

1001000101001010010101011000111010 ISSN Nº 1390 - 3802

1010011001000101010100010100100010101001010110100101

001

101

010

010

010

001

101

010

010

100

110

011

100

010

010

100

101

110

010

001

101

111

010

010

111

101

100

001

001

010

010

010

001

010

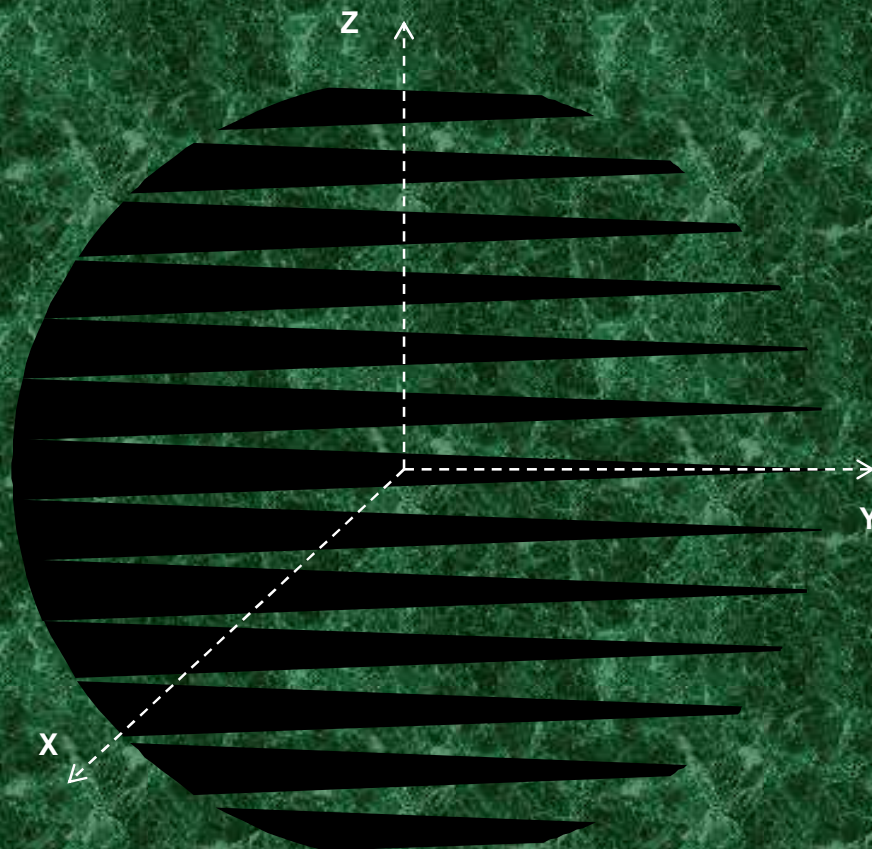
0010101011001000101001010010101011000111010100010100

1010011001000101010100010100100010101001010110100101

matemática

UNA PUBLICACIÓN DE FCNM - ESPOL

Volumen 13 Número 1 Abril 2015



Escuela Superior Politécnica del Litoral - ESPOL
Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas - FCNM

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

El Departamento de Matemáticas (DM) es una unidad académica de la ESPOL. Desde el inicio la función del DM ha sido la docencia en Matemáticas, Ciencias Gráficas e Informática, para la formación de profesionales en ingeniería, tecnología y ciencias, habiendo tenido a su cargo en los albores de la ESPOL, el dictado de 10 materias. Con el transcurso del tiempo y acorde con la era de la información, el Departamento de Matemáticas creó en mayo de 1995 la carrera de “Ingeniería en Estadística Informática”, como alternativa en ingeniería en información y servicios. Posteriormente, con el fin de garantizar la eficiencia en el control y gestión empresarial con profesionales capacitados y de excelencia se creó la carrera de “Auditoría y Control de Gestión” en mayo de 2000. También el Departamento ha incursionado en una de las más importantes ramas de la matemática aplicada que tiene grandes aplicaciones en el mundo moderno, esto es la Investigación de Operaciones, la Teoría de Optimización, y particularmente las aplicaciones logísticas, a través del ofrecimiento de programas de pre-grado y post-grado en estas áreas. Así es como desde el año 2005 se viene ofreciendo la maestría en Control de Operaciones y Gestión Logística y desde el año 2006 la carrera de Ingeniería en Logística y Transporte.

El DM también cuenta con el CENTRO DE INVESTIGACIONES ESTADÍSTICAS, a través del cual, se realizan: estudios de predicción, estudios actuariales, estudios de mercado, diseños de experimentos, planificación y dirección de censos, análisis financieros, bases de datos estadísticos, formulación de proyectos, ingeniería de la calidad, etc.

Entre otras actividades que desarrolla el DM anualmente están: las JORNADAS EN ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA que actualmente está en su decimoctava versión, el CONCURSO INTERCOLEGIAL DE MATEMÁTICAS que se viene realizando en forma continua desde 1988.



Más información: www.icm.espol.edu.ec o escribimos al e-mail: icm@espol.edu.ec, ovalle@espol.edu.ec, erivaden@espol.edu.ec, 30 ½ vía Perimetral: Edificios 25 – B Planta alta
Telfs.: (593-4) 2269525 – 2269526, fax: (593-4) 853138.
Guayaquil – Ecuador

matemática

UNA PUBLICACIÓN DE LA FCNM – ESPOL

Volumen 13

Número 1

Abril 2015

Rector ESPOL:

M.Sc. Sergio Flores

Vicerrectora General ESPOL:

Ph.D. Cecilia Paredes

Decano FCNM:

M.Sc. Oswaldo Valle Sánchez

Subdecano FCNM:

M.Sc. Jorge Medina

Director Departamento de

Matemáticas:

Ph.D. Francisco Vera

Director Departamento de Física:

Ph.D. Peter Iza

Directora Departamento de

Química:

Ph.D. Paola Almeida

Editor de publicaciones:

M.Sc. Eduardo Rivadeneira Molina

Comité Editorial:

M.Sc. Efrén Jaramillo Carrión

Ph.D. David Matamoros

M.Sc. Luis Rodríguez Ojeda

Ph.D. Francisco Vera

Asesores Editoriales:

Ph.D. Joseph Páez Chávez

Ph.D. Sandra García Bustos

Ph.D. Olga González Sánchez

Ph.D. Justo Huayamave Navarrete

Ph.D. (c) Eva María Mera Intriago

Mg. María Nela Pastuizaca

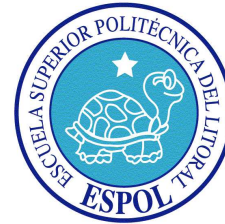
Ph.D. Fernando Sandoya Sánchez

Ph.D. Francisco Torres Andrade

Ph.D. (c) Antonio Chong Escobar

Edición:

Luisa Cabeza de Vaca Vélez



matemática es una publicación del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Escuela Superior Politécnica del Litoral, y pretende constituirse en un órgano de difusión científico – tecnológico, con el fin de incentivar y motivar el desarrollo y avance de la matemática y sus aplicaciones.

matemática publica artículos teóricos y de tipo experimental tales como ensayos, resúmenes de tesis de grado y trabajos de investigación relacionados con la aplicación de la matemática en los diferentes ámbitos de la realidad.

CONTENIDO

EDITORIAL.....	5
SERGEI SOBOLEV, CÁLCULO DEL SIGLO XX Y LAS DERIVADAS DE FUNCIONES GENERALIZADAS	
Bustamante Johni, Ángel Acosta.....	6
EN BÚSQUEDA DE DINÁMICAS DE APLICACIONES EN EL PLANO “ITERACIONES DE FUNCIONES REALES CUADRÁTICAS EN EL PLANO”	
Córdova Nelson.....	11
LA ADMINISTRACIÓN DE CILINDROS DE ALTA PRESIÓN Y SU IMPACTO EN LA ATENCIÓN A LOS USUARIOS DE GASES DEL AIRE COMPRIMIDO	
Fernández Jorge.....	20
LA TRAZABILIDAD DE LOS GASES PARA USO MEDICINAL Y SU EFECTO EN LA EFICIENCIA DE LA ROTACIÓN DE CILINDROS	
Fernández Jorge.....	29
CORRELACIÓN POLICÓRICA EN EL ANÁLISIS DE FACTORES CON VARIABLES ORDINALES	
Ramos Miriam, Plata Wendy.....	37

EDITORIAL

En la ESPOL se presentó formalmente la necesidad de que los profesores de planta sean Doctores en Ciencias durante la administración anterior. Lamentablemente este es un proceso que se comenzó con lentitud y que hoy se desea acelerar, debido a la determinación de los directivos de la ESPOL de ser parte de la vanguardia de la Investigación Científica de nuestro país.

La ESPOL del siglo XXI debe ser un terreno propicio para los Científicos e Investigadores que deseen colaborar con nuestra alma mater.

A pesar de las dificultades que implica este objetivo, el optimismo es grande.

No solo es un cambio generacional, sino también un cambio de paradigma. Los que hacemos Revista *Matemática*, alentamos a todos aquellos comprometidos con este objetivo y agradecemos su cooperación con nuestro pequeño esfuerzo.

SERGEI SOBOLEV, CÁLCULO DEL SIGLO XX Y LAS DERIVADAS DE FUNCIONES GENERALIZADAS.

Bustamante Romero Johni¹, Acosta Acosta Ángel².

Resumen. El artículo trata sobre la escuela matemática rusa y aspectos importantes en la vida de S. L. Sobolev y su aporte a la «Teoría de Ecuaciones de la Física - Matemática», además la definición de funciones generalizadas y algunos ejemplos.

Palabras Claves: Sobolev, funcionales, funciones generalizadas, Espacio Dual, Espacio de Sobolev, soporte, Espacio de Banach, Schwartz, Distribuciones, funciones generalizadas.

Abstract: In this article an introductory historical review of the activity and scientific production of Sergei Sobolev, on the calculation of the 20th century known as the Theory of Distribution. The most important part of this theory is based on the definition of generalized functions and the derivative of generalized functions.

Keyword: Sobolev, functional, generalized functions, Dual Space, Sobolev, support, stand, Banach space, Schwartz, Distributions, generalized functions.

Recibido: Marzo 2015.

Aceptado: Marzo 2015.

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo se describe una reseña histórica introductoria de la actividad y producción científica del Sergei Sobolev, sobre el cálculo del siglo 20 conocido como Teoría de las Distribuciones, presentado por L. Schwartz. La parte más importante de esta teoría está basada en la definición de las funciones generalizadas y la derivada las mismas.

2. LA ESCUELA RUSA

El principio de crear una escuela se encuentra tácito en las sociedades que tienen la capacidad de generar ciencia y transmitirla «Maestro – discípulo» «Profesor- estudiante» en este artículo presentaré la cadena de transmisión de grandes maestros a discípulos que luego fueron grandes maestros y así la gran escuela rusa.

De la conferencia de «Matemáticos de la academia de ciencias Rusa» en el «4to festival de ciencia anual de Moscú – 2011» tenemos la siguiente historia:

Pedro Primero¹ en 1724 emite el decreto de creación de la Academia de Ciencias, por consejo de su amigo y muy conocido matemático y filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz². Estos dos personajes tuvieron varios encuentros en los cuales discutieron este proyecto, casi todo el decreto contenía los sabios consejos de Leibniz. La sede de la academia fue la joven ciudad de San Petersburgo y como es de suponerse en Rusia no existían científicos de renombre para la academia, por tanto tuvieron que contratar científicos del extranjero, entre los invitados a

trabajar en la recién creada academia fueron los hermanos Nocolai y Daniel Bernouille³. La contratación de los hermanos Bernouille tiene la siguiente interpretación:

Uno de los discípulos más queridos por Leibniz fue Jakob Bernouille, el mismo que ocupaba una posición de influencia en la universidad de Basilea⁴ en Suiza.

Nicolai Bernouille murió luego de un año de haber llegado a Rusia. Daniel (hermano menor) ocupó el puesto de su hermano fallecido. Uno de los más grandes aciertos administrativos fue el haber influido en la contratación del joven Leonard Euler. Euler llegó a San Petersburgo en 1729⁵ La mayor parte de su producción científica la realizó en Rusia. Un periodo de 14 años trabajó en Berlín y por petición de la Emperatriz Ekaterine Alekséyevna (Catalina II la Grande) volvió a Rusia hasta el final de sus días⁶, por eso Leonard Euler es considerado el fundador de la Escuela Rusa y en el siglo XVIII, San Petersburgo se convirtió en la capital mundial de la Matemática (1830).

Luego de fundada la PAH (Rosiskaya Akademiya Nauki / Academia de Ciencia Rusa), de ella se forman directamente e indirectamente grandes mentes del mundo científico, tales como:

Pafnuti Lvovivh Chebyshev 1821 - 1894.⁷

Alexander Mijailovich Liapunov 1857 - 1918.

Vladimir Andreyevich Steklov 1863 -1926.

¹Moscú, 09.06.1672; San Petersburgo, 08.02.1725. El emperador Pedro I Alexeievich, conocido como Pedro el Grande, fue el fundador de la ciudad de San Petersburgo el 16 de Mayo 1703, y fue la capital de Rusia desde 1712 a 1918.

²Alemania, Leipzig, 1.06.1646; Hannover, 14.11.1716

³Nacidos en Suiza

⁴Universitat Basel

⁵Edad de 19 años. 1729 año que falleció el gran Isaac Newton

⁶San Petersburgo 1830, Su tumba se encuentra en esta ciudad

⁷Entre sus estudiantes estuvieron Dmitry Grave, Aleksandr Korkin, Aleksandr Liapunov y Andréi Márkov

¹Bustamante Johni Profesor Departamento de Matemáticas, FCNM, ESPOL (e-mail: jobustam@espol.edu.ec) Guayaquil.

²Acosta Ángel Profesor de la Universidad Politécnica Salesiana, Facultad Ciencias Matemáticas y Físicas (e-mail: aacosta@ups.edu.ec), Guayaquil.

Andréi Andreyevich Márkov 1856 -1922.⁸

A. N. Krilov 1863 - 1945.⁹

N: M: Günter¹⁰

V. I. Smirnov 1887 - 1974¹¹

G.M. Fikstengoltd

Sergei Lvovich Sobolev¹²

Vera Nikolaevna Maslennikova¹³

Mijail Evguenievich Bogovski¹⁴

Vale la pena subrayar que S. L. Sobolev tuvo como profesores y tutores varias mentes privilegiadas tales como:

Hunter, Smirnov, Fikstengoltd, Dilone.

En la escuela rusa de matemáticos, existió grandes mentes en la ciudad de Moscú (segundo polo en desarrollarse en Rusia siglo XVIII), su creación fue influenciada por la academia de ciencias Rusa ubicada en San Petersburgo y de la famosa escuela francesa, tales personajes como:

Bashman, Rhukovskii, Chaplugin, Ostrogradskii. La influencia francesa de aquel tiempo (siglo XVIII- XIX) fueron los grandes personajes como: Laplace, Poisson, Fourier, Cauchy.

3. FUNCIONES GENERALIZADAS DE SOBOLEV

En 1932, S. L. Sobolev trabajo en el Instituto de Matemáticas V. A. Stiklov en Leningrado y en 1934 en Moscú, en este periodo el propuso un nuevo método de solución del problema de Cauchy de la ecuación hiperbólica con coeficientes variables, este trabajo con la ecuación hiperbólica lo llevo a S. L. Sobolev a cambiar el punto de vista clásico de solución de esta ecuación diferencial y así Sobolev propone la solución del problema de Cauchy en un espacio funcional, esta idea fue el inicio del tratamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales como funcionales (funciones generalizadas). Esto ocurrió en 1935, y por eso se considera a este año como el año del nacimiento de la «Teoría de las funciones generalizadas»

Sobolev definió las derivadas generalizadas, las cuales se calculan con la integración en un determinado exponente, relación que define un espacio funcional, los cuales toman el nombre de «Espacios de Sobolev W_p^l »

Estos principios los exponemos a continuación:

Definición 1. (Definición de un funcional).- Llamaremos Funcional a la aplicación $L: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ Donde \mathcal{F} es un espacio de Banach (espacio vectorial normado).

En este punto es claro tener en cuenta que: Si un funcional es lineal y continuo entonces existe una función f , se expresa como producto interno.

También debemos tener claro que una función generalizada es un funcional lineal y continuo. Y en adelante denotaremos a las funciones generalizadas por el nombre de la función en su representación como producto interno, es decir Si $L(\varphi) = (f, \varphi)$; la denotamos $f = L(\varphi)$, Debemos tener en cuidado, a veces podemos confundir la función clásica con el funcional.

