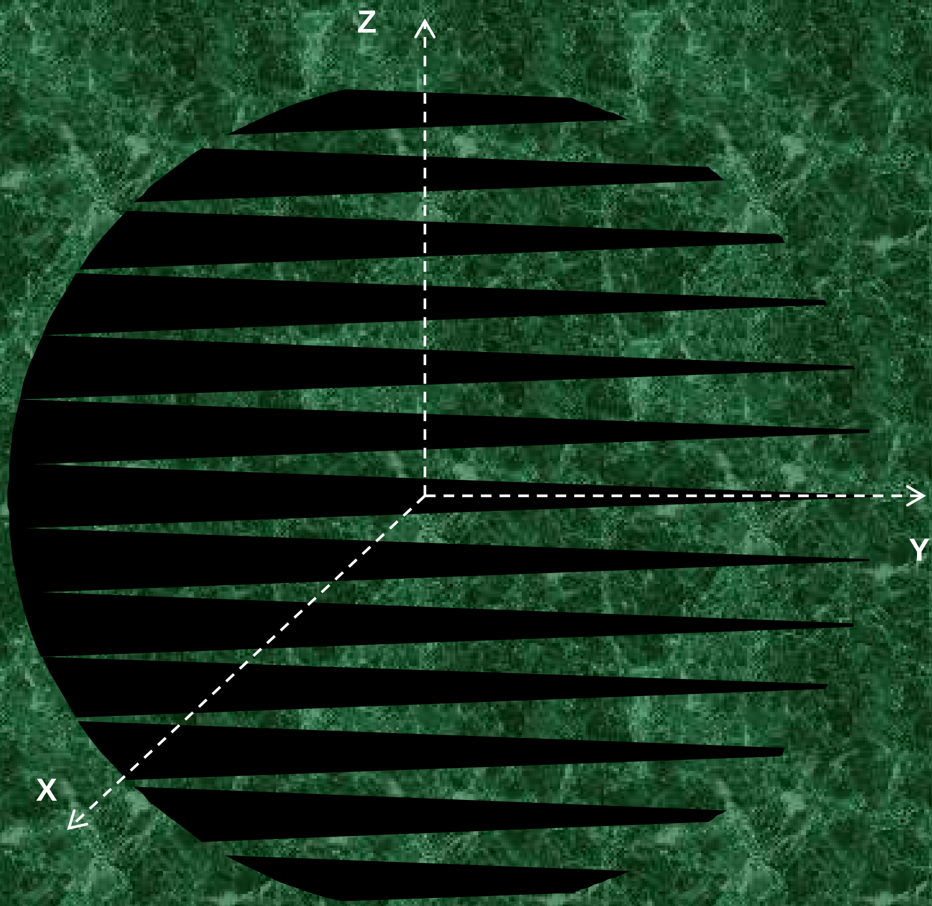
ISSN Nº 1390 - 3802

matemática

UNA PUBLICACIÓN DE FCNM - ESPOL

Volumen 12 Número 1 Abril 2014



Escuela Superior Politécnica del Litoral - ESPOL
Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas - FCNM

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

El Departamento de Matemáticas (DM) es una unidad académica de la ESPOL. Desde el inicio la función del DM ha sido la docencia en Matemáticas, Ciencias Gráficas e Informática, para la formación de profesionales en ingeniería, tecnología y ciencias, habiendo tenido a su cargo en los albores de la ESPOL, el dictado de 10 materias. Con el transcurso del tiempo y acorde con la era de la información, el Departamento de Matemáticas creó en mayo de 1995 la carrera de "Ingeniería en Estadística Informática", como alternativa en ingeniería en información y servicios. Posteriormente, con el fin de garantizar la eficiencia en el control y gestión empresarial con profesionales capacitados y de excelencia se creó la carrera de "Auditoría y Control de Gestión" en mayo de 2000. También el Departamento ha incursionado en una de las más importantes ramas de la matemática aplicada que tiene grandes aplicaciones en el mundo moderno, esto es la Investigación de Operaciones, la Teoría de Optimización, y particularmente las aplicaciones logísticas, a través del ofrecimiento de programas de pre-grado y post-grado en estas áreas. Así es como desde el año 2005 se viene ofreciendo la maestría en Control de Operaciones y Gestión Logística y desde el año 2006 la carrera de Ingeniería en Logística y Transporte.

El DM también cuenta con el CENTRO DE INVESTIGACIONES ESTADÍSTICAS, a través del cual, se realizan: estudios de predicción, estudios actuariales, estudios de mercado, diseños de experimentos, planificación y dirección de censos, análisis financieros, bases de datos estadísticos, formulación de proyectos, ingeniería de la calidad, etc.

Entre otras actividades que desarrolla el DM anualmente están: las JORNADAS EN ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA que actualmente está en su decimoséptima versión, el CONCURSO INTERCOLEGIAL DE MATEMÁTICAS que se viene realizando en forma contínua desde 1988.

FCNM
Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Más información: www.icm.espol.edu.ec o escribirnos al e-mail: icm@espol.edu.ec, jvaldi@espol.edu.ec, erivaden@espol.edu.ec, 30 ½ vía Perimetral: Edificios 25 – B Planta alta
Telfs.: (593-4) 2269525 – 2269526, fax: (593–4) 853138.
Guayaquil – Ecuador

matemática

UNA PUBLICACIÓN DE LA FCNM – ESPOL

Volumen 12 **Número 1** **Abril 2014**

Rector ESPOL:	**M.Sc. Sergio Flores**
Vicerrectora General ESPOL:	**Ph.D. Cecilia Paredes**
Decano FCNM:	**M.Sc. Gaudencio Zurita Herrera**
Subdecano FCNM:	**M.Sc. Oswaldo Valle Sánchez**
Directora Departamento de Matemáticas:	**M.Sc. Janet Valdiviezo**
Director Departamento de Física:	**M.Sc. Hernando Sánchez**
Director Departamento de Química:	**M.Sc. Oswaldo Valle Sánchez (a.i.)**
Editor de publicaciones:	**M.Sc. Eduardo Rivadeneira Molina**
Comité Editorial:	**M.Sc. Efrén Jaramillo Carrión**
	Ph.D. David Matamoros
	M.Sc. Luis Rodríguez Ojeda
	Ph.D. Francisco Vera
Asesores Editoriales:	**Ph.D. Joseph Páez Chávez**
	Ph.D. (c). Sandra García Bustos
	Ph.D. Olga González Sánchez
	Ph.D. Justo Huayamave Navarrete
	Mg. Eva María Mera Intriago
	Mg. María Nela Pastuizaca
	Ph.D. Fernando Sandoya Sánchez
	M.Sc. Francisco Torres Andrade
	Ph.D. (c) Antonio Chong Escobar
Edición:	**Srta. Carolina Carrasco Salas**

matemática es una publicación del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Escuela Superior Politécnica del Litoral, y pretende constituirse en un órgano de difusión científico – tecnológico, con el fin de incentivar y motivar el desarrollo y avance de la matemática y sus aplicaciones.

matemática publica artículos teóricos y de tipo experimental tales como ensayos, resúmenes de tesis de grado y trabajos de investigación relacionados con la aplicación de la matemática en los diferentes ámbitos de la realidad.

