO DE INCERTIDUMBRE EN LAS MEDICIONES

OBJETIVOS

Reportar correctamente resultados, a partir del procesamiento de datos obtenidos a través de mediciones directas.

INTRODUCCION

En el capítulo de medición se analizó lo que es la incertidumbre absoluta y la incertidumbre relativa, de este criterio se puede observar que toda medición caerá dentro de un respectivo intervalo de confianza el cual brindará la certeza de contener el valor real.
Sin embargo este intervalo de confianza en una medición directa es relativamente sencillo de calcular o estimar. Un problema más complejo es ¿cómo proceder? cuando se tiene que reportar o expresar correctamente un resultado, partiendo de varias mediciones directas (datos), resulta que se puede inferir, que si las mediciones directas tienen sus incertidumbres, los resultados obtenidos del procesamiento de datos (mediciones directas) también lo tendrán, como consecuencia de la propagación de las incertidumbres de las mediciones directas.
En este capítulo se analizará el problema de cómo expresar correctamente los resultados partiendo de varias mediciones directas (datos); para esto se considerará el primer caso:

Fundamentos Teóricos

Incertidumbre en resultados obtenidos de una función de una sola variable:

Considere una magnitud X, al realizar varias mediciones de esta misma magnitud, se observa que los valores difieren entre ellos aunque entre ellos exista una mínima diferencia, por lo tanto, el resultado se debe expresar incluyendo un intervalo de confianza, considerando la misma forma de expresar una medición directa ($X \pm \delta X$).

Supongamos que Z es una magnitud que depende de X esto se escribe así $Z = f(X)$; como Z depende de X es fácil ver que si existe una incertidumbre δX, entonces Z tendrá una incertidumbre δZ como consecuencia de la propagación de la incertidumbre de X.

¿Cuánto vale δZ?,
En la figura 1, se puede apreciar que:

$$Zo = f(Xo);\quad Z_I = f(Xo - \delta X)$$

$$Z_f = f(Xo + \delta X), \text{ en donde } \delta Z = (Z_f - Z_I) \text{ (diferencia finita } \delta Z)$$

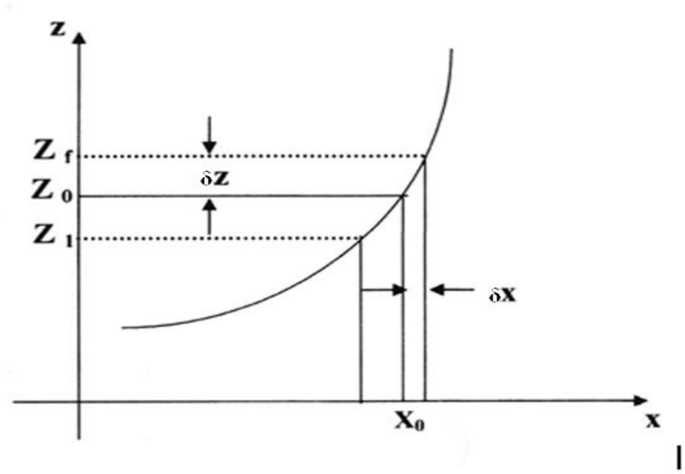


Figura. 1

Por ejemplo si se requiere reportar el área Z de un cuadrado de lado X; entonces: $Z = X^2$,

Pero si X tiene su incertidumbre δX, entonces Z tiene una incertidumbre δZ, por lo tanto;

$$Z = X^2$$

$$Zo \pm \delta Z = (Xo \pm \delta X)^2$$

$$Zo \pm \delta Z = Xo^2 \pm 2Xo\ \delta X + \delta X^2$$

Como las incertidumbres de las mediciones directas son pequeñas en comparación con las magnitudes medidas, entonces sus cuadrados y más altas potencias se pueden despreciar, por lo que δX2 se puede despreciar, obteniéndose:

$Zo \pm \delta Z = Xo^2 \pm 2Xo\ \delta X$;

De aquí: $Zo = Xo$ y $\delta Z = 2Xo\ \delta X$.

Donde δZ es la incertidumbre absoluta de Z.

Ahora, si se quisiera expresar la incertidumbre relativa, (definida en el capítulo anterior como la incertidumbre absoluta con respecto a la magnitud medida):

$\left(\dfrac{\delta Z}{Zo}\right) = \left(\dfrac{2Xo\delta X}{Xo^2}\right)$, lo que nos lleva a $\left(\dfrac{\delta Z}{Zo}\right) = \left(\dfrac{2\delta X}{Xo}\right)$

Incertidumbre en resultados obtenidos de una función de dos o más variables:

A menudo es frecuente observar que los resultados que se desean obtener no dependen solo de una variable sino de dos, tres o más variables medidas, y cada una de ellas aportará con su respectiva incertidumbre en la propagación, así que, δZ será la incertidumbre calculada de la medición indirecta y esta representa el más amplio margen de posibilidad para Z. Si bien esta apreciación es un poco pesimista nos permite obtener cierto grado de certeza en la medición Z.