Definición 2. (Definición de derivada generalizada -derivada de un funcional).-

Sea f y g funciones localmente integrables (según Lebesgue $L_1(G)$) definidas en un subconjunto abierto $G \subset \mathbb{R}^n$, y α un multi-índice, la función g se llama derivada generalizada de orden α de la función f en el sentido de Sobolev y la denotamos $D^\alpha f$, si para cualquier función $\varphi \in \mathcal{D}$ se verifica:

$$(D^\alpha f, \varphi) = |(-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi)| \quad (1)$$

Donde el conjunto \mathcal{D} es el conjunto de todas las funciones de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ esto significa que es continua y derivable infinitas veces, además tiene soporte compacto en \mathbb{R}^n , es decir $supp \varphi = \{x / \varphi(x) \neq 0\}$, además en estas funciones se define la convergencia de la siguiente forma: $\forall \{\varphi(x)\} \in \mathcal{D}$ converge a la función $\varphi \in \mathcal{D}$ solo si existe un radio r tal que la bola B_r contiene a $supp \varphi_k$, es decir $\exists r > 0, supp \varphi_k \subset B_r$ lo antes dicho se resumen en decir que el soporte es acotado lo cual nos garantiza que la convergencia sea uniforme

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \quad (2)$$

En la notación usamos: multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \dots + \alpha_n, \forall \alpha_i \geq 0$

El conjunto de las funciones generalizadas definido en \mathcal{D} lo denotamos \mathcal{D}'

Existen otras funciones generalizadas tales como las funciones generalizadas de crecimiento lento y se usan para generalizar la transformada de Fourier.

Lorenz Schwarz y la Teoría de Distribuciones

Lorenz Schwarz nació en Paris el 5 de marzo de 1915, de una familia de cirujanos, entre sus familiares tenemos a Adamar que fue el hermano de su abuela, en 1938 L. Schwarz se casó con Mari-Elen Levi hija del famoso matemático P. Levi, En sus años escolares coincidió con E. Borel, E. Cartan, M. Freshe, P. Montiel, y en un colega vecino dictaba lecciones el famoso A. Lebesgue, y dictaba seminarios J. Adamar, a estas clases asistía L.

⁸N: M: Günter fue estudiante de Márkov

⁹Krylov publicó la primera traducción al ruso de Isaac

Newton, *Philosophiæ Naturalis*

Principia Mathematica

¹⁰Hunter fue el dirigente del diploma de S. L. Sobolev

¹¹Vladimir Steklov fue su tutor en el grado de Ph.D

¹²San Petersburgo, 23.07.1908; Moscú 03.01.1989

¹³Moscú 29.04.1926, Fue estudiante de S. L. Sobolev, y fue miembro principal de la Academia de ciencias URSS

¹⁴Fue estudiante de V. N. Maslennikova

Schwarz. Luego de terminar la escuela, Schwarz decidió ir al servicio militar, y aquellos tiempos fueron muy difíciles por la segunda guerra mundial, esto retraso su formación pero luego continuó sus estudios y su producción científica. En 1950, L. Schwarz recibió la medalla Fields por la «Teoría de distribuciones» la cual es la misma teoría de las funciones generalizadas específicamente en la generalización de la transformada de Fourier o funciones generalizadas de lento crecimiento. L. Schwarz en 1950 fue parte del grupo de Burbaki, en el cual tuvo gran influencia y grandes aportes.

4. SOLUCIONES GENERALIZADAS DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Antes de pasar a definir las soluciones generalizadas de una ecuación diferencial, debemos hacer algunas aclaraciones tales como: En muchos casos la derivada clásica de una función es la misma función que caracteriza al funcional, pero no siempre, y por tal motivo a continuación un ejemplo:

La función escalón es $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$, si

derivamos esta función en el sentido clásico observamos que esta derivada existirá en todos los puntos excepto en el punto cero y en todo su dominio es la función cero. Ahora aplicamos la Definición 2 y buscamos Df su correspondiente derivada función generalizada

$$\begin{aligned} \forall \varphi, (Df, \varphi) &= (-1)^1 (f, D\varphi), \text{ tenemos:} \\ (Df, \varphi) &= -(f, D\varphi) = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) D\varphi(x) dx = \\ &= - \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right) (f(x) D\varphi(x)) dx = \\ &= - \int_0^{\infty} 1 \cdot D\varphi(x) dx = - \int_0^{\infty} 1 \cdot d\varphi(x) dx = \end{aligned}$$

$$- 1 \cdot \varphi(x)|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 0 \cdot \varphi(x) dx = -\varphi(\infty) + \varphi(0^+) = \varphi(0),$$

tenemos entonces:

$$(Df, \varphi) = \varphi(0), \text{ y a su vez } \varphi(0) = (\delta, \varphi), \text{ por lo tanto } (Df, \varphi) = (\delta, \varphi).$$

Otro ejemplo:

A continuación veremos una de las grandes diferencias entre derivadas clásicas y las derivadas generalizadas.

Una característica importante de la derivada de las funciones generalizadas es que la derivada generalizada de orden superior existe y no necesariamente debe previamente existir su derivada de orden inferior.

Y así:

Sea $u(x, y) = u_1(x) + u_2(y)$ una función generalizada, ahora calculamos la derivada de segundo orden:

$$\begin{aligned} (D_{xy}u, \varphi) &= \left(u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) = \\ &= \int_{\Omega} (u_1(x) + u_2(y)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx dy = \\ &= \int_{\Omega} u_1(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx dy + \int_{\Omega} u_2(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx dy, \\ &= \int_{\Omega} u_1(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx dy = \\ &= \int_a^b \left(u_1(x) \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dy \right) dx = \\ &= \int_a^b u_1(x) \Big|_{y=\psi_1(x)}^{y=\psi_2(x)} dx, \text{ de forma similar tenemos:} \\ &= \int_a^b u_2(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx = 0, \text{ es decir:} \end{aligned}$$

$(D_{xy}u, \varphi) = 0$, esto nos demuestra que la derivada de segundo orden existe indiferentemente exista la derivada de primer orden, se podía haber tomado $u_1(x)$ y $u_2(y)$ tales que sean continuas y no tengan primera derivada generalizada, y esto no afectaría el cálculo de su segunda derivada.

5. CONCLUSIONES

Podemos decir que las herramientas matemáticas desarrolladas por Sobolev, constituyen elementos nuevos necesarios para resolver problemas de la física matemática y así ampliar el diapazón de búsqueda de soluciones que mediante los métodos clásicos eran imposibles. En el siglo XVII el cálculo clásico alcanza su mejor época y los personajes más representativos fueron Newton y Leibniz, luego de 200 años, es decir en el siglo XIX nace el nuevo cálculo, con dos grandes personajes como lo son S.L Sobolev y L. Schwarz, los cuales

fueron resultado de dos grandes escuelas como lo es la escuela rusa de línea directa del gran Euler, y de la escuela francesa con los personajes tales como Lagrange, Fourier, Laplace.

El nuevo cálculo se apoya mucho del análisis funcional, tal como lo evidenciamos en la definición de funciones generalizadas y su derivada, y Sobolev hace un aporte importante con los espacios funcionales que llevan su nombre «Espacios de Sobolev $W_p^l(\Omega)$ »

El nuevo cálculo es conocido y presentado al mundo por L. Schwarz como «Teoría de distribuciones»

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **KUTATELADZE, S.S. ARTICLE: SOBOLEV OF THE EULER SCHOOL, "ON THE OCCASION OF THE CENTENARY OF THE BIRTH OF S. L. SOBOLEV", JANUARY 25, 2008.**
2. **KUTATELADZE, S.S. ARTICLE: SOBOLEV AND THE CALCULUS OF THE TWENTIETH CENTURY, "ON THE OCCASION OF THE CENTENARY OF THE BIRTH OF S. L. SOBOLEV", JANUARY 25, 2008.**
3. **KUTATELADZE, S.S. "SERGEI SOBOLEV AND LAURENT SCHWARTZ, "HERALD OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES, 74:2, PP 183-188 (2005).**
4. **BRYLEVSKAYA, L. I., THE MYTH OF OSTROGRADSKII: TRUE AND PREVARICATION, *ISTORICO-MATEMATICHESKIE ISSLEDOVANIYA, SECOND SERIES, ISSUE 7 (42), YANUS-K, MOSCOW, 2002, PP 18-28 (IN RUSSIAN).***

EN BÚSQUEDA DE DINÁMICAS DE APLICACIONES EN EL PLANO “ITERACIONES DE FUNCIONES REALES CUADRÁTICAS EN EL PLANO”

Córdova Rosas Nelson¹

Resumen. Este artículo muestra una clasificación de las aplicaciones cuadráticas en el plano que presentaron Guillermo Gómez y Santiago López de Medrano en [3] mediante la relación conjugación con aplicaciones a fines invertibles del plano. Y ellos determinaron 21 clases de equivalencia representados por aplicaciones cuadráticas reducidas. Esta clasificación da lugar al estudio de la dinámica generada por estas 21 aplicaciones.

Además, vamos a demostrar que una función estudiada como $f(z)=z^2+c$ es parte de la forma general de una aplicación real cuadrática del plano en sí misma, y que su dinámica nos han permitido conocer los famosos conjuntos de Julia y Fatou, que nos ayudan a comprender la dinámica de esta aplicación y también a disfrutar de la belleza de la estructura de estos conjuntos que forman parte de los conjuntos fractales [4]. Por esta razón elegimos una de las funciones como ejemplo, porque queremos mostrar cómo se puede empezar el estudio de la dinámica.

Por último, analizaremos cuáles son los parámetros y restricciones que regulan los diferentes tipos de dinámicas que están determinadas por la cantidad de puntos fijos. Así mismo, según el carácter de estos puntos fijos, es posible predecir la dinámica involucrada.

Palabras Claves: Dinámica, punto fijo, aplicación afin topológicamente equivalentes.

Abstract: This article shows a classification of quadratic applications in the plane that Guillermo Gomez and Santiago Lopez de Medrano shows in [3] by the conjugation relationship with investable related applications of the plane. And they determined 21 equivalence classes represented by small quadratic applications. This classification gives rise to the study of the dynamics generated by these 21 applications.

Also, we will show that a widely function studied $f(z)=z^2+c$ is part of the general form of a real quadratic application plane on itself, and that its dynamics allowed us to know the famous Julia and Fatou sets, that help us to understand the dynamics of this application and to enjoy the beauty of the sets structure which are part of the fractal sets [4]. For this reason, we chose one of the functions as example, because we want to let you know how to begin the study of the dynamics.

Finally, we will analyze what are the parameters and constraints that regulate the different types of dynamics that are determined by the number of fixed points. Likewise, by the nature of these fixed points, it is possible to predict the dynamic involved.

Keyword: Dynamics, Fixed Point, Affine Application, Topologically equivalent.

Recibido: Noviembre 2014.

Aceptado: Marzo 2015.

1. INTRODUCCIÓN

Gómez y López de Medrano [3] presentan algunos resultados preliminares sobre iteraciones de aplicaciones reales cuadráticas en el plano, provenientes de una familia de funciones de la siguiente forma:

$$f(x, y) = (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F, A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F') \quad (1)$$

Cuando f no es analítica, no es posible aplicar muchas de las propiedades del análisis complejo y los resultados aplicables son precarios.

Veamos un ejemplo muy conocido de una aplicación perteneciente a la familia (1) es el siguiente:

$$f(z) = z^2 + c$$

Definición: Sean dos conjuntos abiertos $A, B \subseteq \mathbb{C}$, una transformación o aplicación conforme f de A en B es una aplicación

diferenciable: $f : A \rightarrow B$ donde f es inyectiva en A ; $f'(z) \neq 0, \forall z \in A$ y $f(A) \subset B$

La ecuación en (1) denotada por $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ es una aplicación conforme, por lo tanto ella es analítica, aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos lo siguiente:

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2Ax + 2By + D =$$

$$2B'x + 2C'y + E' = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2Bx + 2Cy + E =$$

$$2A'x + 2B'y - D' = \frac{\partial v}{\partial x}$$

De (a) y (b) tenemos que $A = B', B = C', D = E', B = -A', C = -B', E = -D'$

Al escribir en f forma compleja tenemos:

¹ Profesor de la Universidad Federico Santa María, Campus Guayaquil (e-mail: cordova@espol.edu.ec)

$$f(x+iy) = Ax^2 + 2Bxy - Ay^2 + Dx + Ey + F + i(-Bx^2 + 2Axy + By^2 - Ex + Dy + F')$$

$$= Ax^2 + 2Axyi - Ay^2 - Bx^2i + 2Bxy + By^2i + Dx + Dy i - Exi + Ey + F + F'i$$

$$= (A - Bi)(x^2 + 2xyi - y^2) +$$

$$(D - Ei)(x + yi) + F + iF'$$

Si hacemos

$$a = A - Bi \quad b = D - Ei \quad c = F + Fi$$

Tenemos

$$f(z) = az^2 + bz + c, \quad a \neq 0$$

Luego conjugamos con la aplicación afín invertible:

$$A(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{2a} \quad \text{con} \quad A^{-1}(z) = az + \frac{b}{2}$$

$$g(z) = (A^{-1} \circ f \circ A)(z)$$

$$= A^{-1} \left(f \left(\frac{z}{a} - \frac{b}{2a} \right) \right)$$

$$= A^{-1} \left(a \left(\frac{2z-b}{2a} \right)^2 + b \left(\frac{2z-b}{2a} \right) + c \right)$$

$$= A^{-1} \left(a \frac{(2z-b)^2}{4a^2} + \left(\frac{2bz-b^2}{2a} \right) + c \right)$$

$$= A^{-1} \left(\frac{(4z^2 - 4bz + b^2)}{4a} + \left(\frac{4bz - 2b^2}{4a} \right) + c \right)$$

$$= A^{-1} \left(\frac{4z^2 - 4bz + b^2 + 4bz - 2b^2}{4a} + c \right)$$

$$= A^{-1} \left(\frac{4z^2 - b^2}{4a} + c \right)$$

$$= a \left(\frac{4z^2 - b^2}{4a} + c \right) + \frac{b}{2}$$

$$= z^2 + \left(-\frac{b^2}{4} + ac + \frac{b}{2} \right) = z^2 + C. \quad \text{Donde}$$

$$C = \left(-\frac{b^2}{4} + ac + \frac{b}{2} \right)$$

$$\therefore f(z) \text{ Es conjugada con } g(z) = z^2 + C$$

Sea z_0 un número complejo decimos que z_0 un punto fijo de f , si $f(z_0) = z_0$

Y si $f^p(z_0) = z_0$, para algún $p \in \mathbb{N}$, donde $f^p(z_0) = f \circ f \circ f \cdots f$ (p veces). Diremos en este caso que z_0 un punto periódico de f .

Definición: Un punto fijo z_0 es un punto fijo atractor si existe $\varepsilon > 0$, talque si $\|z - z_0\| < \varepsilon$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0$.

Un punto fijo z_0 es un punto fijo repulsor si existe $\varepsilon > 0$, para todo z tal que $\|z - z_0\| < \varepsilon$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|f^k(z) - z_0\| > \varepsilon$.

Los puntos periódicos se clasifican según

$\lambda = D(f^k(z))$ derivada compleja de f^k en z .

- Si $|\lambda| < 1$ entonces z es un atractor (superatractor sí $|\lambda| = 0$)
- Si $|\lambda| > 1$ entonces z es un repulsor
- Si $|\lambda| = 1$ entonces z es un punto indiferente.
- Llamaremos punto fijo Hiperbólico cuando $|\lambda| \neq 1$

Definición: Una transformación afín consiste en una transformación lineal seguida de una traslación entre dos espacios afines.

Definición: Dos aplicaciones f y g son afínmente equivalentes sí y sólo sí existen aplicaciones afines invertibles A_1 y A_2 tales que, $f = A_1^{-1} \circ g \circ A_2$ (Claramente esta relación es de equivalencia). Se dirá que f y g son afínmente conjugadas si

Guillermo Gómez y Santiago López de Medrano [3] presentaron el siguiente teorema:

Teorema: Existen 21 clases de equivalencia afín de las aplicaciones reales cuadráticas en el plano, es decir cada aplicación tipo (1) es afínmente equivalente a una y sólo una aplicación de la TABLA I:

TABLA. I
Tabla de equivalencia Fuente: Iterations of Quadratic Mappings of The Plane, (preliminary report) [3]
Resultados en funciones

i	F_i	Ω	$f(\Omega)$	$f(\mathbb{R}^2)$
1	$(x^2 - y^2 + 2x, 2xy - 2y)$	Elipse	--	--
2	$(x^2 + y^2 + 2x, 2xy - 2y)$	Hipérbola	--	--
3	$(x^2 + y, 2xy)$	Parábola	Cúspide	--
4	$(x^2 + y, y^2)$	Líneas transversales	Parábola y rayo	--
5	(x^2, y^2)	Líneas transversales	Dos rayos	--
6	$(x^2 + 2x, 2xy - 2y)$	Líneas paralelas	Línea y punto	--
7	$(x^2, 2xy)$	Líneas dobles	--	
8	$(x^2 - y^2, 2xy)$	Punto	--	--
9	$(x^2 + y^2, y)$	Línea	Parábola	convexo
10	$(x^2 - y^2, y)$	Línea	Parábola	No convexo
11	(x^2, y)	Línea	Línea	--
12	$(2xy, y)$	Línea	Punto	
13	$(x, y + x^2)$	ϕ	--	--
14	(x, y)	ϕ	--	--
15	(x^2, x)	Plano	Parábola	--
16	$(x^2 + y^2, 0)$	Plano	Rayo	--
17	$(x^2 - y^2, 0)$	Plano	Línea	--
18	$(x^2 - y, 0)$	Plano	Línea	--
19	$(x^2, 0)$	Plano	Rayo	--
20	(x, x)	Plano	Línea	--
21	$(0, 0)$	Plano	Punto	--

Los autores ([3]) nos dicen que este resultado no es suficiente para determinar la dinámica de las aplicaciones tipo (1), puesto que sólo la conjugación preserva la dinámica, pero este teorema nos ayuda a acercarnos más al estudio de su dinámica.