CONTENIDO

EDITORIAL

Los idiomas de la Ciencia antes de la Segunda Guerra Mundial eran el Alemán, el Francés y el Inglés. Después de la Segunda Guerra Mundial el idioma Inglés de manera espontanea se convirtió en el idioma universal de la ciencia. Hoy en día esto se reconoce sin discusión alguna. Es así que, sin desmerecer la riqueza y belleza de nuestro idioma, deseamos invitar a los Investigadores y Científicos que nos honran con sus contribuciones, para que consideren la meta de escribir sus resultados y reflexiones en el idioma Inglés.

El objetivo de este esfuerzo es el de llevar los contenidos de la *Revista Matemática* a un más amplio número de lectores. Evidentemente esta empresa es un reto para quienes, la lengua inglesa no es su lengua nativa.

Los que hacemos la *Revista Matemática* agradecemos a todos los Científicos e Investigadores que nos han apoyado con su aporte intelectual en los últimos diez años.

***matemática*:** Una publicación de FCNM – ESPOL
2014, Vol. 12, No. 1

AN INFINITE-SERIES REPRESENTATION FOR FUNCTIONS IN DIFFERENTIABILITY CLASS C^{∞}

Abad Andrés G.[1]

Resumen. *La representación de funciones por medio de series al infinito encuentra aplicaciones en diferentes campos de las matemáticas y de la ingeniería. La más común de estas representaciones es la serie de potencias. En este trabajo se presenta una novedosa representación de funciones continuamente diferenciables mediante series al infinito y se estudia su convergencia. Adicionalmente, presentamos algunas aplicaciones, incluyendo una forma de representar a la función gamma por medio de series al infinito.*

Palabras Claves: Series infinitas, representaciones, series de potencias, series de Taylor, funciones suaves y función gamma.

Abstract. *Infinite-series representations find applications in many mathematical and engineering domains. The most common infinite-series representation is the power series. In this paper, we present a novel infinite-series representation of smooth functions and study its convergence. Additionally, we present applications, including an infinite-series representation of the gamma function.*

Keywords: Infinite-series, representation, power series, Taylor series, smooth functions, gamma function.

Recibido: Enero 2014
Aceptado: Febrero 2014

1. INTRODUCTION

Infinite-Series representation of functions find applications in many mathematical and engineering domains. For example, they are used in numerically computation of the values of functions or in estimating their behavior. Additionally, infinite-series representations are used in solving systems of differential equations.

The most common infinite-series representation of a function $f(x)$ is the power-series representation of the form

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i$$

for some values of c_i's, and a. It remains to find the values of *x* for which this representation is valid. It can be shown that if *f(x)* has a power series representation, then $c_i=\frac{f^{(i)}(a)}{i!}$, where $f^{(i)}(x)$ is the i^{th} derivative of $f(x)$. This representation is known as the Taylor series representation.

In this work, we propose a novel infinite-series representation for smooth functions and we study its convergence. It should be pointed out that the proposed series representation is, thus, not a power series. For the best of the author's knowledge, this infinite-series representation is presented here for the first time.

The rest of the paper is structured as follows. In Section II we present the main two theorems of this work. Section III provides illustrations of the proposed infinite-series representation and some of their applications. Finally, Section IV closes the paper providing the conclusions.

2. INFINITE-SERIES REPRESENTATION

A function $f(x)$ is said to be of class C^k if the derivatives $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), \dots, f^{(k)}(x)$ exists and are continuous. Note that the continuity of the k derivatives is automatic except for $f^{(k)}$. The function $f(x)$ is said to be of class C^{∞} or smooth it has derivatives of all orders. Furthermore, if $f(x)$ has derivative of all orders within the open interval (a,b) we say that $f(x)$ is smooth in (a,b) and write $(x)\in C^{\infty}(a,b)$.

We now present the main results of this paper.

Theorem 1: Let $f(x)$ be a function of class $C^{n+1}(a,b)$ and integrable in (a,b), then, there exists ξ in (a,b) such that

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{x^{i+1}}{(i+1)!}f^{(i)}(x)\Big|_{x=a}^{b}$$
$$+(-1)^{n+1}(b-a)f^{(n+1)}(\xi)\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!}$$

where $f^{(0)}(x)=f(x)$.

***Proof*:**
Define

$$F(y)=\int_a^y f(t)dt$$

[1] *Abad Andrés G., Ph.D., Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL). (e_mail: gabab@espol.edu.ec).*

and

$$S_n(y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f^{(i)}(t) \frac{t^{i+1}}{(i+1)!}\Big|_{t=a}^{y}$$

so that we can define

$$R_n(y) = F(y) - S_n(y).$$

Differentiating $R_n(y)$ with respect to y we have

$$R_n^{(1)}(y) = F^{(1)}(y) - S_n^{(1)}(y)$$

thus

$$S_n^{(1)}(y) = \sum_{i=0}^{n} \left[(-1)^i f^{(i)}(y) \frac{y^i}{i!} + (-1)^i f^{(i+1)}(y) \frac{y^{i+1}}{(i+1)!} \right]$$

so that

$$S_n^{(1)}(y) = f(y) + (-1)^n f^{(n+1)}(y) \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}$$

On the other hand, by the Fundamental Theorem of Calculus (see [1]) we have

$$F^{(1)}(y) = f(y).$$

Thus

$$R_n^{(1)}(y) = f(y) - \left[f(y) + (-1)^n f^{(n+1)}(y) \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} \right]$$
$$= (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(y) \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}$$

and

$$R_n(y) = (-1)^{n+1} \int_a^y f^{(n+1)}(x) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} dx$$

