DEMOSTRACIÓN DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ONDA

Ecuación unidimensional de la Onda

Consideraremos ahora las vibraciones transversales de una cuerda extendida entre dos puntos, $x = 0$ y $x = L$. El movimiento se produce en el plano xy de manera tal que cada punto de la cuerda se mueve en dirección perpendicular al eje x. Si $u(x,t)$ denota el desplazamiento de la cuerda para $t > 0$ medidos desde el eje x, entonces u satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (x,t)}{\partial x^2}$$

Donde se asume que:

- La cuerda es perfectamente flexible
- La cuerda es homogénea, esto es, su masa por unidad de longitud es constante
- Los desplazamientos u son pequeños comparados con la longitud de la cuerda.
- La tensión de la cuerda es constante
- La tensión es grande en comparación con la fuerza de la gravedad
- No actúan otras fuerzas sobre la cuerda

Por lo tanto, un problema típico con condiciones iniciales y de frontera referente a esta ecuación es:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (x,t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0$$

Donde L es la longitud de la cuerda, y a^2 es una constante (dependiente de la densidad lineal y la tensión de la cuerda) que siempre es positiva.

En este problema se define las condiciones de frontera o contorno:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

Estas condiciones de frontera indican que los extremos de la cuerda permanecen fijos en todo tiempo.

A diferencia de la Ecuación del calor, ahora se tiene dos condiciones iniciales:

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x); \qquad 0 \leq x \leq L$$

Donde f y g indican la forma inicial y velocidad inicial de cada punto de la cuerda, es decir en el instante $t = 0$.

En resumen, si en un examen toman la ecuación de la ONDA deberían hablar de alguna cuerda con sus respectivas condiciones iniciales y de frontera, además debería indicar el valor de la constante a^2, y la longitud de dicha cuerda.

Método de Separación de Variables para resolver la ecuación de la Onda

De manera general la ecuación en derivadas parciales que representa un problema de la ecuación de la Onda típico es la siguiente, con sus respectivas condiciones.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (x,t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x); \qquad 0 \leq x \leq L$$

Antes que nada se asume que la solución $u(x,t)$, se puede expresar como una multiplicación de dos funciones, una que depende de la variable "x" y otra que depende de la variable "t".

Es decir:

$$u(x,t) = \varphi(x)h(t)$$

Obteniendo las respectivas derivadas parciales de la ecuación de la Onda usando la solución que se asume, se obtiene que:

i) $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \varphi(x)h''(t)$

ii) $\dfrac{\partial^2 (x,t)}{\partial x^2} = \varphi''(x)h(t)$

Reemplazando i) y ii) en la ecuación de la onda se obtiene:

$$\varphi(x)h''(t) = a^2\varphi''(x)h(t)$$

Expresando la ecuación de otra manera se tiene:

$$\frac{h''(t)}{a^2 h(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda^2$$

Se obtienen dos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias:

Primera ecuación diferencial

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda^2$$

Donde la ecuación queda expresada de la siguiente manera:

$$\varphi''(x) = -\lambda^2\varphi(x)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden de coeficientes constantes homogénea:

$$\varphi''^{(x)} + \lambda^2\varphi(x) = 0$$

Donde la solución se la asume de la siguiente manera:

$$\varphi(x) = e^{rx}$$

Por lo tanto la ecuación característica queda expresada de la siguiente manera:

$$r^2 + \lambda^2 = 0$$

$$r = \pm\lambda i$$

Por lo tanto la solución queda expresada de la siguiente manera:

$$\varphi(x) = C_1 cos(\lambda x) + C_2 sen(\lambda x)$$

Recordar que los valores de frontera realmente indican lo siguiente:

$$u(0,t) = 0, \qquad signifca\ \ que \quad \varphi(0) = 0$$

$$u(L,t) = 0, \qquad signifca\ \ que \quad \varphi(L) = 0$$

Entonces con la primera condición

$$\varphi(0) = 0$$

Se obtiene:

$$0 = C_1$$

Por lo tanto la solución queda expresada de la siguiente manera:

$$\varphi(x) = C_2 sen(\lambda x)$$

Reemplazando la otra condición:

$$\varphi(L) = 0$$

$$0 = C_2 sen(\lambda L)$$

En este caso C_2 tiene que ser distinto de cero, para evitar la solución trivial o $u(x,t) = 0$.

Por lo tanto si puede suceder que:

$$sen(\lambda L) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda L = n\pi, \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}$$

Al final la solución queda:

$$\varphi(x) = C_2 sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Donde se recuerda que $n = 1,2,3,4 \ldots\ldots$, por lo tanto se cambia la constante C_2 por C_n para indicar las diferentes soluciones que se tienen dependiendo del valor de n:

$$\varphi(x) = C_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Segunda Ecuación diferencial

$$\frac{h''(t)}{a^2 h(t)} = -\lambda^2$$

Donde la ecuación queda expresada de la siguiente manera:

$$h''(t) = -a^2\lambda^2 h(t)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden de coeficientes constantes homogénea:

$$h''(t) + a^2\lambda^2 h(t) = 0$$

Donde la solución se la asume de la siguiente manera:

$$h(t) = e^{rt}$$

Por lo tanto la ecuación característica queda expresada de la siguiente manera:

$$r^2 + a^2\lambda^2 = 0$$

$$r = \pm a\lambda i$$

Por lo tanto la solución queda expresada de la siguiente manera:

$$h(t) = acos(a\lambda t) + bsen(a\lambda t)$$

$$h(t) = a_n cos(a\lambda t) + b_n sen(a\lambda t)$$

$$h(t) = a_n cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n sen\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)$$

Multiplicando $\varphi(x)\ y\ h(t)$:

$$u(x,t) = \varphi(x)h(t)$$

$$u(x,t) = \varphi(x)h(t)$$

$$u(x,t) = \left[C_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]\left[a_n cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n sen\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)\right]$$

$$u(x,t) = \left[A_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) sen\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)\right]$$

Se tiene que tomar en cuenta que esta solución hay que expresarla en series:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) sen\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)$$

Expresando la solución de esta manera como una sola sumatoria:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n sen\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)\right) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Usando las condiciones iniciales:

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x);$$

Entonces con la primera condición

$$u(x,0) = f(x)$$

Se obtiene:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Donde se puede decir que:

$$A_n = \int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Usando la segunda condición:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

Se tiene que derivar parcialmente la solución $u(x,t)$ con respecto a t:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n sen\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)\right) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n a\frac{n\pi}{L} sen\left(a\frac{n\pi}{L}t\right) + a\frac{n\pi}{L}B_n cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)\right) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Luego se utiliza la condición:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a\frac{n\pi}{L}\right)B_n\, sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x)$$

Donde se determina ahora la constante $\left(a\frac{n\pi}{L}\right)B_n$:

$$\left(a\frac{n\pi}{L}\right)B_n = \int_0^L g(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$B_n = \frac{L}{an\pi}\int_0^L g(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Por lo tanto la solución de manera general de la ecuación de la onda es:

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n sen\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)\right) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

Donde:

$$\boldsymbol{A_n = \int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{B_n = \frac{L}{an\pi}\int_0^L g(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}$$

Esta es una solución detallada de la ecuación unidimensional de la Onda, para efectos de aprendizaje. Para el desarrollo de algún problema podríamos utilizar la solución de manera general, encontrar las constantes An, y Bn y luego reemplazarlas en la solución.