COROLARIO: Cada aplicación real cuadrática de \mathbb{R}^2 es afínmente conjugada a una aplicación de la forma: $A \circ F_i$ con $i = 1, 2, 3, \dots, 21$

Donde A es una aplicación afín invertible y F_i es una de las 21 aplicaciones del teorema.

Demostración: Si f es una aplicación real cuadrática del plano, entonces por el teorema tenemos que existen A_1 y A_2 aplicaciones afines invertibles tales que:

$$f = A_1^{-1} \circ F_i \circ A_2, \text{ para algún } i$$

Donde podemos escribir

$$f = A_2^{-1} \circ (A_2 \circ A_1^{-1} F_i) \circ A_2^{-1}$$

Donde $A_2 \circ A_1^{-1} = A$ es una aplicación afín invertible.

Estudiar para cada una de estas $A \circ F_i$ su dinámica, se estará estudiando una gran gama de aplicaciones reales cuadráticas del plano que tienen la misma dinámica, es interesante además estudiar cuando dos de estas $A_1 \circ F_i$ o $A_2 \circ F_i$ son conjugadas.

2. ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE LA APLICACIÓN $A \circ F_{17}$

Sea la aplicación invertible de la forma $A(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$ con

$ad - bc \neq 0$. Estudiemos la aplicación $A(x, y)$ compuesta con

$F_1(x, y) = (x^2 - y^2, 0)$. ¿Es posible obtener una descripción de su dinámica?

Sea

$$(A \circ F_1)(x, y) = (a(x^2 - y^2) + e, c(x^2 - y^2) + f)$$

Donde $Tr[D(A \circ F_1)(x, y)] = 2ax - 2cy$ es una aplicación que tiene sus curvas de nivel invariantes bajo conjugación afín, a saber:

Si $z = U(x, y) = (U_1(x, y), U_2(x, y))$ donde $U(x, y)$ es una función diferenciable en \mathbb{R}^2 y

sea $B(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$

aplicación afín invertible es decir $ad - bc \neq 0$

.Calculando traza de

$$D(A^{-1} \circ U(x, y) \circ A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x} & \frac{\partial U_1}{\partial y} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} & \frac{\partial U_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$D(A^{-1} \circ U(x, y) \circ A) =$$

$$\begin{pmatrix} ad \frac{\partial U_1}{\partial x} + dc \frac{\partial U_1}{\partial y} - ab \frac{\partial U_2}{\partial x} - bc \frac{\partial U_2}{\partial y} & bd \frac{\partial U_1}{\partial x} + d^2 \frac{\partial U_1}{\partial y} - b^2 \frac{\partial U_2}{\partial x} - bd \frac{\partial U_2}{\partial y} \\ -ac \frac{\partial U_1}{\partial x} - c^2 \frac{\partial U_1}{\partial y} + a^2 \frac{\partial U_2}{\partial x} - ac \frac{\partial U_2}{\partial y} & -bc \frac{\partial U_1}{\partial x} - dc \frac{\partial U_1}{\partial y} + ab \frac{\partial U_2}{\partial x} - ad \frac{\partial U_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Donde la traza de $D(A^{-1} \circ U(x, y) \circ A)$ es igual a :

$$traza[D(A^{-1} \circ U(x, y) \circ A)] = ad \frac{\partial U_1}{\partial x} + dc \frac{\partial U_1}{\partial y} -$$

$$ab \frac{\partial U_2}{\partial x} - bc \frac{\partial U_2}{\partial y} + -bc \frac{\partial U_1}{\partial x} - dc \frac{\partial U_1}{\partial y} + ab \frac{\partial U_2}{\partial x} + ad \frac{\partial U_2}{\partial y}$$

$$traza[D(A^{-1} \circ U(x, y) \circ A)] = ad \frac{\partial U_1}{\partial x} + ad \frac{\partial U_2}{\partial y} - bc \frac{\partial U_2}{\partial y} + -bc \frac{\partial U_1}{\partial x} =$$

$$(ad - bc) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \right)$$

$$(ad - bc) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) = k$$

Ahora

, son las curvas de nivel de la traza ,es decir

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) = \frac{k}{(ad - bc)} \text{ como } ad - bc \neq 0$$

$$\frac{k}{(ad - bc)} = c \in \mathbb{R}$$

basta tomar y tenemos que las curvas de nivel de la traza de

$D(A^{-1} \circ U(x, y) \circ A)$ son invariantes bajo conjugación afín. Luego conjugando con una

rotación podemos hacer sus curvas de nivel horizontales, lo que implica que podemos

considerar $a = 0$.

Es decir

$$F_2(x, y) = (A \circ F_1)(x, y) = (e, c(x^2 - y^2) + f)$$

Ahora consideremos el homomorfismo

$$h(x, y) = c^{-1}(x, y), (c \neq 0)$$

Luego

$$(h^{-1} \circ F_2 \circ h)(x, y) = F_3(x, y) = (ce, x^2 - y^2 + cf), (c \neq 0)$$

y estudiemos $F(x, y) = (\alpha, x^2 - y^2 + \beta)$,

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Como $F_{\alpha,\beta}^{h+1}(x, y) = F^h(\alpha, x^2 - y^2 + \beta)$,
 $k \in \mathbb{N}$ esto nos dice que necesitamos estudiar
 los iterados de la recta $x = \alpha$.

Sea $J_{y_0} = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / x^2 - y^2 + \beta = y_0\}$, $y_0 \in \mathfrak{R}$

Tenemos que:

$$F_{\alpha,\beta}^{h+1}(x, y) = F^h(\alpha, y_0) = (\alpha, f_{\alpha,\beta}^h(y_0))$$

donde $f_{\alpha,\beta}^h(y_0) = \alpha^2 + \beta - y_0^2$

Ahora si α, β son fijos (pero arbitrarios),
 tomamos $\xi = \alpha^2 + \beta$ la cual es una curva en
 la cual $f_{\xi}(x) = \xi - x^2$ tiene la misma

dinámica que $f_{\alpha,\beta}^h$ para cada ξ dado.
 Considerando ahora la conjugación con el
 homeomorfismo $h(x) = -x$, obtenemos que es
 equivalente a la siguiente aplicación:

$$f_{\varepsilon}(x) = x^2 + \varepsilon \quad \text{donde } \varepsilon = -\xi$$

Proposición: Dada $f_{\varepsilon}(x) = x^2 + \varepsilon$, si
 $\varepsilon < \frac{1}{4}$ entonces existe un único $\mu > 1$ tal que
 f_{ε} es topológicamente conjugada a
 $F_{\mu}(x) = \mu x(1-x)$.

Demostración:
 Consideremos el homeomorfismo

$$h(x) = -\frac{1}{\mu}x + \frac{1}{2} \quad \text{y su inversa}$$

$$h^{-1}(x) = -\mu x + \frac{\mu}{2} \quad \text{para obtener:}$$

$$(h^{-1} \circ F_{\mu} \circ h)(x) = h^{-1} \circ F_{\mu} \left(-\frac{1}{\mu}x + \frac{1}{2} \right)$$

$$= h^{-1} \circ \left(\mu \left(-\frac{1}{\mu}x + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{\mu}x - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= h^{-1} \circ \left(\left(-x + \frac{\mu}{2} \right) \left(\frac{1}{\mu}x + \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= h^{-1} \circ \left(-\frac{1}{\mu}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{\mu}{4} \right)$$

$$= h^{-1} \circ \left(-\frac{1}{\mu}x^2 + \frac{\mu}{4} \right)$$

$$= -\mu \left(-\frac{1}{\mu}x^2 + \frac{\mu}{4} \right) + \frac{\mu}{2}$$

$$= x^2 - \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu}{2}$$

$$(h^{-1} \circ F_{\mu} \circ h)(x) = x^2 - \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu}{2}, \text{ Ahora sí,}$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{4} + \frac{\mu}{2} \quad \text{entonces } \mu = 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}$$

Es claro que con la proposición anterior
 podemos describir la dinámica de $F_{\alpha,\beta}(x, y)$
 para el caso en que tenemos dos puntos fijos

para F_{μ} . Por ejemplo se sabe que para la
 aplicación $F_{\mu}(x) = \mu x(1-x)$ existe un

conjunto maximal invariante \wedge_{μ} para $\mu > 4$.
 Este conjunto es de Cantor que posee una órbita

densa para F_{μ} y los puntos periódicos de F_{μ}
 son densos en \wedge_{μ} (ver [2]) Lo que traducido
 mediante el homeomorfismo $h(x)$ para la
 aplicación f_{ε} significa que:

Existe un conjunto de Cantor inducido por \wedge_{μ}
 el cual lo denotaremos con
 $\Omega_{\varepsilon} = \{(x, y) / y \in \wedge_{\mu}\}$, con $\varepsilon > 2$, el cual
 está en correspondencia biunívoca con el

conjunto $B = \bigcup_{y_0 \in \wedge_{\mu}} J_{y_0}$. Luego tenemos que

B es un conjunto de Cantor de Hipérbolas que
 posee una órbita densa de hipérbolas y un
 conjunto de hipérbolas periódicas de $F_{\alpha,\beta}$ que
 son densas en B.

Para el caso en que tenemos un punto fijo, es

$$\left(\alpha^2 + \beta = -\frac{1}{4} \right)$$

decir cuando podemos
 encontrar un homeomorfismo de \mathfrak{R}^2 en \mathfrak{R}^2 el
 cual determina una equivalencia topológica

entre $F_{\alpha,\beta}$ y $F_{\alpha',\beta'}$, tales que

$$\alpha^2 + \beta = (\alpha')^2 + \beta' = -\frac{1}{4}. \text{ Para luego}$$

traducir la dinámica para

$$f_{\alpha,\beta}(y_0) = \alpha^2 + \beta - y^2 = -\frac{1}{4} - y^2$$

Al estudiar los puntos fijos para

$$F_{\alpha,\beta}(x, y) = F^h(\alpha, x^2 - y^2 + \beta),$$

$\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ consideramos la ecuación

$$F_{\alpha,\beta}(x, y) = (x, y) \text{ lo que nos lleva a estudiar el siguiente sistema}$$

$$\alpha = x, \quad \frac{\left[\frac{y + \frac{1}{2}}{\beta + \frac{1}{4}} \right] - x^2}{\beta + \frac{1}{4}} = 1$$

Donde para $1 + 4(\alpha^2 + \beta) \geq 0$ existen puntos fijos de la forma

$$P_1 = \left[\alpha, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\alpha^2 + \beta)}}{2} \right] \text{ y}$$

$$P_2 = \left[\alpha, \frac{-1 - \sqrt{1 + 4(\alpha^2 + \beta)}}{2} \right]. \text{ Por lo}$$

tanto existe un único punto fijo sí

$\alpha^2 + \beta = -\frac{1}{4}$. La pregunta que nos hacemos es la siguiente:

Dados α, β y α', β' tales que

$$\alpha^2 + \beta = (\alpha')^2 + \beta' = -\frac{1}{4}, \text{ ¿Serán } F_{\alpha,\beta} \text{ y}$$

$F_{\alpha',\beta'}$ topológicamente equivalentes?, es decir,

¿Existe un homeomorfismo $H : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$

tal que $H \circ F = G \circ H$?

Para responder esta pregunta consideremos

$F_{\alpha,\beta} H(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$ y supongamos que $H \circ F = G \circ H$ con

$F = F_{\alpha,\beta}$ y $G = F_{\alpha',\beta'}$. Es decir

$$(H \circ F)(x, y) = H(\alpha, x^2 - y^2 + \beta) =$$

$$(h_1(\alpha, x^2 - y^2 + \beta), h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta)) = (G \circ H)(x, y) =$$

$$G(h_1(x, y), h_2(x, y)) = (\alpha', (h_1(x, y))^2 - (h_2(x, y))^2 + \beta')$$

$$\Rightarrow h_1(\alpha, x^2 - y^2 + \beta) = \alpha' \wedge h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta) =$$

$$(h_1(x, y))^2 - (h_2(x, y))^2 + \beta'$$

es decir:

$$h_1(x, y) = \alpha', \forall y \in \mathfrak{R}$$

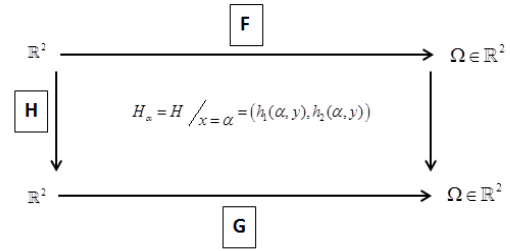
$h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta) = (\alpha')^2 + \beta' - (h_2(x, y))^2$ y obtenemos:

$$h_2\left(\alpha, -\frac{1}{4} - y^2\right) = -\frac{1}{4} - (h_2(x, y))^2$$

Que es equivalente a $h_2(\alpha, k(y)) = k(h_2(\alpha, y))$ con

$$k(x) = -\frac{1}{4} - x^2 \text{ lo que usaremos más adelante.}$$

Ahora consideremos el siguiente diagrama de la situación:



Lo que nos sugiere definir en primera instancia un homeomorfismo

$$H_\alpha : \Omega = \langle \alpha, y \rangle / y \in \mathfrak{R} \rightarrow \langle \alpha', y \rangle / y \in \mathfrak{R}$$

para luego extenderlo a \mathfrak{R}^2 usando F y la relación G^{-1} del modo siguiente:

Fijamos y_0 y consideramos los conjuntos

$$F^{-1}(\alpha, y_0) = \{ \langle x, y \rangle \in \mathfrak{R}^2 / F \langle x, y \rangle = \langle \alpha, y_0 \rangle \}$$

$$G^{-1}(\alpha', z_0) = \{ \langle \alpha, y \rangle \in \mathfrak{R}^2 / F \langle x, y \rangle = \langle \alpha', z_0 \rangle \}$$

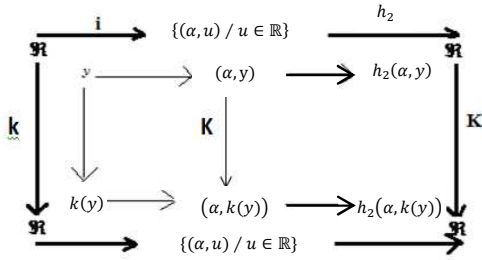
Luego el homeomorfismo H debe cumplir

$$H(F^{-1}(\alpha, y_0)) = G^{-1}(\alpha', h_2(\alpha, y_0)).$$

Observación: en particular si $x = \alpha$ tenemos que

$$h_2(\alpha, \alpha^2 - y^2 + \beta) = [h_1(\alpha, y)]^2 - [h_2(\alpha, y)]^2 + \beta'.$$

Ahora de (3) consideremos el siguiente diagrama:



Donde $k = K / x = \alpha$

Como el diagrama debe conmutar y (1) $k \circ h_2(\alpha, y) = h_2(\alpha, k(y))$. de esto se deduce que la igualdad se tiene sólo si $h_2(\alpha, y) = k^{-1}(y)$, entonces $y \in \text{Dom} k^{-1}$, es decir

$$\begin{aligned} h_2(\alpha, y) = k^{-1}(y) &\rightarrow h_2^{-1}(\alpha, y) = k(y) \rightarrow y = h_2 \circ k \\ &\rightarrow h_2(\alpha, k(y)) = (\alpha, y) \rightarrow h_2(\alpha, k(y)) = k \circ k^{-1}(\alpha, y) \\ &\rightarrow h_2(\alpha, k(y)) = k \circ (h_2(\alpha, y)) \quad (1) \end{aligned}$$