By the First Mean Value Theorem for Integration (see [1]) we have

$$R_n(y) = (-1)^{n+1} (y-a) f^{(n+1)}(\xi) \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!}$$

for some value ξ in (x, a). The term $R_n(y)$ is called the residual of the series after $n+1$ terms. ■

Theorem 2: Let $f(x)$ be a function in class $C^{\infty}$and integrable, then

$$\int f(x)dx = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} f^{(i)}(x) + C$$

Proof:

Since

$$R_n(y) = F(y) - S_n(y)$$

showing that

$$S_n(y) \to F(y) \text{as } n \to \infty$$

is equivalent to showing

$$R_n(y) \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

or

$$\lim_{i\to\infty} (b-a) f^{(n+1)}(y) \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

From the fact that for any y

$$e^y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^i}{i!}$$

we have

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y^i}{i!} = 0$$

On the other hand, since $f(y)$ is in class $C^{\infty}(a,b)$, then for every y in (a,b) we have that $f^{(i)}(y) < \infty$, and thus

$$\lim_{n\to\infty} (b-a) f^{(n+1)}(y) \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

which concludes the proof. ■

It should be noted that the infinite series representation introduced in *Theorem 2* can be considered as a linear combination in an infinite-dimensional functional space (see [2], [3]). We next provide some illustrations of applications of our proposed infinite-series representation.

3. ILLUSTRATIONS OF PROPOSED INFINITE-SERIES REPRESENTATION

In the first illustration we represent the exponential function with our proposed infinite-series. Then, we compute the value of a definite integral of a trigonometric function using our proposed infinite-series representation. Afterwards, the coefficients of the Fourier transform are obtained using our proposed infinite-series. Finally, a novel representation of the gamma function using our infinite-series representation is given.

A. Representing the exponential function

Consider the function$f(x) = e^x$. Based on *Theorem 2* we have

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} e^x + C_{e^x}$$

and thus,

$$\frac{e^x - C_{e^x}}{e^x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{i+1}}{(i+1)!}$$

where it can be shown that $C_{e^x} = 1$, for every x.

B. Computing a definite integral of a trigonometric function

We will now use our proposed representation to compute the value of $\int_0^{\pi/2} cos(x)dx$ using our proposed infinite-series representation.

$$\int_0^{\pi/2} cos(x)dx = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i cos^{(i)}(\pi/2)\frac{(\pi/2)^{i+1}}{(i+1)!} - \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i cos^{(i)}(0)\frac{(0)^{i+1}}{(i+1)!}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{2i+1}(-1)^{i+1}\frac{(\pi/2)^{(2i+1)+1}}{[(2i+1)+1]!}$$
$$= (-1)\left[\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(\pi/2)^{2i}}{(2i)!} - \frac{(\pi/2)^0}{0!}\right]$$
$$= (-1)cos(\pi/2) + 1 = 1$$

C. Obtaining the coefficients of a Fourier transform

We now use our proposed infinite-series representation to obtain the coefficients of a Fourier transform.

We know that any periodic function between -*L* and *L*, integrable within this interval and with a countable number of discontinuities can be represented by an infinite-series representation of sines and cosines of the form

$$f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i cos(i\pi t/L) + b_i sin(i\pi t/L)$$

where

$$a_0 = (2L)^{-1}\int_{-L}^{L} f(t)dt$$
$$a_i = L^{-1}\int_{-L}^{L} f(t)cos(i\pi t/L)dt$$
$$b_i = L^{-1}\int_{-L}^{L} f(t)sin(i\pi t/L)dt$$

Using *Theorem 2*, the Fourier coefficients are obtained as

$$a_i = (-1)^i(L)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(L/i\pi)^{2k+1}f^{(2k+1)}(t)\Big|_{-L}^{L}$$
$$b_i = (-1)^i(L)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(L/i\pi)^{2k+1}f^{(2k)}(t)\Big|_{-L}^{L}$$

D. Representing the gamma function

We now present a novel infinite-series representation of the gamma function based on our proposed representation.

Consider the gamma function $\Gamma(z)$, defined as

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

for $\in \mathbb{R}$.

We first set

$$f(t) = t^{z-1}e^{-t},$$

and observe that

$$f^{(i)}(t) = e^{-t}\left[\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{i}{k}\frac{(z-1)!}{(z-1-k)!}t^{z-1-k}\right]$$

Applying Theorem 2 we have the following gamma function representation

$$\Gamma(z) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{t^{i+1}}{(i+1)!}f^{(i)}(t)\Bigg|_{t=0}^{\infty}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{t^{i+1}}{(i+1)!}$$
$$e^{-t}\left[\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{i}{k}\frac{(z-1)!}{(z-1-k)!}t^{z-1-k}\right]\Bigg|_{t=0}^{\infty}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}\binom{i}{k}\frac{(z-1)!}{(i+1)(z-1-k)!}t^{z+i-k}e^{-t}\Bigg|_{t=0}^{\infty}$$

4. CONCLUDING REMARKS

In this work, we presented a novel infinite-series representation of smooth functions and proof two related theorems. The first theorem stated that an analytical function may be represented by the proposed series, while the second theorem studied its convergence. At the outset of the paper we presented different applications of the presented results including a gamma function series representation.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1]. **ANTON, H., DAVIS, S., & BIVENS, I. (1999).** Calculus: a new horizon. New York: Wiley.

[2]. **KREYSZIG, E. (1989).** Introductory functional analysis with applications (Vol. 81). New York: Wiley.

[3]. **RUDIN, W. (1991).** Functional analysis. International series in pure and applied mathematics.

***matemática*: Una publicación de FCNM – ESPOL
2014, Vol. 12, No. 1

INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA DE VALORES INICIALES Y DE FRONTERA DE LA ECUACION DE NAVIER - STOKES

Bustamante Johni[1]

Resumen. *En este artículo se presenta el siguiente contenido: los 7 problemas del milenio, estructura de la ecuación de Navier – Stokes, planteamiento del Problema Fundamental (PF) de Navier – Stokes, las funciones generalizadas, definición del PF según Leray – Hopf, solución débil del PF.*

Palabras Claves: Movimiento de fluidos, Ecuación de Navier – Stokes, proceso isocórico, Funciones Generalizadas, Espacios de Sobolev, Solución generalizada, funciones finitas, solución débil, definición de solución débil según Leray – Hopf..