Método de diferencias finitas para el cálculo de la incertidumbre de un resultado en funciones de dos o más variables

Consideremos a Z como un resultado obtenido a partir de las magnitudes (datos) X y Y de tal manera que están relacionadas mediante la ecuación: $Z = X + Y$, es decir $Z = f(X, Y)$; en este caso otra vez X aportará en la incertidumbre con δX , mientras que Y aportará en la incertidumbre con δY, luego:

$$Z \pm \delta Z = (X \pm \delta X) + (Y \pm \delta Y)$$

Reordenando: $$Z \pm \delta Z = X + Y \pm \delta X + \delta Y$$

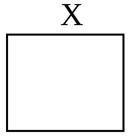
Por lo tanto $$\delta Z = \delta X + \delta Y$$

Ejemplo 1:

Un estudiante realizó la medición de un cuadrado obteniendo el valor de (10.8 ± 0.1) cm. Desea encontrar el área del cuadrado con su respectiva incertidumbre. Para este caso tenemos una variable a la que llamaremos "X" y usaremos la siguiente nomenclatura para la medida así:

$(X \pm \delta X)$; donde X es el valor medido y δX: es la incertidumbre de la medición
Por lo tanto la medida del AREA se reportará así:
$(A \pm \delta A)$; donde A es el área y δA es la incertidumbre del área
Sabemos que el área de un cuadrado es $A=X^2$

X Dado X= (10,8±0.1) cm

X  Área= $X^2 = (10,8)^2 = 116,64 cm^2$

Si tenemos en cuenta las reglas de multiplicación y división con cifras significativas nuestro resultado necesita tener 3 cifras significativas ya que $(10,8)^2$ es como si tuviéramos 10,8x10,8 por lo que debemos tener siempre presente estas reglas, entonces nuestro resultado del Área de nuestro cuadrado es: 117 cm^2

Método de diferencias finitas para el cálculo de la incertidumbre

Se procede a calcular tanto el valor mínimo como el valor máximo del área del cuadrado.
$A_{min} = (X - \delta X)^2$ $A_{min} = (10.8 - 0.1)^2 = (10.7)^2$ $A_{min} = 114.49 \approx 114$ $A_{min} = 114 cm^2$

$A_{max} = (X + \delta X)^2$ $A_{max} = (10.8 + 0.1)^2 = (10.9)^2$ $A_{max} = 118.81 \approx 119$ $A_{max} = 119 cm^2$

Una vez obtenido los valores máximos y mínimos del área se procede a la siguiente operación para calcular la Incertidumbre del área (δA)

$\delta A = (A_{max} - A_{min})/2$ $\delta A = (119-114)/2$ $\delta A = 2.5$

Dado que la cifra dudosa ocupa la posición de la unidad, entonces el valor de la incertidumbre absoluta debe ser redondeada al orden de las unidades, por lo tanto dA = 2

Entonces la forma correcta de reportar el área es: $A \pm \delta A = (117 \pm 2)\ cm^2$

Ejemplo 2

Se utilizó un calibrador Vernier para la medición del diámetro y el espesor de una moneda; con los datos obtenidos encontrar el área de la circunferencia de la moneda y el volumen de la misma. Diámetro: $a \pm \delta a = (26.30 \pm 0.05)$ mm; espesor: $h \pm \delta h = (1.90 \pm 0.05)$ mm

$$A = \frac{\pi a^2}{4} = 543.33 \qquad A_{mín} = \frac{\pi}{4}(26{,}30 - 0.05)^2 \qquad A_{mín} = 541.2$$

$$A_{máx} = \frac{\pi}{4}(26{,}30 + 0.05)^2 \quad A_{máx} = 545.3$$

$$\delta A = \frac{A_{máx} - A_{mín}}{2} \qquad \delta A = \frac{545.3 - 541.2}{2} \qquad \delta A = 2.05$$

Dado que el valor del área debe expresarse con 4 cifras significativas y en vista que la cifra dudosa ocupa la posición de las décimas de mm^2, entonces el valor de dA = 2.0

$$A \pm \delta A = (543.3\ \pm 2.0) mm^2$$

$$V = A\,h \qquad V = 543.3 * 1.90 \qquad V = 1032.27 = 1032 = 1.03\ x10^3\ mm^3$$

$$V_{mín} = (543.3 - 2.0)(1.90 - 0.05) \qquad V_{mín} = 1001.4$$

$$V_{máx} = (543.3 + 2.0)(1.90 + 0.05) \qquad V_{mín} = 1063.3$$

$$\delta V = \frac{V_{máx} - V_{mín}}{2} \qquad \delta V = \frac{1063.3 - 1001.4}{2} \qquad \delta V = 30.95$$

Dado que el valor del volumen debe expresarse con 3 cifras significativas y en vista que la cifra dudosa (3) ocupa la posición de las centésimas de un mil de mm^3 (centésimas de cm^3), entonces el valor de la incertidumbre del volumen debe ser $\delta V = 0.03 x10^3\ mm^3$

$$V \pm\ \delta V = (1.03 \pm 0.03) x\ 10^3\ mm^3$$

Realización de la práctica

Previo a realización de la práctica titulada Propagación de incertidumbre, el estudiante debe, identificar el problema a resolver, repasar los fundamentos teóricos en los que se basará la práctica, resolver las preguntas planteadas al final de la unidad.