Luego $h_2(\alpha, y) = \sqrt{-1/4 - y}$ o

$$h_2(\alpha, y) = -\sqrt{-1/4 - y}, y \in \left] -\infty, -\frac{1}{4} \right[$$

como $\alpha^2 + \beta = -\frac{1}{4}$ tenemos que existen únicos puntos fijos, $P_F = (\alpha, y)$ para F y

$P_G = \left(\alpha', -\frac{1}{2}\right)$ para G, tales que

$$H\left(\alpha, -\frac{1}{2}\right) = \left(\alpha', -\frac{1}{2}\right) \text{ concluimos que:}$$

$$h_2(\alpha, y) = -\sqrt{-1/4 - y}, y \in \left] -\infty, -\frac{1}{4} \right[$$

Además usando (3)

$$h_2\left(\alpha, -\frac{1}{4} - y^2\right) = -\frac{1}{4} - (h_2(x, y))^2 \text{ y si}$$

$$h_2\left(\alpha, -\frac{1}{4} - (-y)^2\right) = -\frac{1}{4} - (h_2(x, -y))^2$$

tenemos que

$$(h_2(\alpha, y))^2 - (h_2(x, -y))^2 = 0, \text{ de donde}$$

$$(h_2(\alpha, y)) = (h_2(x, -y)) \vee (h_2(x, y)) = (-h_2(x, -y))$$

haciendo $x = \alpha$ tenemos que $(h_2(\alpha, y)) = h_2(\alpha, -y) \vee (h_2(\alpha, y)) = -h_2(\alpha, -y)$

y como $h_2\left(\alpha, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ concluimos que

$(h_2(\alpha, y)) \neq h_2(\alpha, -y) \vee (h_2(\alpha, y)) = -h_2(\alpha, -y)$, luego:

$$h_2(\alpha, y) = \begin{cases} -\sqrt{-1/4 - y}, & y < -1/2 \\ y & -1/2 \leq y \leq 1/2 \\ \sqrt{-1/4 + y}, & y > 1/2 \end{cases}$$

Ahora definamos el homeomorfismo H_α como sigue

$$H_\alpha : \{(\alpha / y) \in \mathfrak{R}\} \rightarrow \{(\alpha', y) / y \in \mathfrak{R}\}.$$

$$(\alpha, y) \rightarrow [h_1(\alpha, y), h_2(\alpha, y)] = \begin{cases} [\alpha', -\sqrt{-1/4 - y}], & y < -1/2 \\ [\alpha', y], & -1/2 \leq y \leq 1/2 \\ [\alpha', \sqrt{-1/4 + y}], & y > 1/2 \end{cases}$$

Ahora definamos otro homeomorfismo

$H : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ como una extensión de H_α que

satisface $H(F^{-1}\langle \alpha, y_0 \rangle) = G^{-1}(H_\alpha\langle \alpha, y_0 \rangle)$ con

$$G^{-1}(H_\alpha\langle \alpha, y_0 \rangle) = G^{-1}(\alpha, h_2\langle \alpha, y_0 \rangle)$$

Sea $L : F^{-1}(\alpha, y_0) \rightarrow G^{-1}(\alpha, h_2\langle \alpha, y_0 \rangle)$

$$(x, y) \rightarrow (u, v) \quad \text{Tal que}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + \beta - y_0}} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \beta' - h_2(\alpha, y_0)}}$$

Donde (x, y) y (u, v) están en el mismo cuadrante, $y \neq 0$

Si $y = 0$

$$L(x, 0) = \left[\frac{x}{|x|} \sqrt{-\beta' + h_\alpha(\alpha, y_0)}, 0 \right]; x \neq 0, -\beta + y_0 > 0$$

Es decir:

$$L(x, y) = \left[\frac{x}{|x|} \sqrt{\frac{x^2(\beta' - h_\alpha(\alpha, y_0))}{\beta - y_0}}, \frac{y}{|y|} \sqrt{\mu_0^2 + \beta' - h_\alpha(\alpha, y_0)} \right]; x, y \neq 0, \beta - y_0 \neq 0; \mu_0 = \sqrt{\frac{x^2(\beta' - h_\alpha(\alpha, y_0))}{\beta - y_0}};$$

$\beta' - h_\alpha(\alpha, y_0)$ y $\beta - y_0$ tienen el mismo signo (+ ó -)

Luego sea:

$$a(x, y) = \frac{x}{|x|} \sqrt{\frac{x^2(\beta' - h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta))}{y^2 - x^2}}$$

y

$$b(x, y) = \frac{y}{|y|} \sqrt{\frac{x^2(\beta' - h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta))}{y^2 - x^2} + \beta' - h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta)}$$

Con $y^2 - x^2 \neq 0; y \neq 0, x \neq 0$

Por lo tanto:

$$H(x, y) = \begin{cases} (a(x, y), b(x, y)) \\ \left[\frac{x}{|x|} \sqrt{-\beta' + h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta)}, 0 \right] \\ (x, y) \end{cases}$$

$$, \quad y^2 - x^2 \neq 0; y \neq 0, x \neq 0$$

$$, \quad y = 0, x \neq 0, -\beta + y_0 > 0$$

$$, \quad y^2 - x^2 = 0 \vee x = 0$$

$$\alpha^2 + \beta = -\frac{1}{4} = (\alpha')^2 + \beta'$$

Ahora como

$$F_{\alpha, \beta}^{h+1}(x, y) = F^h(\alpha, y_0) = (\alpha, f_{\alpha, \beta}^h(y_0))$$

$$\text{con } f_{\alpha, \beta}(y_0) = \alpha^2 + \beta - y_0^2 = -\frac{1}{4} - y_0^2$$

, la cual tiene un único punto fijo no hiperbólico

$$\text{en } x = -\frac{1}{2}, \text{ donde } f^h_{\alpha, \beta}(y_0) \rightarrow -\frac{1}{2} \text{ sí}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ y } |x| \leq \frac{1}{2}, f^h_{\alpha, \beta}(x) \rightarrow -\infty \text{ si}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ y } |x| > \frac{1}{2}.$$

Luego si $(x, y) \in \bigcup_{|y_0| \leq 1/2} J_{y_0}$ entonces

$$F_{\alpha, \beta}^{h+1}(x, y) \rightarrow \left(\alpha, -\frac{1}{2} \right)$$

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 + \beta = -\frac{1}{2} \right\}, \text{ y}$$

$$\text{si } (x, y) \in \bigcup_{|y_0| \leq 1/2} J_{y_0}$$

$F_{\alpha, \beta}^{h+1}(x, y) \rightarrow (\alpha, -\infty)$, es decir A es una hipérbola fija para $F_{\alpha, \beta}$.

Así hemos podido descubrir que la dinámica de

la aplicación $F(x, y) = (\alpha, x^2 - y^2 + \beta)$,

con $\alpha = ce$ y $\beta = cf$ con $c \neq 0$, donde para

$c^2 e^2 + cf > -\frac{1}{4}$ es análoga a la curva

logística en la cual tenemos una dinámica

distinta para $c^2 e^2 + cf = -\frac{1}{4}$ y a

$c^2 e^2 + cf < -\frac{1}{4}$. En este último caso no

tenemos puntos fijos para $f_{\alpha, \beta}$ donde

$$F_{\alpha, \beta}^{h+1}(x, y) \rightarrow (\alpha, -\infty)$$

3. CONCLUSIONES

En este caso hemos tenido suerte de que la aplicación en su primer iterado caiga en una recta, lo que hace que las demás, sean iteraciones de la recta en la recta, lo que nos llevó a transferir la dinámica unidimensional y trasladar resultados de dinámicas conocidas en este caso la de la curva logística. Esto quiere decir que en el plano también se replican de algún modo las dinámicas unidimensionales y que hay un mundo mucho más complejo por descubrir.

Así hemos podido acercarnos a poder describir parte de la dinámica de una de las 21 aplicaciones propuestas por Gómez y López de Medrano, esto es un trabajo arduo para el resto de las aplicaciones cuadráticas y apertura un línea de investigación muy interesante, nosotros hemos abierto el camino para que otros lo sigan.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **ALLIGOOD, KATHLEEN; SAUER TIM; YORKE, JAMES**"CHAOS: AN INTRODUCTION TO DYNAMICAL SYSTEMS". (OCT 1, 2000). Springer Verlag.
2. **DEVANEY, ROBERT L.**" INTRODUCTION TO CHAOTIC DYNAMICAL SYSTEMS (2ED) ED. Addison-Wesley Boston, 1989.
3. **GÓMEZ A, GUILLERMO;** Lopez de Medrano, Santiago: *Iteratios of Quadratic Mappings of The Plane,(preliminary report)*. Facultad de Ciencias e Instituto de Matemáticas, UNAM, pág. 6 y 7.
4. **MANDELBROT, BENOÎT,** "LA GEOMETRÍA FRACTAL DE LA NATURALEZA, CIENCIA". FÍSICA OCTUBRE 1997, ISBN: 978-84-8310-549-8.
5. **ROMERA, MIGUEL ;**"TÉCNICA DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS", Consejo Superior de Investigaciones Científicas España 1997. ISBN 8400-07667-2.

LA ADMINISTRACIÓN DE CILINDROS DE ALTA PRESIÓN Y SU IMPACTO EN LA ATENCIÓN A LOS USUARIOS DE GASES DEL AIRE COMPRIMIDO

Fernández Ronquillo Jorge ¹

Resumen. *El mercado de gases del aire comprimido ha sido manejado desde sus inicios por políticas directas y rígidas de compañías transnacionales. Los pocos controles que existen para la distribución de cilindros de alta presión han sido creados e implementados por estas empresas, con procedimientos de trabajo que se concentran en impedir el crecimiento de competidores, utilizando mecanismos que afectan la libre decisión del consumidor, aprovechando sus títulos de “empresas de alta seguridad”, como mecanismo para mantener la concentración del mercado. Este estudio describe lo que ocurre con los cilindros de alta presión y sugiere modificaciones a los procesos logísticos, que garanticen al usuario un buen servicio, a un precio adecuado, con altos estándares de seguridad y entregados en el tiempo adecuado. En este artículo se desarrolla una metodología de administración de cilindros de alta presión que permite diferenciar y controlar aquellos que son de uso privado con los de las empresas comercializadoras..*

Palabras Claves: Distribución cilindros, Logística cilindros, Gases del aire, Cilindros alta presión, Mercado de gases comprimidos, Seguridad y transporte.

Abstract: *Since its inception, the compressed gas market has been managed by the direct and rigid policies of transnational companies. The few existing controls on the distribution of high-pressure cylinders have been created and implemented by these companies; the working procedures focus on preventing the development of competitors by employing mechanisms that impair the free choice of the consumer. These companies take advantage of their “high security firm” title by using it as a mechanism to maintain the concentration of the market. This study seeks to understand the current situation of high pressure cylinders and to suggest modifications to the logistical procedures that can guarantee the consumer a quality service, a fair price, high security standards, and a timely delivery. This article will develop an administration methodology to establish a differentiation between the private use cylinders with the cylinders marketer companies.*

Keyword: Distribution cylinders, cylinders logistics, air gases, high pressure cylinders, compressed gas market, security and transport.

Recibido: Enero 2015.

Aceptado: Marzo 2015.

1. INTRODUCCIÓN

Administración es el conjunto de medios y métodos necesarios para llevar a cabo la organización de una empresa, este estudio se limita al campo del manejo de cilindros de alta presión, desde el punto de vista de transporte, manejo, control y operación en clientes.

Este estudio es una base para la decisión de cómo manejar los cilindros de alta presión en un mercado que ha mantenido políticas de intercambio altamente riesgosas y en manos de pocos operadores.

El mercado de gases se concentra la mayoría en empresas multinacionales y en unas pocas empresas medianas que captan un mercado residual.

Se estima que el 50% de los cilindros de alta presión son de propiedad de empresas privadas internacionales y el restante se reparte entre empresas medianas y clientes directos. Los cilindros de las empresas son entregados a los usuarios bajo la modalidad de contrato de arriendo o de comodato para uso temporal.

De la mayoría de los cilindros se desconoce su paradero, no es posible ubicarlos en el mercado

y pueden tener usos diferentes para los cuales ellos fueron fabricados o acondicionados. Es usual la rotación en que la empresa productora de gases entrega un cilindro de su propiedad y recibe uno del cliente; y el solo hecho de intercambiarlo produce el efecto legal de cambiar automáticamente la propiedad.

Los números seriales de los cilindros, usualmente únicos e irrepetibles son llevados en documentos que posteriormente se utilizan para el caso de reclamos y/o trazabilidad exigida por la ley, pero esto se limita solamente para el producto que contiene y no tienen ninguna validez para demostrar la propiedad del cilindro intercambiado. Es usual considerar al mercado de cilindros de alta presión como un mercado común del que todos son dueños de una parte de la “porción” y la propiedad se demuestra a través de la posesión del bien.

El respeto por el uso de los cilindros, no se da en el mercado de los cilindros de alta presión, a pesar de ser extremadamente peligrosos (presiones de 2000 a 3000 libras), costos muy elevados (100 a 300 dólares), con un mercado concentrado en unas pocas empresas que manejan la comercialización.

Los cilindros en su mayoría se fabrican para 5 años de duración, periodo en el que puede ser revalidado a través de una prueba hidrostática. Esta prueba la realizan empresas, que por

¹ Profesor de la Universidad Laica Vicente Rocafuerte de Guayaquil, Departamento de Investigación Científica (e-mail: jfernandezr@ulvr.edu.ec)

razones de comercialización y no de seguridad, solo aceptan como válidas las realizadas en sus instalaciones. Este procedimiento podría considerarse como aceptable, si cada empresa fuese responsable de sus cilindros y no necesariamente de todo el parque del país..

2. BASE TEÓRICA DEL SISTEMA

Resulta imprescindible identificar los cilindros que transportan gases medicinales. Las etiquetas RFID (Radio Frequency Identification), también denominadas DSRC (Dedicated Short Range Communication), son sistemas para identificar objetos mediante ondas de radio. La etiqueta RFID, también denominada chip o transponedor, contiene una pequeña antena emisora que puede ser activa o pasiva (permanece inactiva hasta que se le solicita información). La información que alberga debe ser leída con un receptor de baja frecuencia, que emite ondas de radio a una distancia de hasta dos metros y suelen ser pasivas, de media y de alta frecuencia. La identificación por radiofrecuencia o RFID es una tecnología de identificación remota e inalámbrica en la cual un dispositivo lector o reader vinculado a un equipo de cómputo, se comunica a través de la antena con un transponedor (también conocido como tag o etiqueta) mediante ondas de radio.

La tecnología RFID no necesita una línea de visión, no requiere de intervención humana (Ideal para automatizar), trabaja en distancias de lectura hasta de 2 metros, tiene lectura simultánea de múltiples artículos (protocolo anticolidión), puede realizar hasta 500 lecturas por minuto (más de 5 veces más rápido que un código de barras), no le afectan los ambientes sucios y tiene capacidad de lectura y escritura.

RFID Pasivo confía en la energía de Radio Frecuencia transferida del lector a la etiqueta para activar la etiqueta. RFID refleja la energía del lector o absorbe y temporalmente guarda una cantidad muy pequeña de energía de la señal del lector para generar su propia respuesta rápida. En cualquier caso, el funcionamiento de RFID Pasivo requiere señales muy fuertes del lector, y la fuerza de la señal devuelta de la etiqueta es forzada a niveles muy bajos por la energía limitada

Para RFID pasiva, el rango de comunicación es limitado por la necesidad de señales muy fuertes recibidas por la etiqueta para activarse, limitando al lector al rango de la etiqueta, y por la pequeña cantidad de potencia disponible para que una etiqueta responda al lector, limitando la etiqueta al rango del lector. Estos factores típicamente limitan el funcionamiento de RFID Pasivo a 2 metros o menos. Un sistema básico de RFID Pasivo requiere de 3 segundos para

identificar 20 etiquetas. Con un rango de comunicación de dos metros.

Las tecnologías disponibles de RFID pueden guardar los datos dinámicamente dentro de la etiqueta. Sin embargo, proporcionan típicamente sólo una cantidad pequeña de almacenamiento de datos de lectura/escritura, en el orden de 128 bytes (1000 bits) o menos. RFID Pasivo es apropiado cuando el movimiento de materiales es altamente consistente y controlado, y cuando es requerida una capacidad de almacenamiento pequeña y sin requerimientos de sensibilidad.

Para poder identificar los cilindros que conforman una paleta y crear una relación unívoca entre ambos que permita mantener su trazabilidad, es necesario realizar lecturas masivas hasta de 240 cilindros simultáneamente. La lectura correcta de todos y cada uno de estos cilindros en su interior resulta extremadamente compleja, debido a que las "capas" metálicas que conforman las paletas generan barreras a la transmisión y flujo de las ondas de radiofrecuencia que irradian los lectores RFID para poder energizar a cada uno y obtener los datos almacenados en él.