Abstract. *This article presents the following content: 7 millennium problems, structure of the Navier - Stokes, Fundamental Problem approach (PF) Navier - Stokes, the generalized functions, definition of PF according Leray - Hopf weak solution.*

Keywords: Fluid motion, Navier - Stokes, isochoric process, Generalized Functions, Sobolev spaces, generalized solution, finite functions, weak solution, defined as Leray weak solution - Hopf..

Recibido: Febrero 2014
Aceptado: Marzo 2014

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo clásico o cálculo de Newton **-** Lebnitz, está imposibilitado de trabajar formalmente con elementos abstractos como la "función Delta de Dirac" o función impulso, la misma que es muy necesaria en los proceso físicos, entonces aparece en escena, la teoría de Distribuciones de Swartz basada en definiciones y espacios de Sergei Sobolev y solo así se tiene unos nuevos elementos abstractos llamados funciones generalizadas que permiten ampliar el conjunto de búsqueda de soluciones a problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.
Esta nueva visión, permite calcular soluciones en los espacios de funciones generalizadas, llamadas soluciones débiles, para esto se debe tener un conocimiento de Análisis funcional, es decir conocer muy bien los espacios funcionales, sus definiciones y sus propiedades.
El problema fundamental de Navier – Stokes, es abordado desde esta nueva visión, es decir su búsqueda se realiza en espacios funcionales tales como los espacios de Sobolev. En este trabajo presentaré la solución de Leray Hopf en un espacio funcional con ciertas propiedades y también la definición de la solución débil según Leray – Hopf, y seguido su solución detallada.

[1] *Bustamante Johni, Profesor, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL). (e_mail: jobustam@espol.edu.ec).*

Este problema tiene mucha relevancia en el mundo científico por cuanto es uno de los 7 problemas del milenio, y en la actualidad existe una gran comunidad científica trabajando entorno a estas ecuaciones.

2. LOS 7 PROBLEMAS DEL MILENIO

2.1 P versus NP

Inclusión en clases de complejidad, problemas que convergen en tiempo polinomial y problemas que no convergen en tiempo polinomial.

2.2. La conjetura de Hodge

Dice que: Para variedades algebraicas proyectivas los ciclos de Hodge son una combinación lineal racional de ciclos algebraicos.

2.3. La hipótesis de Riemann

Esta hipótesis dice que todos los ceros no triviales de la función zeta de Riemann tienen una parte real de ½.

2.4. Existencia de Yang – Mills y del salto de masa

En física la teoría cuántica de Yang-Mills describe partículas con masa positiva que poseen ondas clásicas que viajan a la velocidad de la luz. (Este es el salto de masa) El problema consiste en establecer la existencia de la teoría de Yang-Mills y un salto de masa.

2.5. Las ecuaciones de Navier – Stokes
En adelante detallaremos este problema, siendo el objetivo de este trabajo.

2.6. La conjetura de Birch y Swinnerton – Dyer
La conjetura trata sobre cierto tipo de ecuación que define curvas elípticas sobre los racionales. La conjetura dice que existe una forma sencilla de saber si estas ecuaciones tienen un número finito o infinito de soluciones racionales.

2.7. La conjetura de Poincare
Esta hipótesis fue resuelta por el ruso Gregori Perelman, por lo cual 6 problemas permanecen aún abiertos.

3. PROBLEMA FUNDAMENTAL (PF) DE NAVIER – STOKES

Las ecuaciones de Navier – Stokes describen el movimiento de un fluido newtoniano incompresible, fueron propuestas en 1822 por el ingeniero francés **Claude Louis Navier** (1785 - 1836) sobre la base de un modelo molecular adecuado, es interesante observar que la ley de la interacción entre las moléculas postulada por Navier fue poco reconocida por ser totalmente inconsistente desde el punto de vista físico de varios materiales en particular para los líquidos. No fue hasta más de veinte años después que las mismas ecuaciones se volvieron a deducir por **George Gabriel Stokes** (Irlanda 1819 - 1913) de 26 años de edad (1845) de una manera bastante general, por medio de la ecuación de continuidad.
El caso en el que el fluido es sometido a la acción de una fuerza $\boldsymbol{f}$, las ecuaciones de Navier – Stokes se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + v.\nabla v = \vartheta \Delta v + \nabla p + f \\ div\ v = 0 \end{cases} \qquad (0.1)$$

Donde $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ es el campo de velocidad evaluada en el punto $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}$ y en el tiempo $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{T}]$, $\boldsymbol{p}$ es el campo de presión, $\boldsymbol{\rho}$ es la densidad del fluido constante, y $\boldsymbol{\vartheta} > \boldsymbol{0}$ es el coeficiente de viscosidad cinemática. Finalmente, $\boldsymbol{\Omega}$ denota el correspondiente dominio geométrico donde las variables espaciales se están extendiendo. Por lo tanto, coincidirá con la región de flujo para movimientos tridimensionales ($\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$) mientras coincidirá con una región de dos dimensiones, en el caso de los flujos de avión ($\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$)
Para las ecuaciones **(0.1)** añadimos la **condición inicial**: *(Sin pérdida de generalidad, podemos tomar 0 como tiempo inicial)*

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{v_0}, \ \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}$$

Y la relación de frontera o condición de no deslizamiento.

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0}, \ \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\partial\Omega}, \qquad \mathbf{t} > \mathbf{0} \qquad (\mathbf{0.3})$$

El problema de Navier – Stokes consiste en determinar las soluciones $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{p}$ de las ecuaciones (sistema) que gobiernan el movimiento de un fluido newtoniano.

$$\text{PF:} \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + v.\nabla v = \vartheta \Delta v + \nabla p + f & (0.1) \\ \text{div}\ v = 0 & \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{v_0}, \ \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega} & (0.2) \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0}, \ \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\partial\Omega}, \qquad \mathbf{t} > \mathbf{0} & (0.3) \end{cases}$$

4. ESTRUCTURA DE LA ECUACION DE NAVIER – STOKES

La dificultad de este problema radica en la falta de "simetría" en el mencionado sistema (0.1)
Esta ecuación no cae en ninguna de las categorías clásicas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, a pesar de que, en cierto sentido, se podría considerar cerca de un sistema cuasi-lineal parabólico. Sin embargo, la dificultad básica relacionada al problema (0.1) - (0.3) se debe al efecto acoplado de la falta de simetría y de la presencia del término no lineal.
De hecho la formulación del problema sin la parte no lineal (0.1´):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + v.\nabla v = \nabla p + f \\ \text{div}\ v = 0 \end{cases} \quad (0.1´)$$

O sin la condición **isocórico** $div\ (v) = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v.\nabla v = \vartheta \Delta v + f \qquad (0.1")$$

Pueden ser completamente resueltos.