Problema a resolver

Reportar correctamente los resultados de las mediciones incluyendo la incertidumbre, tanto de masa, longitud, volumen y densidad, que se realizaron en la práctica de Medición.

Base Teórica

Revisar esta unidad desde la página 1 hasta la 4

Procedimiento

Reportar la densidad del bloque y del anillo con la correspondiente incertidumbre.

Use el método de diferencias finitas para calcular la incertidumbre absoluta del volumen y la densidad, tanto del bloque como del anillo. Tenga en cuenta que todos los datos tomados deben tener claras las unidades correspondientes.
Finalmente presente en la hoja de trabajo el reporte de datos y resultados

Preguntas para la Prueba de Entrada

1. Determinar la incertidumbre relativa porcentual del resultado obtenido del volumen de un alambre de forma cilíndrica cuyo diámetro es d = (3.00±0.01) mm y su longitud L = (50.0±0.2) cm. Dar el resultado en mm^3

2. Los lados de un cubo regular de acero fueron medidos, obteniéndose los siguientes resultados: (50.25 ± 0.05) mm, (50.20 ± 0.05) mm y (60.75 ± 0.05) mm; a partir de estos datos reporte el resultado del volumen del cuerpo con su respectiva incertidumbre.

3. Se utiliza un termómetro graduado en 0.2ºC para medir la temperatura del aire exterior. La temperatura de ayer fue de (22.4$\pm$ 0.2) °C, y la de hoy es de (24.8$\pm$ 0.2) °C. ¿Cuál es la incertidumbre relativa en la diferencia de temperaturas entre ayer y hoy?

4. En una práctica de caída libre se han tomado los siguientes datos:
   $h = (40.0 \pm 0.5)$ cm $\quad t = (0.286 \pm 0.002)$s.
   Determine la gravedad y su incertidumbre correspondiente.

5. Un estudiante hace las siguientes mediciones de magnitudes, en un mismo experimento:
   x = (5 ± 1) cm, y = (18 ± 2) cm, z = (12 ± 1) cm,

   t = (3.0 ± 0.5) s, m = (18 ± 1) g M= (2.23 + 0.05) kg

Usando las reglas de propagación de incertidumbres, determine las siguientes cantidades con sus incertidumbres (absoluta y relativa):

a) x + y + z b) x + y – z c) z/t d) m/(xyz) e) M –m f) M/m

6. Se miden los lados de una placa rectangular con la intención de determinar su área, obteniéndose los siguientes valores: $a \pm \delta a = (12.40 \pm 0.20)$ cm; $b \pm \delta b = (9.00 \pm 0.20)$ cm. Entonces el área será:

A. $(111.6 \pm 4.28)\ cm^2$
B. $(111.6 \pm 4.3)\ cm^2$
C. $(112 \pm 4)\ cm^2$
D. $(1.12 \pm .04)\ m^2$

7. Se mide el radio de una plaza de toros (R = 20 m) con una cinta métrica graduada en decímetros. ¿Qué error absoluto se comete al calcular su superficie?

A. ±10
B. ±13
C. ±15
D. ±20

8. Un estudiante está calculando la energía cinética de un carro de juguete y obtiene estas lecturas: m = (0.20 ± 0.01)kg v= (5.0 ± 0.5) m/s
El porcentaje de error para cada cantidad es

	Error de masa	Error de velocidad	Error de energía cinética
A	4%	5%	9%
B	5%	10%	15%
C	4%	10%	10%
D	5%	10%	25%

9. Una piedra se deja caer en un pozo chocando con el agua 2.0 s después de soltarla. Utilizando la ecuación $d = \frac{1}{2}gt^2$ y tomando g = 9.81 m/s^2, se calcula un valor de 19.6 m para la profundidad del pozo. Si se mide el tiempo con una precisión de ± 0.1 s, entonces la mejor estimación del error absoluto en d es:

A. ± 0.1 m B. ± 0.2 m C. ± 1.0 m D. ± 2.0 m

10. Una piedra se deja caer desde un acantilado observándose que choca con la tierra abajo al cabo de (3.0 ± 0.1) s. Utilizando la ecuación $h = 5\ t^2$, donde h es la altura en metros y t el tiempo en segundos; se calcula que la altura del acantilado es (45.0 ± X) m, entonces el valor de X es:

A. 4.0 B. 3.0 C. 8.0 D. 1.0