El sistema desarrollado y que se presenta en este artículo, incluye el uso del RFID en todas las etapas del proceso, desde la identificación de los cilindros, hasta el control de un lote completo en la línea de llenado dentro de la empresa, así como el transporte en doble vía y el almacenamiento en la bodega del cliente, cerrando con el retorno de los cilindros a la empresa.

Los resultados de los ensayos confirmaron la utilización de Tecnología RFID en la identificación de cilindros con oxígeno medicinal como una herramienta confiable y segura, que no afecta los procesos de manufactura ni logística y permite al mismo tiempo optimizar el control de los gases medicinales y los cilindros que los transportan.

3. DATOS GENERALES DE LOS CILINDROS

Cilindros de Alta Presión.- Son construidos por extrusión en caliente, y se identifican por algunas marcas que poseen en los cuellos.

DOT.- Especifica el material y el tipo de fabricación del cilindro, en algunos cilindros se incluyen la máxima presión de servicio, cerca de ella se incluyen las palabras SPUN o PLUG, las cuales especifican la forma de fabricación del cilindro.

Todo cilindro debe tener estampado en bajo relieve: el nombre del propietario del cilindro; la presión máxima de servicio o la presión de prueba; el peso tara del cilindro siempre que se

trate de gases licuados; el volumen del cilindro en litros de agua; fecha de la última prueba hidrostática, indicando mes, año, logotipo del laboratorio de prueba hidrostática; norma técnica de fabricación del cilindro y número serial de identificación del mismo. No se deben remover, cambiar o alterar marcas o números de identificación de los cilindros, porque eso automáticamente es causa de rechazo del cilindro.

Datos de clasificación

- Norma de clasificación.- la norma de referencia internacional bajo la cual fue fabricado el cilindro.
- Tipo de Material fabricación.- composición del material utilizado para la fabricación (3A, 3AA).
- Presión de diseño o de servicio WP.- presión nominal de trabajo para el cual fue fabricado el cilindro.

Datos de fabricación

- Número de serie del cilindro.- es el número único del cilindro que puede contener letras y números.
- Identificación del Fabricante.- la marca que pone el fabricante al cilindro.
- Fecha de fabricación.- fecha de fabricación del cilindro
- Procedencia.- país en donde el cilindro fue fabricado.
- Marca oficial de inspección reconocida
- Capacidad m³.- capacidad en metros cúbicos del cilindro con gas comprimido a la presión de servicio.
- Tara en kg.- peso del cilindro vacío.
- Volumen lt.- volumen físico del cilindro en litros (volumen de agua)

Datos particulares

- Propietario.- nombre del propietario del cilindro
- Presión de llenado.- presión a la que fue llenado el cilindro
- Tipo de gas.- código del gas que contiene el cilindro
- Color.- color del cilindro
- Tipo de tapa.- tapa fija o móvil

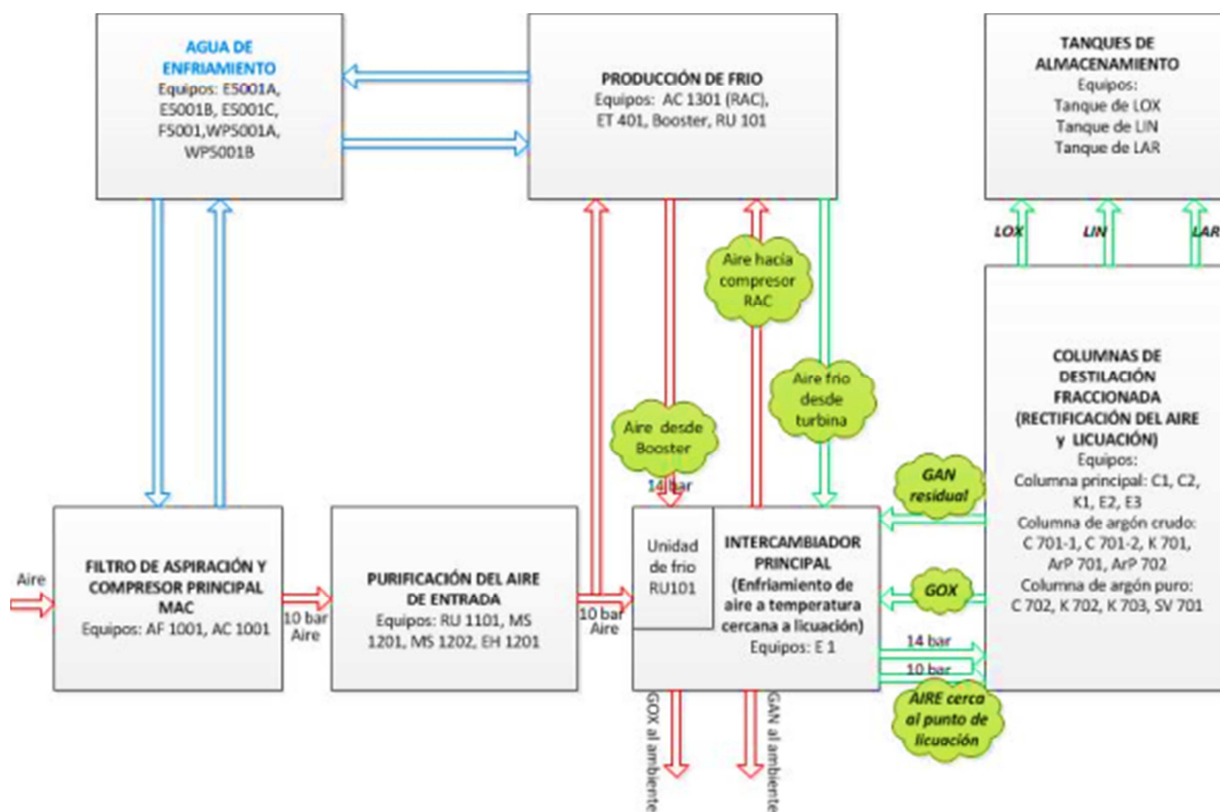
Datos de prueba hidrostática

- Presión de prueba.- presión hidrostática a la que fue sometido al momento de la prueba
- Fecha de última inspección.- fecha de la última prueba hidrostática
- Expansión volumétrica total.- volumen al cual se expandió cuando se le hizo la prueba
- Expansión volumétrica permanente.- volumen al cual retornó luego de quitarle la presión
- Expansión volumétrica elástica.- diferencia entre las expansiones anteriores
- Empresa que hizo la prueba.- nombre de la empresa que realizó la última prueba
- Color del anillo.- color del anillo ubicado entre la válvula y el domo como referencia del año
- Fecha cambio de válvula.- fecha del último cambio de válvula.
- Tipo de válvula.- código de la válvula que tiene el cilindro.
- Fecha de próxima revisión.- fecha en la cual el cilindro debe volver a ser probado.
- Fecha de rechazo.- fecha cuando el cilindro es rechazado luego de haberse realizado la prueba hidrostática.

4. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE PRODUCCIÓN, DISTRIBUCIÓN Y ATENCIÓN A CLIENTES CON CILINDROS DE ALTA PRESIÓN

El proceso inicia en las fábricas de producción de gases del aire, que obtienen y almacenan el producto en estado líquido obtenido a través de un proceso de destilación. La materia prima es el aire y los productos obtenidos en la mayoría de las aplicaciones son Oxígeno Líquido (LOX), Nitrógeno Líquido (LIN) y Argón Líquido (LAR). El procedimiento que las plantas de producción siguen para la obtención de los gases derivados del aire, se resume en la FIGURA I:

FIGURA. I
 El procedimiento que las plantas de producción siguen para la obtención de los gases derivados del aire
Proceso de Fabricas

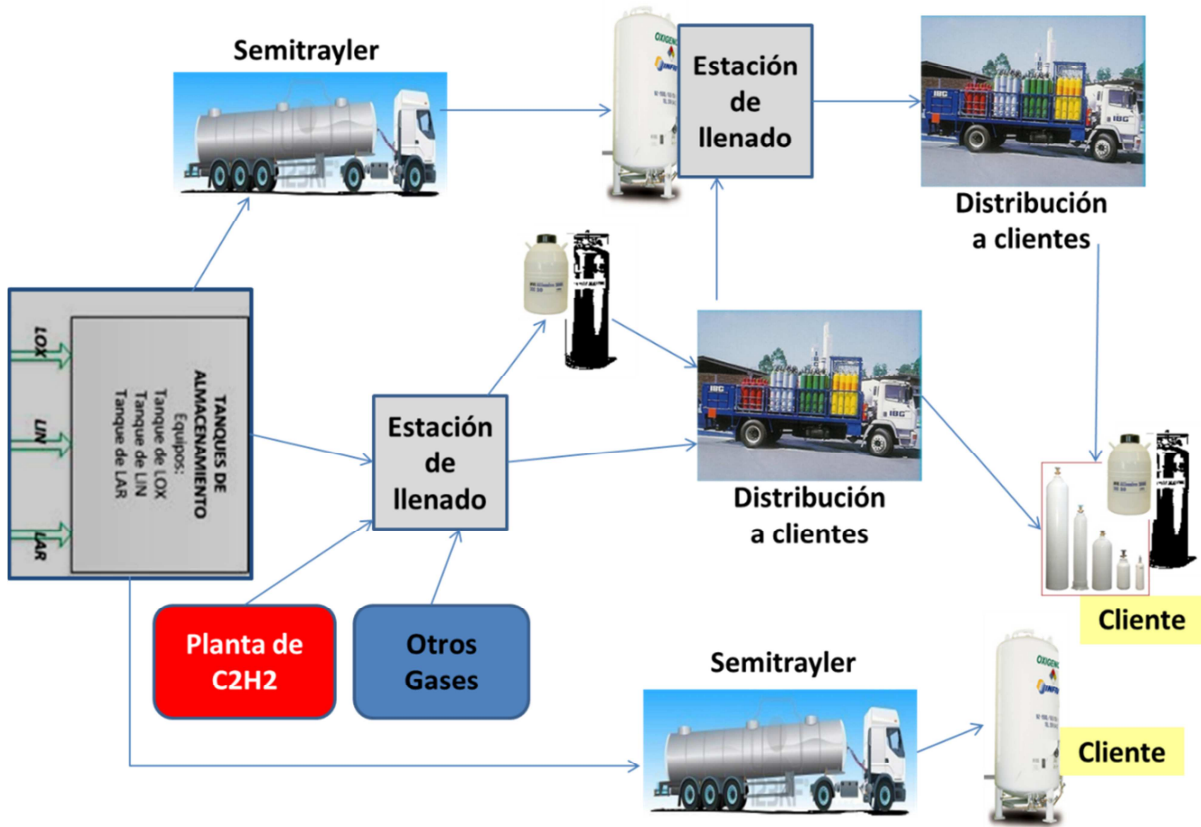


El producto obtenido se lo debe transportar a los clientes y usualmente se utilizan 2 formas de hacerlo:

1. Distribución Líquido
2. Distribución Gaseosa

En la Figura II se resumen los procesos para la distribución de gases tanto a clientes como a estaciones de llenado, en cada uno de ellos se debe activar el RFID como paso requerido para que el sistema funcione. Es usual que las plantas de producción de gases del aire incluyan otros gases como complemento del mercado, ese es el caso del Acetileno (C_2H_2) y de gases para aplicaciones especiales y mezclas.

FIGURA. II
los procesos para la distribución de gases tanto a clientes como a
estaciones de llenado
Proceso de Distribución



La seguridad de los cilindros se ve afectada por el procedimiento que se utiliza para el reparto y atención a los clientes. El ciclo de movimiento de cilindros inicia desde el momento en que se prepara el parque para el llenado y termina en cuanto regresan del punto de consumo que usualmente es el cliente de gases del aire. La Figura 3 ilustra el ciclo del cilindro y presenta los puntos relevantes en donde se registra el movimiento con el lector de RFID para analizar su logística:

1. Recepción de Pedidos.- centro de servicios recibe los pedidos o llama a clientes. Registra sus necesidades.
2. Preparación de Ruta.- logística utiliza la información de:
 - a. Rutas óptimas de tránsito de la ciudad
 - b. Ordenanzas municipales de circulación
 - c. Direcciones de clientes
 - d. Datos de camiones calificados
 - e. Prioridades de clientes
3. Preparación del parque de cilindros.- en base a la disponibilidad, se organizan los cilindros para el llenado:
4. Los propios para identificar los de la empresa productora, identificados con el número de serie único para identificación.
5. Los de otros propietarios a los cuales se necesita llevar el control de la numeración por la trazabilidad.
6. Los almacenados en bloque o grupo, son cilindros de otros propietarios que no requieren de trazabilidad y el serial no es necesario.
7. Los cilindros nuevos son aquellos que recién van a iniciar su trabajo, por lo tanto aún no están registrados en el ciclo de proceso.
8. Llenado de cilindros.- producción recibe los cilindros vacíos, los clasifica y agrupa de acuerdo a las necesidades y procede con el llenado. Si bien se pueden llenar todos los cilindros al mismo tiempo, se recomienda hacerlo de acuerdo a la clasificación previa.
9. Problemas en llenado.- Los cilindros que por alguna causa, no pueden ser llenados se los separa y se los envía a la probadora para su recuperación o baja del parque de cilindros.
10. Despacho de cilindros:
11. Los cilindros pueden ser despachados a los clientes en camiones propios a través de la Ruta de Camiones preparada previamente con los pedidos e incluyen entre la documentación la Guía correspondiente.
12. El camión puede llevar cilindros libres para ser intercambiados en el camino sin que haya existido un pedido previo, a eso

se llaman cilindros en contingencia. Para ellos se debe preparar una Guía itinerante.

13. Existe además la posibilidad que el cliente se acerque a la rampa a retirar su producto sin necesidad de contratar el transporte.
14. Los cilindros que llevan productos medicinales, se deben registrar con los números seriales de manera que permita la trazabilidad.
15. La entrega a los Clientes se realiza con un documento de intercambio de cilindros en el que se registra el número serial del cilindro lleno que se entrega y el número serial del cilindro vacío que se recibe. Este documento es importante porque además de registrar el propietario del cilindro, permite conocer la estadística de rotación que se analizará posteriormente.
16. Es necesario un documento de Novedades en Ruta, de cuya existencia el cliente conoce y el chofer debe poner a disposición del cliente para registrar observaciones que luego permitirán mejoras del procedimiento de trabajo.
17. Al retornar el camión, se solicita al guardia el conteo de cilindros. Debe ser instruido para que lleve el control de movimiento de cilindros tanto a la salida como al retorno de la ruta.
18. Es necesario, habilitar los RFID de cada cilindro al retorno de los camiones. Todo cilindro debe entrar y salir de las instalaciones debidamente identificados.
19. Los documentos de ruta se deben entregar al retorno para el cuadro y registro de novedades.
20. Los cilindros vacíos en buen estado se preparan para el llenado.
21. Los cilindros vacíos en mal estado se preparan para el ingreso a la probadora.
22. Es una buena medida implementar la Inspección aleatoria en Ruta que debe hacer el responsable del control de cilindros.
23. Los choferes, ayudantes y personal que prepara la Ruta de Camiones deben conocer las Leyes y Ordenanzas de Circulación, donde se indiquen los horarios y avenidas por las cuales pueden transitar los vehículos.

5. RESULTADOS

El proceso de producción, distribución y atención a clientes con cilindros de alta presión y controlado con RFID, descrito en este documento, garantiza un servicio eficiente, con costos mínimos, a un precio reducido. La forma de control y trazabilidad ofrece estándares de seguridad de acuerdo a las normas del país y se

logra la entrega en el tiempo adecuado. En este artículo hemos desarrollado un Sistema de Administración de Cilindros de alta presión que nos permite controlar tanto los de uso privado del cliente, como los de las empresas comercializadoras.

El software desarrollado sigue las siguientes políticas:

1. Entrega de cilindros llenos Cpropio por cilindros vacíos Cpropio.
2. Entrega de cilindros llenos Cpropio por vacíos del cliente Cpartic, con firma de responsabilidad, de que se los recibe para el llenado, porque son legalmente de su propiedad y con el compromiso que les serán devueltos.
3. Préstamo y/o arriendo con garantía bancaria o póliza de seguro.
4. Control de inventario de cilindros Cpropio en el cliente y si él lo desea, control de inventario de los cilindros que tiene el cliente Cpartic.

5. Es necesario disponer de un parque de cilindros para rotación con clientes y distribuidores que no acceden al control de su inventario Cbloque.
6. Inventario diario de cilindros: cuadre físico vs registro de movimientos realizado por la empresa al ingreso y/o egreso de los cilindros de las instalaciones.

El Control del inventario de cilindros de alta presión es independiente entre la empresa comercializadora y el parque de propiedad del cliente, tanto el que corresponde a Cpartic como el que corresponde a Cbloque. La diferencia entre los dos parques es que en el primero es imprescindible tener la trazabilidad por ser para uso medicinal y el segundo solo se controla para que su rotación sea eficiente.