4.1. ¿Cómo abordar el problema PF de Navier – Stokes?
La comunidad científica ha presentado trabajos relacionados usando el cálculo no clásico, es decir desde el punto de vista de funciones generalizadas o funcionales lineales (también llamadas "**funcionales**").

4.2. ¿Por qué usar las funciones generalizadas y soluciones generalizadas?
Las soluciones generalizadas son también llamadas soluciones débiles.
Los funcionales se definen sobre espacios de funciones con producto interno y completo (conocidos como espacios de Hilbert H), y por tanto esto permite determinar el espacio de funciones en el cual se encuentra la solución.
Gracias al teorema de representación de Riesz, se sabe que: "A un funcional se le puede asociar en

forma única una función", y por tanto dicha función es la solución débil.

4.3.- ¿Por qué se llama solución débil?
Un funcional se define sobre un espacio de funciones (Espacio de Hilbert H) y es igual al producto interno:

$$\mathcal{L}_{u_k}(\varphi) = \langle u_k, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}_{u_k}(\varphi) \to \mathcal{L}_u(\varphi) \ \text{si y solo si} \ \langle u_k, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle,$$

Esto significa que $\int_\Omega u_k . \varphi \to \int_\Omega u.\varphi dx$,
Observamos que el funcional converge, pero la convergencia de la función la realiza a través de la integral y por eso se la llama convergencia débil.

5. DEFINICIONES NECESARIAS PRELIMINARES

5.1. Definición. Derivada material o sustancial.
Sea $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, campo de la velocidad, donde $v = v(x, y, z, t)$, es decir:

$$\begin{cases} v_x = v_x(x, y, z, t) \\ v_y = v_y(x, y, z, t) \\ v_z = v_z(x, y, z, t) \end{cases}$$, escribimos en forma lineal

$$v = v_x\, i + v_y\, j + v_z\, k$$

Operador $\frac{D(*)}{Dt} = \frac{\partial(*)}{\partial t} + (v.\nabla)(*)$, donde v es la velocidad del fluido. El primer término representa la variación de la propiedad en el punto fijo del espacio y por ello se la denomina derivada local, mientras que el segundo representa la variación de la propiedad asociado al cambio de posición de la partícula fluida, y se la denomina derivada conectiva. Aplicado al campo de velocidad tenemos:

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v$$

5.2. Definición de "Función Generalizada".
Llamaremos Funcional (Función generalizada) a la aplicación $\begin{array}{rccc} L: & H & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \to & L(\varphi) \end{array}$ donde H es un espacio Vectorial Normado de funciones (Espacio de Banach). En este punto es claro tener en cuenta que: Si un funcional es lineal y continúo entonces existe una función $f \in L_1(G)$ tal que $L(\varphi) = (f, \varphi)$, se expresa como producto interno. A este teorema se lo conoce como teorema de representación de Riesz.

También debemos tener claro que una función generalizada es un funcional lineal y continuo (Acotado). Y en adelante denotaremos a las funciones generalizadas por el nombre de la función en su representación como producto interno, es decir si $L(\varphi) = (f, \varphi)$, la denotamos $f = L(\varphi)$, Debemos tener cuidado, a veces podemos confundir la función clásica con el funcional.

5.3. Definición de "Derivada generalizada".
Sea f, g funciones localmente integrables según Lebesgue, esto es $f, g \in L_1(G)$ definidas en un subconjunto abierto $G \in \mathbb{R}^n$, y α multi-indice, La función g se llama derivada generalizada de orden α de la función f en el sentido de Sóbolev y la denotamos $D^\alpha f$ si para cualquier función $\varphi \in H$ se verifica:
$(g, \varphi) = (-1)^\alpha (f, D^\alpha \varphi)$, es decir $(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^\alpha (f, D^\alpha \varphi)$

5.4. Definición de $\boldsymbol{C^\infty(\mathbb{R}^n)}$.
Conjunto de las funciones infinitamente derivables en el dominio $\mathbb{R}^n$.

5.5. Definición de $\boldsymbol{C^{o,\infty}(\mathbb{R}^n)}$.
Conjunto de las funciones de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto, $Supp[\varphi(x)] = \overline{\{x,\ \varphi(x) \neq 0\}}$

5.6. Definición del espacio de funciones *D*.
Denotaremos D al conjunto de funciones $u = u(x)$ que cumplen las siguientes condiciones:

1.- $u \in C^{o,\infty}(\mathbb{R})$

2.- $\forall \{u_k\} \in C^{o,\infty}(\mathbb{R})$, existe un $R > 0$, $Supp(u_k) \subset B_R$, tal que: $u_k \to u \in D$

3.- $D^\alpha u_k \rightrightarrows D^\alpha u$

A estas funciones las llamaremos funciones finitas, otros autores la llaman funciones test, bajo condiciones más relajadas.

5.7.- Definición de "Espacios de Lebesgue".
A estos espacios los denotamos $L^q(\Omega)$, y es el conjunto de funciones integrables en el sentido de Lebesgue en Ω y norma:

$$\|f\|_q = \left(\int_\Omega |f|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

5.8. Definición de "Espacios de Sóbolev $\boldsymbol{W^{m,q}(\Omega)}$ ".
A estos espacios los denotamos $W^{m,q}(\Omega)$ y es el conjunto de todas las funciones f, $D^\alpha f$ del espacio $L^q(\Omega)$, $\alpha \leq q$, debemos tener en cuenta que $D^\alpha f$ es la derivada en el sentido de Sóbolev, y en este espacio se define la norma:

$$\|f\|_{W^{m,q}(\Omega)} = \|f\|_q + \sum_{i=1}^{m} \|D^{\alpha_i} f\|_q$$

5.9. Definición de "Campo Solenoidal".
Es un campo vectorial continuo en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, talque para cualquier región acotada $B \subset \Omega$ con frontera $\partial B \subset \Omega$ suave a trozos, y el flujo que atraviesa esta frontera es nulo.
Teorema 1.- Un campo vectorial continuo en una región es solenoidal si y solo si la divergencia en cada punto de esta región es cero.
$div(u) = 0$,
Sabemos que

$$div(u) = (\nabla . u) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

, donde $u = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$.

5.10. Definición de "Campo potencial".
Se dice que el campo $u = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$, es un campo potencial si y solo si existe una función f, talque $\nabla f = u,\ es\ decir \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$, a la función f , la llamaremos "función potencial"
Teorema 2.- Para que un campo continuo vectorial $u = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ en la región Ω sea campo potencial es necesario y suficiente que para cualquier contorno cerrado suave a trozos $\Gamma \subset \Omega$ su rotacional sea cero.

$$Rot \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \nabla \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0$$

5.11. Definición "Proceso Isocórico".
Un proceso isocórico, también llamado proceso isométrico o isovolumétrico, es un proceso termodinámico en el cual el volumen permanece constante; $\Delta V = 0$ (variación de volumen).
Esto implica que el proceso isocórico no realiza trabajo presión – volumen, ya que este se define como:

$$\Delta W = P . \Delta V = 0$$

6. SOLUCIÓN DÉBIL SEGÚN LERAY – HOPF

Sea Ω cualquier dominio en $\mathbb{R}^n$ y sea $T > 0$ Entonces, para cualquier $v_o \in H(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega_T)$, existe al menos una solución débil de (0.1)- (0.3) en Ω_T. $v \in H(\Omega)$ y $p(t) \epsilon L^2(\omega)$, $\forall\, t \in [0\ T)$, $\omega \subset \Omega$.
Esta solución verifica, además, las siguientes propiedades:
i) La desigualdad de la energía:

$$\|v(t)\|_2^2 + 2\vartheta \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_2^2 d\tau \leq 2 \int_0^t [(v(\tau), f(\tau)] d\tau + \|v_o\|_2^2 \ , \quad t \in [0, T]$$

ii) $\lim_{t \to 0} \|v(t) - v_o\|_2 = 0$.

6.1. Notación necesaria

- $L^q(\Omega)$ para este espacio su norma la denotaremos $\| \,.\, \|_q$, $1 \leq q \leq \infty$
- $W^{m,q}(\Omega)$ para este espacio su norma la denotaremos $\| \,.\, \|_{m,q}$
- $W^{0,q} \equiv L^q$,
- $W_o^{m,q}(\Omega)$, este espacio se define sobre el conjunto $C_o^\infty(\Omega)$ y su norma $\| \,.\, \|_{m,q\Omega}$
- $D(\Omega) = \{\psi \in C_o^\infty(\Omega):\ div(\psi) = 0\ en\ \Omega\}$
- $D(\Omega) = \{\varphi \in C_o^\infty(\Omega_T):\ div(\varphi) = 0\ en\ \Omega_T\}$
- $H_q = H_q(\Omega)$
- Debemos aclarar que el espacio H_q es la completitud de $D(\Omega)$
- $H_q(\Omega) = \{u \in L^q(\Omega): div(u) = 0, u\,.\,n|_{\partial\Omega} = 0\}$
- $H_q^1(\Omega) = \{u \in W^{1,q}(\Omega): div(u) = 0, u|_{\partial\Omega} = 0\}$

6.2. Definición de una solución débil
Asumiendo que v, y p son soluciones clásicas de (0.1) – (0.3) y con suficientes características tales que: multiplicar (0.1) por $\varphi \in D_T$ e integrando por partes sobre Ω_∞ obtenemos:

$$\int_0^\infty \left\{ \left(v, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \vartheta(\nabla v, \nabla \varphi) - (v . \nabla v, \varphi) \right\} dt = - \int_0^\infty (f, \varphi) dt - (v_0, \varphi(0)) \ , \quad \forall \varphi \in D_T \qquad (1)$$

Y por otro lado, si $v(x,t)$ es un campo vectorial que satisface (1) y teniendo suficiente suavidad como para permitir la integración por partes sobre Ω_∞ en cierto sentido. (Por ejemplo, en el sentido de la diferenciación generalizada) obtenemos fácilmente:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v . \nabla v - \vartheta \Delta v - f \ , h(t)\psi \right) dt = 0$$

Para todo $h \in C_o^\infty(0, T)$ y $\psi \in D(\Omega)$ y por consiguiente para cada ψ

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v . \nabla v - \vartheta \Delta v - f \ , h(t)\psi \right) = 0$$

Y por resultado bien conocido de Hopf (1950/1951), se concluye la validez de (0.1) por algún campo de presión $p(x,t)$. Sin embargo, está claro que $v(x,t)$ es un campo vectorial solenoidal

que satisface (1), pero no es lo suficientemente diferenciable, no podemos de (1) concluir (0.1) y es precisamente en este sentido que (1) tiene que ser considerada como la formulación débil.
Luego esta definición se puede ir redefiniendo en regiones y espacios requeridos.

TABLA I
Introducción al problema de valores iniciales y de frontera de la ecuación de Navier - Stokes
Solución Débil según Leray – Hopf

Solución débil según Leray – Hopf
Sea Ω cualquier dominio en $\mathbb{R}^n$ y sea $T > 0$ Entonces, para cualquier $v_o \in H(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega_T)$, existe al menos una solución débil de (0.1)- (0.3) en Ω_T. $v \in H(\Omega)$ y $p(t) \epsilon L^2(\omega)\ \forall t \epsilon \big[0\ \ T\big), \omega \subset\subset \Omega$.   Esta solución verifica, además, las siguientes propiedades: i) La desigualdad de la energía: $\|v(t)\|_2^2 + 2\vartheta \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_2^2 d\tau \leq 2\int_0^t [(v(\tau), f(\tau)] d\tau + \|v_o\|_2^2 \ ,\quad t \in [0,T]$ ii) $\lim_{t\to 0}\|v(t) - v_o\|_2 = 0.$

7. SOLUCIÓN

Buscamos la solución usando el método de Faedo – Galeorkin $\{\psi_r\} \subset D(\Omega)$ base de $H(\Omega)$ y buscamos la solución como una aproximación de v_k

$$v_k(x,t) = \sum_{r=1}^{k} C_{k\,r}(t)\,\psi_r(x)\ ,\quad k \in \mathbb{N}$$

Donde los coeficientes $C_{k\,r}(t)$ se determinan del siguiente sistema ordinario de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases} \dfrac{dC_{k\,r}}{dt} + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_{i\,r}\, c_{k\,i} + \sum_{i=1}^{k} a_{i\,s\,r}\, c_{k\,i}\, c_{k\,s} = f_r\ , & r = 1, \ldots.\ , k \\ c_{k\,r}(0) = C_{0\,r} & r = 1, \ldots.\ , k \end{cases}$$

Donde
$a_{i\,r} = \vartheta(\nabla\psi_i\,, \nabla\psi_i)$ $\quad a_{i\,s\,r} = (\psi_i\,.\nabla\psi_s\,, \nabla\psi_r)$,
$f_r = (f\,, \psi_r)$ $\quad C_{0\,r} = (v_0\,, \psi_r)$
Y $f_r \in L^2(0,T)$ para todo $r = 1, \ldots, k.$
De la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias existe solución única y $c_{k\,r} \in W^{1,2}(0, T_k)$, $r = 1, \ldots, k.$
Donde $T_k \leq T$.