Si los cilindros retornan por otra vía que no sea la del mismo cliente, no afecta su inventario, solo el balance entre propios y particulares.

Ejemplo de un reporte de control de este programa, realizado en una corrida del Sistema de Administración de Cilindros es como sigue:

TABLA. I
reporte de control de este programa, realizado en una corrida del Sistema de Administración de Cilindros
Resultados numéricos

<i>Fecha</i>	<i>Inventario Cliente</i>			<i>CLI-999</i>				<i>CLI-998</i>
	<i>Cilindro Cpropio</i>	<i>Cilindro Cpartic</i>	<i>Total</i>	<i>Entrega Cpropio</i>	<i>Entrega Cpartic</i>	<i>Recepción Cpropio</i>	<i>Recepción Cpartic</i>	<i>Recepción Cpropio</i>
1	10	5	15	6		6		
2	10	5	15	5	2	4	3	
3	11	4	15		4		2	
4	11	6	17	4		5		
5	10	6	16					1
6	9	7	16	6			6	
7	15	1	16	3			1	
8	18	0	18	2				
9	20	0	20					2
10	18	2	20	4			4	
11	22	-2	20					

Se puede observar en la Figura 4, que el sistema permite controlar con el Documento de Intercambio, la propiedad y ubicación de los cilindros, sea que los retorne el cliente usando los camiones de la comercializadora o a través de terceros.

Este sistema asegura la trazabilidad exigida para gases de uso medicinal.

Los dispositivos electrónicos RFID permiten los inventarios diarios porque pueden leer hasta 240 cilindros automáticamente con cada barrida. Esta cantidad es suficiente para los vehículos que circulan dentro y fuera de la ciudad.

6. CONCLUSIONES

1. El Sistema de Administración de Cilindros de alta presión es una solución informática y de control válido para la seguridad en el manejo de los cilindros que se encuentran en el mercado.
2. Los gases medicinales que requieren de la obtención de Buenas Prácticas de Manufactura previo a la obtención del Registro Sanitario, pueden basar sus procesos en el control que proporciona este sistema.

3. Los RFID permiten los registros suficientes para el control y administración de los cilindros que transportan gases medicinales.
4. La rotación de cilindros y el uso adecuado de ellos, se logra con uso de este sistema de administración.
5. Este sistema ha sido probado y validado por empresas comercializadoras y distribuidoras de cilindros.

7. RECOMENDACIONES

1. Este modelo debería ser implementado en empresas que se encuentran laborando bajo estándares de seguridad y calidad vigentes para los gases de uso medicinal, de acuerdo no solo a las leyes ecuatorianas, sino a las normas internacionales.
2. El Sistema de Administración de Cilindros de alta presión es una herramienta desarrollada particularmente, que debe ser mejorada continuamente, y adecuada a las características de cada empresa comercializadora.
3. Es necesario exigir nuevas regulaciones que eviten la rotación de cilindros para garantizar la seguridad de los usuarios.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **ASAMBLEA NACIONAL, E. (2008).** LEY ORGÁNICA DE TRANSPORTE TERRESTRE, TRÁNSITO Y SEGURIDAD. Montecristi, Manabí, Ecuador: Suplemento del Registro Oficial 398.
2. **LUIS A. D'ANGELO, D. R. (ABRIL DE PRIMERA EDICIÓN 2011).** Unicef. Obtenido de Unicef: http://www.unicef.org/argentina/spanish/clima_conflicto_violencia_escuelas.pdf.
3. **M.I. CONCEJO CANTONAL, G. (2001).** ORDENANZA DE CIRCULACIÓN DEL CANTÓN GUAYAQUIL. Guayaquil, Ecuador: Diario El Universo 010322-242.
4. **MERCADO, S. D. (2011).** LEY ORGÁNICA DE REGULACIÓN Y CONTROL DEL PODER DE MERCADO. Quito, Ecuador: Registro Oficial Suplemento 555.
5. **MUY ILUSTRE MUNICIPALIDAD, G. (12 DE 07 DE 2013).** Vías – Áreas de Restricción Carga Descarga. Guayaquil, Guayas, Ecuador.
6. **NORMALIZACIÓN, I. E. (1984).** IDENTIFICACIÓN DE CILINDROS QUE CONTIENEN GASES INDUSTRIALES. Quito: Registro Oficial No. 92.
7. **NORMALIZACIÓN, I. E. (1995).** CILINDROS PARA GASES DE ALTA PRESIÓN. REVISIÓN. Quito: Registro Oficial No. 793.
8. **NORMALIZACIÓN, I. E. (2010).** TRANSPORTE, ALMACENAMIENTO Y MANEJO DE MATERIALES PELIGROSOS. REQUISITOS. Quito: Registro Oficial No. 107.
9. **REPÚBLICA, P. C. (2012).** Reglamento General para la Aplicación de la Ley Orgánica de Transporte Terrestre, Tránsito y Seguridad Vial. Quito, Ecuador: Registro Oficial N° 731.
10. **TORRES, C. (2012).** 11-91 Ecuador LOX1500 PID-Model . Guayaquil: MEGAPRINT.
11. **VASQUEZ, M. (22 DE OTUBRE DE 2010).** Eroski Consumer. Obtenido de Eroski Consumer: <http://www.consumer.es/web/es/educacion/escolar/2010/10/22/196660.php>.

LA TRAZABILIDAD DE LOS GASES PARA USO MEDICINAL Y SU EFECTO EN LA EFICIENCIA DE LA ROTACIÓN DE CILINDROS

Fernández Ronquillo Jorge¹

Resumen. La trazabilidad es un estándar que tiene correspondencia con ciertas referencias definidas a través de una cadena de suministros. También se la puede definir como un sistema de procedimientos que proporciona la ubicación, la historia y el recorrido de un producto en una cadena de distribución. Estos sistemas de control permiten al productor mejorar y optimizar sus procesos, se incluyen en los sistemas de certificación de calidad y es obligatorio en las buenas prácticas de manufactura para laboratorios farmacéuticos, en especial cuando se detecta un producto defectuoso y es obligatorio y urgente retirar todo el lote del mercado. En este artículo se presenta un sistema de control que permite registrar los movimientos de los cilindros de alta presión que transportan gases medicinales desde que salen de la fábrica, hasta que regresan y retornan al ciclo productivo. El sistema consta de dos grupos de programas, el primero operativo para asegurar la trazabilidad y el segundo de soporte, útil para aquellos administradores que tienen intenciones de mejorar y optimizar los recursos, tomando en cuenta que el peso de la trazabilidad no debe disminuir la agilidad del despacho ni aumentar los tiempos de producción. Se designa a los grupos con el nombre de: Control de Rotación de Cilindros y Trazabilidad; y, Reportes de Gestión y Seguimiento.

Palabras Claves: Trazabilidad, Eficiencia de cilindros, control de cilindros, rotación, gases medicinales.

Abstract: Traceability is a standard that has correspondence with certain references which are defined through a chain of supplies. It can also be defined as a system of procedures that give the location, history, and trail of a product in a distribution chain. These control systems allow the producer to improve and optimize the processes, they are included in the quality certification systems, and it is mandatory in the good practice of manufacture for pharmaceutical laboratories, especially when a faulty good is detected and it is an urgent obligation to remove the entire lot from the market. In this article a control system that allows registering the movement of the high pressure cylinders that transport medicinal gas since they leave the factory until they return and restart the productive cycle will be presented. The system consists of two groups of programs, the first one is operative to ensure the traceability, and the second one is supportive, useful for those managers with the intention of improving and optimizing the resources, considering that the weight of traceability should not diminish the agility of dispatching, nor raise the production time. These groups have been called: Traceability and Cylinder Rotation Control, Management and Monitoring Reports.

Keyword: Traceability, Cylinders efficiency, Cylinders control, Air gases, Rotation, Medicinal gas.

Recibido: Enero 2015.

Aceptado: Marzo 2015.

1. INTRODUCCIÓN

La trazabilidad es una exigencia que favorece a los consumidores, desde el punto de vista sanitario y se exige en casi todos los países. La Organización Internacional para la Estandarización (ISO) la define como "La propiedad del resultado de una medida o del valor de un estándar donde este pueda estar relacionado con referencias especificadas, usualmente estándares nacionales o internacionales, a través de una cadena continua de comparaciones todas con incertidumbres especificadas."

Según el Comité de Seguridad Alimentaria de AECOC: "Se entiende como trazabilidad aquellos procedimientos preestablecidos y autosuficientes que permiten conocer el histórico, la ubicación y la trayectoria de un producto o lote de productos a lo largo de la cadena de suministros en un momento dado, a través de unas herramientas determinadas."

Las Buenas Prácticas de Manufactura de productos medicinales, exigen la trazabilidad

para todos los insumos, medicamentos, fármacos y otros que pueden ser administrados a los seres humanos.

En definitiva, la trazabilidad son acciones y procedimientos que permiten identificar y ubicar el producto desde que nace hasta que llega al consumidor. Si bien esto genera muchos beneficios para el usuario, puede ser motivo de encarecimiento del producto. En este documento se presenta el análisis de un sistema de control de trazabilidad que además de ser aplicable, amortiza su costo con los beneficios de mejorar la rotación de los cilindros de alta presión

Base teórica de trazabilidad

Los archivos ILE de trazabilidad encapsulada son los encargados de contener, transmitir y compartir la trazabilidad. Pueden contener la historia completa de cualquier producto, de acuerdo con las exigencias de las legislaciones internacionales en cuanto a trazabilidad. Estos archivos se pueden procesar con el software libre iEANWriter 2.0 e iEAN Reader 2.0.

El término trazabilidad es definido por la Organización Internacional de Estándares ISO, en su International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology Como: La Propiedad del resultado de una medida o del

¹ Profesor de la Universidad Laica Vicente Rocafuerte de Guayaquil, Departamento de Investigación Científica (e-mail: jfernandezr@ulvr.edu.ec)

valor de un estándar donde este pueda estar relacionado con referencias especificadas, usualmente estándares nacionales o internacionales, a través de una cadena continua de comparaciones todas con incertidumbres especificadas.

Actualmente es imprescindible ser competitivo en un mercado globalizado. No se deben perder oportunidades de negocio cumpliendo al mismo tiempo la obligatoriedad de las normativas nacionales y mundiales. Esta información es necesaria para entregar productos específicos a mercados concretos con la garantía de determinar con exactitud el origen y la historia. La trazabilidad está asociada a procesos productivos y productos de calidad.

Hoy existe la tecnología para rastrear con precisión el camino que recorre un producto en la cadena productiva y de comercialización. La integración de Internet, redes de comunicación, acceso inalámbrico, software especializado, dispositivos móviles, GPS entre otros, hacen realidad la idea de poder detectar el punto exacto y el momento donde se produjo un evento. Esta consiste en la capacidad para reconstruir la historia, recorrido o aplicación de un determinado producto, identificando: el origen de sus componentes, la historia de los procesos, la distribución y ubicación después de su entrega. Sin embargo no incluyen en los algoritmos el envase y tampoco se preocupan de la eficiencia.

El resultado del algoritmo desarrollado y que se presenta en este artículo está escrito en Microsoft .net, un ambiente amigable en donde no existe la necesidad de múltiples compiladores, ni código que deba ser administrado y tampoco hay la necesidad de integración con terceros. El sistema utiliza Office Automation, que permite interactuar con office Excel, Word y PowerPoint. Además posee interface gráfica. Utiliza SQL Server, motor de base de datos de alto rendimiento de Microsoft, que administra el almacén central de datos, funcionalmente automatizado.

Como aplicación de software, el sistema es escalable. Cumple los requerimientos de hardware y configuración de red recomendados, se puede ajustar a un número significativo de usuarios, sin degradación en el tiempo de respuesta.

2. MÉTODO TÉCNICO DEL SISTEMA DE TRAZABILIDAD Y EFICIENCIA EN LA ROTACIÓN DE CILINDROS DE ALTA PRESIÓN

Uno de los principales requerimientos del sistema desarrollado para la trazabilidad, es que los cilindros de alta presión posean un dispositivo de rastreabilidad, el mismo que puede ser un Radio-Frequency Identification (RFID), Código de Barra o el bidimensional Quick Response code (QR).

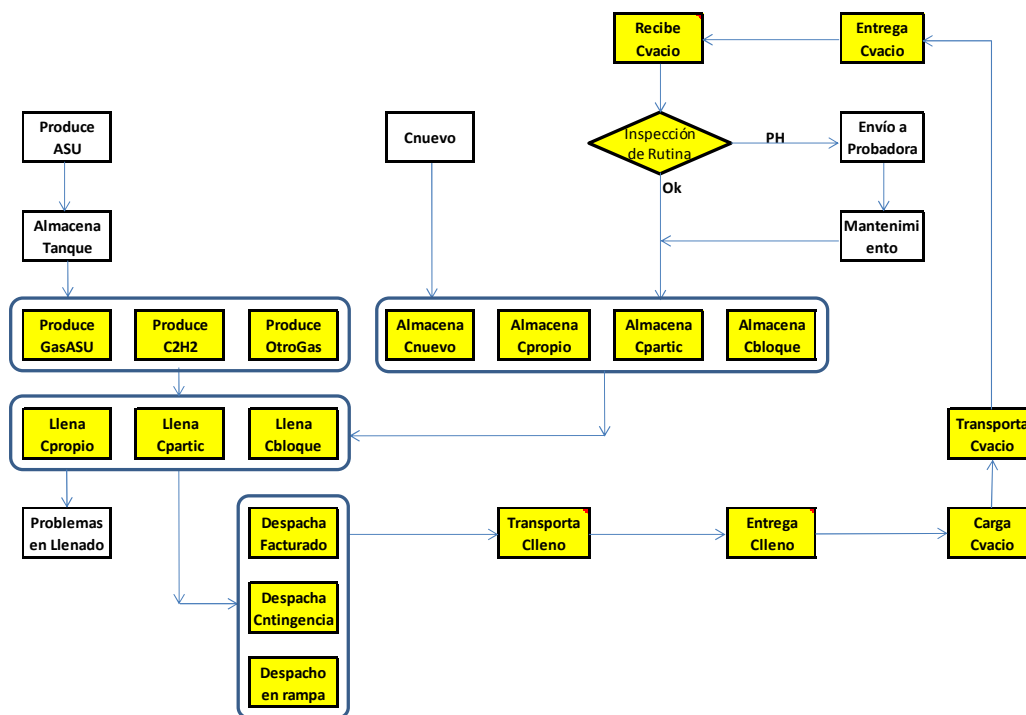
Estos dispositivos permiten detectar y registrar los movimientos de los cilindros en el camino que recorren desde que sale lleno de fábrica, hasta que regresa vacío.

Los puntos claves de registro para el ingreso de la información son:

- Selección de cilindros
- Llenado de cilindros
- Despacho del producto
- Salida a cliente
- Transporte cilindro lleno
- Entrega en cliente
- Transporte cilindro vacío
- Retorno a fábrica
- Inspección y/o prueba

La Figura I ilustra el ciclo usual de proceso de cilindros de alta presión, con los puntos claves de registro de información.

FIGURA. I
Ciclo usual de proceso de cilindros de alta presión, con los puntos claves de registro de información
Ciclo de proceso de cilindros de alta presión



3. RESULTADOS

Los informes técnicos para el control de los cilindros se clasifican en dos grupos. Uno netamente operativo para el control del personal que permite asegurar la trazabilidad necesaria y obligatoria para quienes trabajan con productos medicinales; y el otro para los administradores y gerentes que realizan funciones de control y seguimiento que optimizan los recursos. Estos grupos son:

1. Control de Rotación de Cilindros y Trazabilidad

2. Reportes de Gestión y Seguimiento

Control de Rotación de Cilindros y Trazabilidad

Hace referencia al control de los cilindros desde cuatro puntos de vista:

1. **Estático.**- contiene los datos referenciales que necesitan las probadoras de cilindros para garantizar el buen funcionamiento y

seguridad, la Tabla I indica los datos que tiene registrada la unidad de mantenimiento de los cilindros para garantizar el buen funcionamiento y operación segura de los gases de alta presión. Los datos Número y RFID/QR/CB están relacionados, deben ser leídos con el equipo lector automáticamente en cada punto clave de registro. El Tipo Gas y Color del Cilindro están relacionados de acuerdo a los requerimientos de las normas de seguridad del país. La Presión de Trabajo WP y la Capacidad en litros permiten conocer la capacidad en metros cúbicos del cilindro. Los datos de Propietario y Fecha de prueba, se registran previo al retorno a las instalaciones. Los otros datos son técnicos y se refieren a taras, elongaciones, material, normas internacionales, colores, tapas y nombres que registra la probadora durante el mantenimiento de los cilindros.

TABLA. I
Registro de la unidad de mantenimiento de los cilindros
Datos fijos de los cilindros de alta presión

Datos Fijos del Cilindro										
Número	9999999	Propietario	Empresa	F.Próxima Prueba	diciembre/2017	Color Anillo	Gris			
Material	Aluminio/Acero	Fabricante	Fábrica	Tipo Gas	Oxígeno	Tipo de válvula	540			
DOT	3A/3AA	Capacidad lt	40	Color Cil	Verde	Tipo de Tapa	Fija			
Norma	Americana/Europea	Tara Kg	54	EVT	0,95	Evaludador	FN			
WP bares	200	Fecha Fabricación	diciembre/2012	EVP	0,98	Rechazado S/N	N			
TP bares	300	Fecha Prueba	diciembre/2012	RFID/QR/CB	123452145598614	Observaciones	Para rotación			

2. **Dinámico.-** Son datos de movimientos de cilindros, que permiten conocer en donde se encuentran y cuál ha sido el trabajo al que se han expuesto los cilindros. Este control permite obtener la trazabilidad del producto

medicinal. Con este control que se ilustra en la Tabla 2, se puede conocer exactamente donde se encuentra un cilindro, su número del lote de llenado y la historia de la logística del cilindro

TABLA. II
Ubicación de cilindros su número del lote de llenado y la historia de la logística del cilindro
Datos dinámicos de los cilindros de alta presión - trazabilidad

Datos Dinámicos de Cilindros																		
Desde:	domingo, 01 de enero de 2012				Hasta:	martes, 01 de mayo de 2012				Número Envase:	9999999							
	Llenado		Tipo de gas	Carga m3-kg	Lote de Llenado	Patio	Distribución		No. De Camión	Ruta		Cliente	Retorno		No. De Camión	Cliente	PH	
	Ingreso	Egreso					Ingreso	Egreso		Ingreso	Egreso		Ingreso	Egreso			Ingreso	Egreso
1	02-ene	03-ene	O2	6	123456	03-ene	06-ene	07-ene	5	07-ene	07-ene	DIS124	25-ene	26-ene	5	DEP02	27-ene	30-ene
2	30-ene	30-ene	O2	6	123478	30-ene	30-ene	30-ene	4	30-ene	30-ene	CLI025	18-feb	18-feb	GLL0961	CLI025		
3	18-feb	19-feb	O2	6	123789	19-feb	22-feb	24-feb	GKE0680	25-feb	25-feb	DIS111	25-feb	25-feb	8	CLI232	26-feb	27-feb
4	28-feb	28-feb	Ar	6	123951	28-feb	01-mar	01-mar	6	01-mar	01-mar	CLI0351						

3. **Rotación por cliente.-** Permite controlar la cantidad de cilindros que tienen los clientes, propios y de la comercializadora. Esa información se compara con el promedio de compras mensuales para obtener la rotación. Los valores se tabulan en forma mensual comparativa y se usan formatos condicionales para poder visualizar la eficiencia de los cilindros y determinar los que se encuentran por encima y por debajo del promedio requerido.

La Tabla III presenta los datos considerando cilindros de 6 y 10 metros cúbicos, que se hacen extensibles a cualquier capacidad. No se han considerado las presiones a las que pueden trabajar, porque solo interesan las unidades y capacidades equivalentes. Los semáforos ubicados en la fila de rotación, facilitan reconocer los periodos en que los cilindros han tenido un uso eficiente y los que han permanecido sin trabajar.

TABLA. III
 Datos considerando cilindros de 6 y 10 metros cúbicos
 Datos de rotación de cilindros por clientes

		ROTACION POR CLIENTE												
Nombre cliente	CLI026	NN												
Tipo de gas	O2													
		ene	feb	mar	abr	may	jun	jul	ago	sep	oct	nov	dic	2013
Compra	m3	240	240	210	270	300	390	360	420	330	420	360	420	3960
Inventario Propio	Cil 6	20	20	20	20	20	20	25	25	25	30	30	30	23,75
	Cil 10	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2	2	2	2,25
Inventario Cliente	Cil 6	15	15	15	15	30	30	30	30	30	30	30	30	25,00
	Cil 10													
Inventario Total	Cil 6	35	35	35	35	50	50	55	55	55	60	60	60	48,75
	Cil 10	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2	2	2	2,25
Equivalente de 6 m3														
Compra		40,00	40,00	35,00	45,00	50,00	65,00	60,00	70,00	55,00	70,00	60,00	70,00	660,00
Inventario		38	38	38	38	53	53	60	60	60	63	63	63	53
Rotación mes		1,04	1,04	0,91	1,17	0,94	1,22	1,00	1,17	0,92	1,11	0,95	1,11	1,05
Rotación año														12,57

4. **Rotación por cilindro.**- Permite controlar el trabajo del cilindro y proporciona información de la cantidad de veces que ha sido llenado por mes, el tiempo que ha permanecido detenido sin producir y el tiempo que realmente ha trabajado. El estilo

de formato condicional permite apreciar los meses en que los cilindros han sido utilizados con mayor o menor eficiencia. La Tabla 4 muestra el valor de rotación con la eficiencia del cilindro.

TABLA. IV
 El valor de rotación con la eficiencia del cilindro.
 Datos de rotación de cilindros

Numero envase	9999999													
Estándar	1,05	Cargas por mes												
		ene	feb	mar	abr	may	jun	jul	ago	sep	oct	nov	dic	2013
No. Cargas		2	1	3	2	2	0	1	0	1	2	0	1	15
Días en Fábrica		16	25	31	10	9	15	21	0	15	11	22	16	191
Días en Cliente		15	3	0	20	22	15	10	31	15	20	8	15	174
		31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	365
Tiempo del Envase en Fábrica		52%	89%	100%	33%	29%	50%	68%	0%	50%	35%	73%	52%	52%
Tiempo del Envase en cliente		48%	11%	0%	67%	71%	50%	32%	100%	50%	65%	27%	48%	48%
Eficiencia		1,91	0,95	2,86	1,91	1,91	0,00	0,95	0,00	0,95	1,91	0,00	0,95	1,19











4. REPORTES DE GESTIÓN Y SEGUIMIENTO

Los reportes de gestión y seguimiento son: consolidados por rotación, por eficiencia y por cliente; cada uno de ellos representa información que la administración debe valorizar adecuadamente, en especial porque a la empresa le interesan sus activos, sus clientes y la utilidad que puede obtener.

1. Consolidado por rotación.- es una tabla distribuida en quintiles, donde el administrador puede analizar del total de sus clientes (en este ejemplo 142), cuales son los que mejor rotación tienen (15 de ellos) y a

donde debe dirigir sus esfuerzos para optimizar el uso de los cilindros (los 12 peores). El sistema tiene la facilidad de poder identificar individualmente a cada cliente ubicados en los quintiles, los datos obtenidos pueden servir para premiar por consumo o hacer recargos por mal uso de los cilindros. Usualmente los clientes pagan un arriendo mensual y ese valor podría manejarse enlazado con la rotación calculada, de manera que los 2 mejores quintiles sean beneficiados con exoneraciones de pago. La Tabla V muestra un ejemplo de rotación





















TABLA. V
Ejemplo de rotación
Datos de rotación de cilindros

Consolidado por rotación de cilindros			
Quintiles	No. Clientes	Rotación	
		Desde	Hasta
1	12	 0.00	 0.24
2	25	 0.24	 0.49
3	39	 0.49	 0.73
4	51	 0.73	 0.98
5	15	 0.98	 1.22
Total Clientes	142		

2. Consolidado por eficiencia.- la Tabla VI indica el comportamiento de un mercado de 10.000 cilindros. Se puede determinar cuales se encuentran trabajando y cuales están inactivos. Se debe decidir sobre reinsertarlos al mercado o retirarlos del cliente para reducir sus costos. En el ejemplo hay 333 cilindros que han sido sobrellenados entre 2.58 y 2,86 veces por mes. Se observan en cambio 727 cilindros que han sido llenados

entre 0.00 y 0.29 veces por mes, lo que indica que han permanecido inactivos. Los datos del sistema pueden ser analizados consultando el detalle del grupo de cilindros con problemas de rotación. La administración debe utilizar métodos de despacho que eviten daños tempranos por el exceso de uso o que se malogren por el abandono.









TABLA. VI
Comportamiento de un mercado de 10.000 cilindros
Consolidado por rotación de cilindros

Consolidado por Eficiencia de Cilindros			
Deciles	No. Cilindros	Eficiencia	
		Desde	Hasta
1	727	 0.00	 0.29
2	939	 0.29	 0.57
3	803	 0.57	 0.86
4	545	 0.86	 1.15
5	1215	 1.15	 1.43
6	1365	 1.43	 1.72
7	1630	 1.72	 2.00
8	1409	 2.00	 2.29
9	1032	 2.29	 2.58
10	333	 2.58	 2.86
No. Cilindros	10000		

3. Consolidados por cilindros.- La Tabla 7 es un ejemplo de un cliente que posee 44 cilindros, donde 8 de ellos tienen una rotación baja y 5 son sobrellenados. Esta herramienta facilita la decisión sobre que

cilindros se deben retirar del cliente para optimizar su parque y reducir sus costos. El formato condicional permite apreciar la diferencia que existe entre el 1er y el 4to cuartil.

TABLA. VII
Ejemplo de un cliente que posee 44 cilindros
Consolidado por cilindros

Consolidado por Cilindros en Cliente			
Código		Nombre	
CLI-999		NN	
Cuartiles	No. Cilindros	Rotación	
		Desde	Hasta
1	8	 0.00	 0.30
2	12	 0.30	 0.61
3	19	 0.61	 0.91
4	5	 0.91	 1.22
No. Cilindros	44		

5. CONCLUSIONES

1. El Sistema de Trazabilidad y Eficiencia de Rotación de Cilindros de Alta Presión es una solución informática para la trazabilidad requerida por las certificadoras de calidad y los entes reguladores del sistema público de salud.
2. Los reportes de control de rotación y trazabilidad permiten conocer el estado estático y dinámico de los cilindros.
3. Los reportes de gestión y seguimiento facilitan el manejo de los cilindros y permiten mejorar la eficiencia de los cilindros.
4. Este sistema ha sido probado y validado por empresas comercializadoras y distribuidoras de cilindros.

6 RECOMENDACIONES

1. Este sistema debería ser usado por empresas que se encuentran bajo normas de Buenas Prácticas de Manufactura para Laboratorios Farmacéuticos.
2. El Sistema de Trazabilidad y Eficiencia de Rotación de Cilindros de Alta Presión, es una herramienta, que debe ser mejorada continuamente, y adecuada a las características de cada empresa comercializadora.
3. Es necesario exigir nuevas regulaciones que faciliten la trazabilidad de cilindros para garantizar la seguridad de los usuarios de gases medicinales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **ASAMBLEA NACIONAL, E. (2008).** LEY ORGÁNICA DE TRANSPORTE TERRESTRE, TRÁNSITO Y SEGURIDAD. Montecristi, Manabí, Ecuador: Suplemento del Registro Oficial 398.
2. **M.I. CONCEJO CANTONAL, G. (2001).** *ORDENANZA DE CIRCULACIÓN DEL CANTÓN GUAYAQUIL.* Guayaquil, Ecuador: Diario El Universo 010322-242.
3. **Mercado, S. d. (2011).** *LEY ORGÁNICA DE REGULACIÓN Y CONTROL DEL PODER DE MERCADO.* Quito, Ecuador: Registro Oficial Suplemento 555.
4. **MINISTERIO DE SALUD PÚBLICA, E. (2013).** Reglamento de Buenas Prácticas de Manufactura (BPM) para Laboratorios Farmacéuticos. Quito: Registro Oficial No. 889.
5. **MUY ILUSTRE MUNICIPALIDAD, G. (12 DE 07 DE 2013).** Vías – Áreas de Restricción Carga Descarga. Guayaquil, Guayas, Ecuador.
6. **NORMALIZACIÓN, I. E. (1984).** IDENTIFICACIÓN DE CILINDROS QUE CONTIENEN GASES INDUSTRIALES. Quito: Registro Oficial No. 92.
7. **NORMALIZACIÓN, I. E. (1995).** CILINDROS PARA GASES DE ALTA PRESIÓN. REVISIÓN. Quito: Registro Oficial No. 793.
8. **NORMALIZACIÓN, I. E. (2010).** TRANSPORTE, ALMACENAMIENTO Y MANEJO DE MATERIALES PELIGROSOS. REQUISITOS. Quito: Registro Oficial No. 107.
9. **REPÚBLICA, P. C. (2012).** Reglamento General para la Aplicación de la Ley Orgánica de Transporte Terrestre, Tránsito y Seguridad Vial. Quito, Ecuador: Registro Oficial N° 731.
10. **TORRES, C. (2012).** 11-91 Ecuador LOX1500 PID-Model . Guayaquil: MEGAPRINT.
11. **VASQUEZ, M. (22 DE OTUBRE DE 2010).** Eroski Consumer. Obtenido de Eroski Consumer: <http://www.consumer.es/web/es/educacion/escolar/2010/10/22/196660.php>

CORRELACIÓN POLICÓRICA EN EL ANÁLISIS DE FACTORES CON VARIABLES ORDINALES

Ramos Barberán Miriam¹, Plata Alarcón Wendy²

Resumen En este artículo se presenta la explicación del cálculo de las correlaciones policóricas a partir de variables ordinales. Para el efecto, se construyen variables latentes a partir de las ya observadas, estas variables definen umbrales en el dominio de distribuciones normales, con las cuales se calculan las correlaciones. Bajo estas condiciones, se ilustra una aplicación del uso de las correlaciones policóricas en el análisis de factores exploratorio para identificar los grupos de variables que influyen en la satisfacción al cliente del Departamento de Postgrado en una universidad.

Palabras claves: variables ordinales, análisis de factores, correlaciones tetracóricas, correlaciones policóricas, máxima verosimilitud.

Abstract. This paper shows an explanation of the polychoric correlation calculus from ordinal data. For this purpose, latent variables are created from observe ones, these variables define thresholds in the normal distribution domain, which are used to calculate the correlations. Based on those conditions, we shall illustrate the polychoric correlation applied to exploratory factor analysis for identifying a set of variables that affect customer satisfaction in the Postgraduate Department of a university.

Keywords: ordinal variable, factors analysis, tetrachoric correlation, polychoric correlation, maximum likelihood.

Recibido: Enero 2015.

Aceptado: Febrero 2015.

1. INTRODUCCIÓN

El uso de las variables ordinales se ha generalizado ampliamente en las ciencias sociales, específicamente en la medición de la percepción de los informantes respecto a determinada realidad, tal es el caso de la Psicología al estudiar el comportamiento humano de manera cualitativa, así como también, la Investigación de Mercado al aplicar cuestionarios para medir el grado de satisfacción de los clientes. En el presente artículo, se explora la utilización de la correlación policórica en el análisis de factores con datos ordinales considerando correlaciones de variables subyacentes a las observadas, con las que se espera obtener una mayor explicación de la varianza de los datos.

2. METODOLOGÍA

En este trabajo se inició con la revisión de los métodos utilizados en el análisis de factores a partir de datos ordinales, lo cual condujo a descubrir la importancia de una adecuada estimación de la correlación en este tipo de estudios. En este sentido, se tomó como punto de partida la correlación tetracórica propuesta por Pearson en 1901 para variables dicotómicas; culminando con la respectiva generalización para variables politómicas, que es la denominada correlación policórica. Se presenta la explicación de un método para la estimación del coeficiente de correlación policórica, mediante la maximización de la función de verosimilitud de la muestra, donde

¹Ramos Miriam MPC Profesora Departamento Matemáticas, Facultad Ciencias Naturales y Matemáticas ESPOL (e-mail: mramosb@espol.edu.ec), Guayaquil.

²Plata Wendy MPC Profesora Departamento Matemáticas, Facultad Ciencias Naturales y Matemáticas ESPOL (e-mail: wplata@espol.edu.ec), Guayaquil.

en primera instancia se estimaron los umbrales de las variables latentes que siguen una distribución normal estándar y luego se calculó la correlación.

Finalmente, con los datos del Estudio Transversal de Satisfacción al Cliente del Departamento de Postgrado de una universidad, realizado por Plata [1], se calcularon las correspondientes correlaciones de Pearson y Policóricas para identificar diferencias entre ellas; y, se comparó el porcentaje de la variabilidad explicada en el análisis de factores.

3. VARIABLES ORDINALES Y ANÁLISIS DE FACTORES

El uso de variables ordinales es muy común para medir percepción respecto a diferentes circunstancias de ámbito social, siendo así que pueden definirse categorías con la finalidad de graduar la calificación del informante respecto a su satisfacción frente a determinada característica. Para el efecto, se estila usar escalas que asignan valores enteros a cada categoría, tales como la escala de Likert, véase Tabla I.