8. CONCLUSIONES

La ecuación de Navier – Stokes describe el movimiento de los fluidos (Newtonianos) y su plena solución todavía no existe, se tiene grandes avances en casos particulares y en aproximaciones numéricas.
Este artículo pretendía dar una introducción a estas ecuaciones y presentar uno de los resultados dado por Leray – Hopf. También se pretendía y en efecto así se hizo, describir las funcione generalizadas y soluciones generalizadas (débiles), en fin dar un enfoque desde el punto de vista de espacios funcionales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1].GALDI G. "*An Introduction to the Navier – Stokes Initial – Bondary Value Problem*", University of Pittsburgh USA.

[2].GEISSERT, M., HECK H., HIEBBER M., "*On the Equation* $div\, u = g$ *an Bogovskii´s Operator in Sobolev spaces of negative order*".

[3].GALDI G. "*An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier – Stokes Equations*", University of Pittsburgh USA, Second Edition.

[4].SOHR HERMANN, (2001). "*The Navier – Stokes Equations An Elementay Funtional Analitic Approach*", Universitat Paderborn, Zurich University, Basel – Boston – Berlin.

[5].LADYZHENSKAYA O. A., (1987). "The Mathematical Theory of viscouss Incompressible Flow", Second Edition, Ed. Nauka.

***matemática*:** Una publicación de FCNM – ESPOL
2014, Vol. 12, No. 1

DEFINICIÓN DE DERIVADAS DE ORDEN FRACCIONARIO

Bustamante Johni[1]

Resumen. *Definición en forma general de la derivada en cualquier orden entero y su generalización a orden fraccionario, comparación de esta definición con la definición en la forma de Fourier, algunas aplicaciones de esta definición y el espacio de funciones en los cuales ésta se aplica.*

Palabras Claves: Derivada, orden de la derivada, orden fraccionario, derivada según Fourier, binomio de Newton, coeficientes del binomio de Newton, derivada de orden fraccionario.

Abstract. *General definition of the derivative at any integer order and fractional order generalization, comparison of this definition with the definition in the form of Fourier, some applications of this definition and the space of functions in which it is applied.*

Keywords: Derivative, derivative order, fractional order, derived in accordance Fourier, binomial Newton, and Newton's binomial coefficients derived fractional order.

Recibido: Febrero 2014
Aceptado: Marzo 2014

1. DEFINICIÓN DE DERIVADA (TRADICIONAL)

La derivada se define en un punto así:

$$f'(x)_{|x=a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ahora consideramos la derivada para todo punto "a" del dominio donde este límite existe, entonces tenemos la derivada como función, por tanto:

$$(1.1)\qquad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Observamos que la función derivada, se define en el dominio de existencia de f', entonces el espacio de funciones en las que podemos aplicar esta definición en este trabajo es: $C^1(\Omega)$.
A continuación una pequeña manipulación algebraica de la definición, cambiamos h por (-h), esto es posible por cuanto el dominio de definición Ω consideramos abierto,

$$(1.2)\qquad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

Con esta última, determinamos la función derivada de f', obtenemos:

$$(1.3)\qquad (f')'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f'(x)-f'(x-t)}{t}$$

La denotamos f'':

$$f''(x) = \lim_{t=0}\frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h} - \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x-h)-f(x-h-t)}{h}}{t}$$

(1.4)

Sin entrar en mucha formalidad, y asumiendo que existe la f'' es decir $f \in C^2(\Omega)$. Podemos hacer $t = h$, por tanto tenemos:

$$(1.5)\quad f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}$$

Continuamos con el mismo procedimiento, tenemos que para las funciones de $f \in C^3(\Omega)$:

$$f^{(3)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-3f(x-h)+3f(x-2h)-f(x-3h)}{h^3}$$

(1.6)

2. GENERALIZACIÓN DE LA DEFINICIÓN DE ORDEN N

Si continuamos con este proceso es fácil deducir que los coeficientes son binomiales y generalizando tenemos:
Para $f \in C^n(\Omega)$, donde n = 1, 2, 3,…
(2.1)

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{C_0^n f(x) - C_1^n f(x-h) + C_2^n f(x-2h) - \cdots + (-1)^n C_n^n f(x-nh)}{h^n}$$

Escribimos esta fórmula en forma más compacta:

$$(2.2)\qquad f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n f(x-kh)}{h^n}$$

[1] *Bustamante Johni, Profesor, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL).*
(e_mail: jobustam@espol.edu.ec).

La forma general del coeficiente binomial es:

$$C_k^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$$

Ahora, recurrimos a algunas propiedades de los coeficientes binomiales C_k^n,

1. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n = 0$,
2. $C_n^{n+j} = 0, \forall j = 1,2,3,\ldots$
3. $C_k^0 = 1, \forall k = 1,2,3,\ldots$

Gracias a esta última propiedad podemos decir que: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^n = 0$, con esta generalización tenemos:

$$(2.3) \quad f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^n f(x-kh)}{h^n}$$

3. DEFINICIÓN DE *p*-DERIVADA O DERIVADA DE ORDEN FRACCIONARIO

Continuando, recordamos que $C_k^n = \frac{(n)}{1}\frac{(n-1)}{2}\frac{(n-2)}{3}\frac{(n-3)}{4}\ldots\frac{[n-(k-1)]}{k}$ y también se define para valores fraccionarios, obteniendo que para $p \in \mathbb{Q}$ el coeficiente binomiales es: $C_k^p = \frac{(p)}{1}\frac{(p-1)}{2}\frac{(p-2)}{3}\frac{(p-3)}{4}\ldots\frac{[p-(k-1)]}{k}$ se podía generalizar estos coeficientes usando la función Gamma, el resultado es el mismo.