TABLA I:

Se estila usar escalas que asignan valores enteros a cada categoría, tales como la escala de Likert
Categoría de Variables Ordinales

Nada satisfecho	Poco satisfecho	Indiferente	Satisfecho	Muy satisfecho
1	2	3	4	5

Bajo este mismo esquema se puede definir un gran conjunto de variables a ser analizadas de forma univariada y multivariada, donde para el

caso último la técnica estadística frecuentemente usada es el análisis factorial cuyo objetivo es reducir la redundancia entre las variables empleando un pequeño número de factores [2]. Olsson [3] mostró que la aplicación del análisis de factores con datos discretos puede conducir a inferencias erróneas respecto al número de factores y a estimaciones sesgadas de las cargas de los factores, lo cual se atribuye a la estimación sesgada de las correlaciones.

4. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN POLICÓRICA

Con el propósito de resolver el problema identificado por Olsson respecto a la estimación sesgada de las correlaciones en el análisis de factores, se introduce el estudio de la correlación policórica que parte del supuesto que existen variables no observables (latentes) de naturaleza continua, normalmente distribuidas, sobre las cuales se han construido variables ordinales observables, cuyas opciones de respuesta se corresponden con umbrales en el dominio continuo de las latentes, este tipo de correlación es usada en análisis de factores que involucre variables puramente ordinales según Richaud [4].

Sean x e y dos variables ordinales cuyas opciones de respuesta (categorías) están dadas por r y s respectivamente; y, sean ξ y η las correspondientes variables latentes normales bivariadas, bajo estas condiciones, los umbrales en el dominio continuo se definen como sigue, Olsson [5]:

Para x :

$$\begin{aligned} x = 1 & \text{ si } \xi < a_1 \\ x = 2 & \text{ si } a_1 \leq \xi < a_2 \\ x = 3 & \text{ si } a_2 \leq \xi < a_3 \\ x = 4 & \text{ si } a_3 \leq \xi < a_4 \\ & \vdots \\ x = s & \text{ si } a_{s-1} \leq \xi \end{aligned}$$

Para y :

$$\begin{aligned} y = 1 & \text{ si } \eta < b_1 \\ y = 2 & \text{ si } b_1 \leq \eta < b_2 \\ y = 3 & \text{ si } b_2 \leq \eta < b_3 \\ y = 4 & \text{ si } b_3 \leq \eta < b_4 \\ & \vdots \\ y = r & \text{ si } b_{r-1} \leq \eta \end{aligned}$$

Siendo a_i y b_j los umbrales de las variables ordinales x e y , respectivamente, tal que:

$$a_0 = b_0 = -\infty \quad a_s = b_r = +\infty$$

Con las variables ordinales se construye una Tabla de Contingencia, que consiste en un arreglo rectangular de $s \times r$ celdas, donde cada una de ellas representa las frecuencias observadas para la distribución conjunta de las variables x e y , a partir de las cuales subyacen las variables latentes ξ y η con sus respectivos umbrales a_i y b_j , véase TABLA II.

TABLA II:
Consiste en un arreglo rectangular de $s \times r$ celdas
Tabla de Contingencia

		y										
		1	b_1	2	b_2	3	b_3	4	b_4	\dots	b_{r-1}	r
x	1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}							n_{1r}
	2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}							n_{2r}
	3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	n_{34}							n_{3r}
	4	n_{41}	n_{42}	n_{43}	n_{44}							n_{4r}
	\vdots											
	a_{s-1}											
	s	n_{s1}	n_{s2}	n_{s3}	n_{s4}							n_{sr}

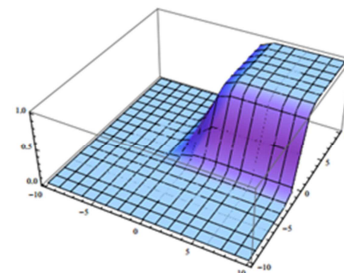
El problema a resolver consiste en calcular la correlación policórica ρ como una medida de la relación lineal entre las variables latentes ξ y η . Esta correlación constituye una generalización de la correlación tetracórica introducida por Pearson en 1901 [6], para tablas de contingencia de orden 2×2 . En este sentido, la correlación policórica ρ es una medida que se obtiene a partir de la distribución acumulada normal bivariada:

Exp. (1)

$$\Phi(h, k; \rho) = \left[2\pi(1-\rho^2) \right]^{-1} \int_{-\infty}^h \int_{-\infty}^k e^{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}} dx dy$$

A manera de ilustración de Exp. (1) se presenta la FIGURA I.

FIGURA I:
Distribución Acumulada Normal Bivariada $\Phi(10,10; 0.5)$



Según Zurita [7], a la distribución conjunta de una muestra se la considera como una función de parámetros de la población, denominada Función de Verosimilitud de la Muestra, la cual en general se utiliza para la estimación de los parámetros que identifican a una población. Considerando las frecuencias ilustradas en la TABLA II y teniendo como propósito la estimación de la correlación policórica ρ y de los umbrales a_i y b_j , la función de verosimilitud de la muestra para este caso particular está dada por:

Exp. (2)

$$L = C \cdot \prod_{i=1}^s \prod_{j=1}^r \pi_{ij}^{n_{ij}}; i = 1, 2, 3, 4, \dots, s; j = 1, 2, 3, 4, \dots, r$$

$$L = C \cdot (\pi_{11}^{n_{11}})(\pi_{12}^{n_{12}})(\pi_{13}^{n_{13}})(\pi_{14}^{n_{14}}) \dots (\pi_{sr}^{n_{sr}})$$

Donde, C es una constante, n_{ij} representa la frecuencia observada en la celda ubicada en la i -ésima fila y j -ésima columna; mientras que, π_{ij} es la probabilidad de que una observación caiga en la antes referida celda, tal que:

Exp. (3)

$$\pi_{ij} = \Phi_2(a_i, b_j) - \Phi_2(a_{i-1}, b_j) - \Phi_2(a_i, b_{j-1}) + \Phi_2(a_{i-1}, b_{j-1})$$

En Exp. (3) Φ_2 corresponde a la distribución acumulada normal bivariada con correlación ρ . A fin de facilitar la manipulación de las expresiones matemáticas, comúnmente se aplica el logaritmo natural a ambos miembros en Exp. (2), con lo cual se obtiene:

Exp. (4)

$$l = \ln L = \ln C + \ln[(\pi_{11}^{n_{11}})(\pi_{12}^{n_{12}})(\pi_{13}^{n_{13}}) \dots (\pi_{sr}^{n_{sr}})]$$

$$l = \ln C + n_{11} \ln(\pi_{11}) + n_{12} \ln(\pi_{12}) + n_{13} \ln(\pi_{13}) + \dots + n_{sr} \ln(\pi_{sr})$$

$$l = \ln C + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r n_{ij} \ln(\pi_{ij})$$

Siendo Exp.(4) la expresión generalizada que resulta de la aplicación de logaritmos a la función de verosimilitud de la muestra.

Con el fin de determinar los valores de los parámetros ρ , a_i y b_j , que maximizan la función de verosimilitud, se procede a derivar parcialmente Exp. (4) con respecto a ρ y a igualar esta derivada a cero.

Exp. (5)

$$\frac{\partial l}{\partial \rho} = 0$$

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \frac{n_{ij}}{\pi_{ij}} [\phi_2(a_i, b_j) - \phi_2(a_{i-1}, b_j) - \phi_2(a_i, b_{j-1}) + \phi_2(a_{i-1}, b_{j-1})] = 0$$

La expresión (5) depende de la función de densidad normal bivariada con correlación ρ , que a su vez proviene de la derivada de la distribución acumulada Φ_2 .

Debido a la complejidad de los cálculos al estimar simultáneamente todos los parámetros, se recurre a un método en cual en primera instancia se estiman los umbrales a_i y b_j , a partir de las marginales proporcionadas por la Tabla de Contingencia (TABLA III), donde $n = n_{11} + n_{12} + \dots + n_{sr}$; P_i corresponde a la suma de las frecuencias de la i -ésima fila dividida para n ; y, P_j es la suma de las frecuencias de la j -ésima columna dividida para n . Los umbrales a_i y b_j representan los percentiles de la Distribución Acumulada Normal Estándar, Martinson, E. & Hamdan, M. [8].

Exp. (6)

$$a_i = \Phi_1^{-1}(P_i)$$

Exp. (7)

$$b_j = \Phi_1^{-1}(P_j)$$

TABLA III:

Tabla de Contingencia – Marginales

		y						
		1	2	3	4	\dots	r	
x	a_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	\dots	n_{1r}	$P_{1.}$
	a_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	\dots	n_{2r}	$P_{2.}$
a_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	n_{34}	\dots	n_{3r}	$P_{3.}$	
a_4	n_{41}	n_{42}	n_{43}	n_{44}	\dots	n_{4r}	$P_{4.}$	
\dots								
\dots								
a_{i-1}	n_{s1}	n_{s2}	n_{s3}	n_{s4}	\dots	n_{sr}	$P_{s.}$	
		$P_{.1}$	$P_{.2}$	$P_{.3}$	$P_{.4}$	\dots	$P_{.r}$	

Una vez estimados los umbrales, para calcular el coeficiente de correlación policórica ρ , se resuelve el sistema de ecuaciones generado por Exp. (5) a través de métodos numéricos que se implementan en software computacionales.

5. CORRELACIÓN DE PEARSON VS. CORRELACIÓN POLICÓRICA

El análisis de factores tiene como insumo la matriz de correlaciones de las variables a ser investigadas. Tal como se explicó en la sección 3 del presente artículo, al trabajar con variables ordinales pueden surgir errores en la estimación de los factores y sus cargas, por tal motivo, en este apartado se utiliza la matriz de correlación policórica en el análisis factorial de variables ordinales diseñadas para medir la satisfacción al cliente en el Departamento de Postgrado de una universidad del Ecuador. Para el efecto se definió una escala de Likert de 1 a 5, donde el cliente debió ordenar su respuesta respecto a su grado de satisfacción en cuanto a diferentes aspectos o dimensiones, véase TABLA IV.

TABLA IV:

Aspectos, variables y factores

Aspectos/Dimensiones	Variables ordinales	Factores a extraer
Responsabilidad de la alta dirección	14	3
Gestión de Recursos	12	3
Prestación de Servicios – Aspectos resaltados por Profesores	8	3
Prestación de Servicios – Aspectos resaltados por Estudiantes	8	3
Análisis y Mejora	5	1

Se aplicó un análisis de factores exploratorio a las dimensiones mostradas en la TABLA IV, con la finalidad de identificar un número reducido de variables que caractericen a cada uno de los aspectos considerados; con este fin, se tomó como punto de partida la matriz de correlación policórica.

La antes referida matriz fue calculada en el software estadístico R usando el comando “hetcor” de la librería “polycor”; y, paralelamente se realizó el análisis de factores usando la matriz de correlación de Pearson con el objetivo de evidenciar diferencias entre los porcentajes de varianza explicada para cada dimensión, véase TABLA V.

TABLA V:

Porcentaje de Varianza Explicada

Dimensiones	Correlación Policórica	Correlación de Pearson
Responsabilidad con la Dirección	68,90%	64,20%
Gestión de Recursos	76,20%	71,50%
Prestación del Servicio - Aspectos resaltados por Profesores	73,70%	69,70%
Prestación del Servicio - Aspectos resaltados por Estudiantes	76,70%	73,60%
Análisis y Mejora	64,40%	60,30%

De la TABLA V se deduce que las correlaciones policóricas difieren de las de Pearson en cuanto al porcentaje de varianza explicada en el análisis factorial, esto se debe a que las correlaciones policóricas son más altas por ser calculadas en base a variables latentes normales bivariadas.

Para ilustrar esta última afirmación se muestran las comparaciones entre correlaciones de cuatro variables correspondientes a la dimensión Relación con la Alta Dirección. Véase TABLA VI.

TABLA VI:

Correlaciones Policóricas y de Pearson

CORRELACIONES POLICÓRICAS				
Variables	Marco Legal	Malla Curricular	Duración del Programa	Contenido de Materias
Marco Legal	1			
Malla Curricular	0,487	1		
Duración del Programa	0,269	0,621	1	
Contenido de Materias	0,396	0,735	0,594	1

CORRELACIONES DE PEARSON				
Variables	Marco Legal	Malla Curricular	Duración del Programa	Contenido de Materias
Marco Legal	1			
Malla Curricular	0,438	1		
Duración del Programa	0,247	0,567	1	
Contenido de Materias	0,340	0,673	0,544	1

Para todos los casos de la TABLA VI la correlación policórica resultó mayor a la de Pearson. Como se observa las diferencias no son significativamente grandes para los datos analizados; sin embargo, la aplicación de la correlación policórica en el análisis de factores con variables ordinales evidenció ganancias en el porcentaje de explicación de la varianza, lo cual resulta beneficioso para este tipo de estudios.

6. DISCUSIÓN

Tal como sostiene Olsson [3], en el análisis de factores se puede cometer errores en la estimación de las correlaciones, siendo uno de ellos la subestimación de dichas correlaciones, como se evidenció con el objeto de estudio práctico de este artículo, cuando al calcular las correlaciones de Pearson, éstas resultaron menores que las correlaciones policóricas, las mismas que en el análisis de factores afectaron positivamente en el incremento de la explicación de la variabilidad de los datos.

Aun cuando el método de estimación de máxima verosimilitud analizado en este trabajo demanda exigentes cálculos matemáticos, el uso de un lenguaje de programación como R reduce significativamente el tiempo y complejidad de las estimaciones propuestas por Martinson, E. & Hamdan, M. [8].

7. CONCLUSIONES

Al trabajar con datos que involucren variables que responden a un tipo de escala ordinal, tal como la escala Likert, resulta esencial en el análisis factorial el uso de correlaciones policóricas a fin de obtener el máximo porcentaje de explicación de la varianza.

A nivel de resultados se evidenció que el cálculo de las correlaciones policóricas sugiere, en general, mejores estimaciones que las de Pearson.

La intención final de este artículo ha sido promover entre los investigadores interesados en estudiar variables de índole psicométrico la incorporación del uso de las correlaciones policóricas en sus metodología de análisis estadístico de datos con la finalidad de robustecer las estimaciones efectuadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

- [1] **PLATA, W. (2014)**. “Diseño de un Sistema de Gestión de la Calidad para un Departamento de Postgrado”, ESPOL, Guayaquil-Ecuador.
- [2] **RENCHE, A. (2002)**. “Methods of Multivariate Analysis”, Segunda Edición, John Wiley & Sons Inc., USA.
- [3] **OLSSON, U. (1979)**. “On the robustness of factor analysis against crude classification of the observations”. *Multivariate Behavioral Research*, 14, 485-500.
- [4] **RICHAUD, M.C. (2005)**. “Desarrollos del análisis factorial para el estudio de ítem dicotómicos y ordinales”. *Revista Interdisciplinaria*, 22(2), 237-251.
- [5] **OLSSON, U. (1979)**. “Maximum likelihood estimation of the polychoric correlation coefficient”. *Psychometrika*, 44, 443-460.
- [6] **PEARSON, K. (1901)**. “Mathematical contributions to the theory of evolution. VII. On the correlation of characters not quantitatively measurable”. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 195, 1–47.
- [7] **ZURITA, G. (2008)**, “Probabilidad y Estadística: Fundamentos y Aplicaciones”, Primera Edición, Escuela Superior Politécnica del Litoral, Guayaquil, Ecuador.
- [8] **MARTINSON, E. O. & HAMDAN, M. A. (1975)**. “Calculation of the polychoric estimate of correlation in contingency tables”. *Applied Statistics*, 24, 272-278.

CONTENIDO

EDITORIAL.....	5
SERGEI SOBOLEV, CÁLCULO DEL SIGLO XX Y LAS DERIVADAS DE FUNCIONES GENERALIZADAS	
Bustamante Johni, Ángel Acosta Acosta.....	6
EN BÚSQUEDA DE DINÁMICAS DE APLICACIONES EN EL PLANO “ITERACIONES DE FUNCIONES REALES CUADRÁTICAS EN EL PLANO”	
Córdova Nelson.....	11
LA ADMINISTRACIÓN DE CILINDROS DE ALTA PRESIÓN Y SU IMPACTO EN LA ATENCIÓN A LOS USUARIOS DE GASES DEL AIRE COMPRIMIDO	
Fernández Jorge.....	20
LA TRAZABILIDAD DE LOS GASES PARA USO MEDICINAL Y SU EFECTO EN LA EFICIENCIA DE LA ROTACIÓN DE CILINDROS	
Fernández Jorge.....	29
CORRELACIÓN POLICÓRICA EN EL ANÁLISIS DE FACTORES CON VARIABLES ORDINALES	
Ramos Miriam, Plata Wendy.....	37