Forma general del coeficiente binomial es:

$$C_k^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p-k+1)}, p \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}$$

Por tanto finalmente obtenemos la generalización de la derivada de orden fraccionario p:

$$(3.1) \quad f^{(p)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^p f(x-kh)}{h^p}$$

Es fácil verificar casos triviales, tales como $f(x) = constante$, para esta función el numerador es igual a cero, y por tanto su derivada de orden p es siempre cero. A pesar que el orden, puede ser cualquier valor fraccionario, en este trabajo nos interesa los valores enteros positivos, lo interesante de este planteamiento es, que podemos calcular la derivada de cualquier orden sin necesidad de haber calculado las anteriores, por ejemplo.

$f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$, calcular la función derivada de orden 5: aplicamos la fórmula de la definición: $f^{(p)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^p f(x-kh)}{h^p}$, obtenemos:

$$f^{(5)}(x) = \frac{120(-1+12x+15x^2-40x^3-15x^4+12x^6+x^6)}{(1+x^2)^6}$$

Probemos el cálculo de la función derivada de orden 15, obtenemos:

$$f^{(15)}(x) = \frac{1307674368000}{(1+x^2)^{16}}(1-32x-120x^2+1120x^3 +1820x^4-8736x^5-8008x^6+22880x^7 +12870x^8-22880x^9-8008x^{10}+8736x^{11} +1820x^{12}-1120x^{13}-120x^{14}+32x^{15}+x^{16})$$

Obviamente este cálculo fue realizado con ayuda del software *Mathematica*. Un interesante ejercicio resulta el cálculo de la derivada de orden p de la función $f(x) = e^{ax}$, donde a es una constante real.

Desarrollo:

$$f^{(p)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^p e^{a(x-kh)}}{h^p},$$

$$f^{(p)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^p e^{a.x}.e^{-a.k.h}}{h^p},$$

$$f^{(p)}(x) = e^{a.x}\left[\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^p e^{-a.k.h}}{h^p}\right],$$

$$f^{(p)}(x) = e^{a.x}\left[\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty} C_k^p (-e^{-a.h})^k}{h^p}\right],$$

usamos la fórmula del binomio:

$(1-x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^p(-x)^k$

Entonces obtenemos:

$$f^{(p)}(x) = e^{a.x}\left[\lim_{h\to 0}\frac{(1-e^{-a.h})^p}{h^p}\right],$$

$$f^{(p)}(x) = e^{a.x}\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-e^{-a.h}}{h}\right)\right]^p,$$

$$f^{(p)}(x) = e^{a.x}[a]^p,$$

$$(3.2) \qquad f^{(p)}(x) = a^p.e^{a.x},$$

Este resultado sirve para el cálculo de las derivadas de orden p de otras funciones, es decir, si $f(x)$ se puede presentar en la forma: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k).e^{(\beta_k).x}$, donde α_k , β_k constantes. Entonces la derivada de orden p sería: $f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k).(\beta_k)^p.e^{(\beta_k).x}$, la existencia de esta función solo depende de la convergencia de la serie.

Un resultado parecido lo obtiene J. Liouville a partir de una definición diferente de derivada de orden fraccionario.[2]

Estos resultados son aplicables para el campo de los números complejos. Ahora aplicaremos estos conceptos para el cálculo de algunas derivadas de orden fraccionario.

Ejemplo 1.-

$Sin(x) = \frac{1}{2.i}e^{i.x} - \frac{1}{2.i}e^{-i.x}$, usando esta forma de presentar la función seno podemos calcular la $\frac{1}{2}$-Derivada,

$$[Sin(x)]^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{i^{\frac{1}{2}}}{2.i}e^{i.x} - \frac{(-i)^{\frac{1}{2}}}{2.i}e^{-i.x},$$

[2] *Ver pag. 10 del libro de Samko, Kilbas Marichiev, más datos en la referencia.*

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = \frac{i^{\frac{3}{2}}}{2.i.i}e^{i.x} - \frac{(-i)^{\frac{3}{2}}}{2.i.(-i)}e^{-i.x},$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = \frac{i^{\frac{3}{2}}}{2.(-1)}e^{i.x} - \frac{(-i)^{\frac{3}{2}}}{2.(1)}e^{-i.x},$$

$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left[-\frac{1}{2}e^{i.x} - \frac{(-1)^{\frac{3}{2}}}{2}e^{-i.x}\right]$, además $(-1)^{\frac{3}{2}} = (-1)(-1)^{\frac{1}{2}} = -i$, entonces tenemos

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)[-e^{i.x} + ie^{-i.x}]$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)[-Cos(x) - iSin(x) + i(Cos\,(-x) + iSin(-x))]$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)[-Cos(x) - iSin(x) + i(Cos\,(x) - iSin(x))]$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)[-Cos(x) - iSin(x) + iCos\,(x) + Sin(x)]$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)[(-1+i)Cos(x) + (1-i)Sin(x)]$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)[-(1-i)Cos(x) + (1-i)Sin(x)]$$

$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)(1-i)[-Cos(x) + Sin(x)]$, donde

$$i^{\frac{3}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1-i)(1-i)[Sin(x) - Cos(x)],$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(-2i)[Sin(x) - Cos(x)],$$

obtenemos una función n el plano complejo, detallado:

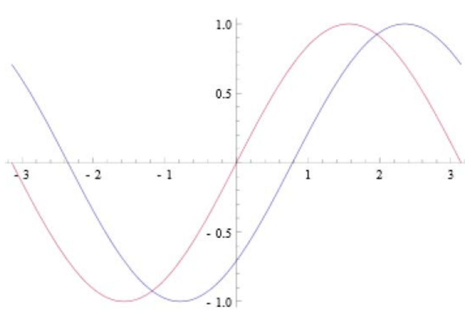
$[Sin(x)]^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}[Sin(x) + Cos(x)]$, graficamos el modulo de la función derivada de orden $\frac{1}{2}$,

Graficando las funciones: f, f':

FIGURA 1

Definición de derivadas de orden fraccionario

Funciones: f, f'



Ahora calculamos la *p*-derivada (función derivada de orden *p*) de la función Seno y luego la graficaremos solo la parte real, para denotar los cambio existentes.

$$Sin(x) = \frac{1}{2.i}e^{i.x} - \frac{1}{2.i}e^{-i.x}$$

$$[Sin(x)]^{(p)} = \frac{i^p}{2.i}e^{i.x} - \frac{(-i)^p}{2.i}e^{-i.x}$$

$$[Sin(x)]^{(p)} = \frac{i^p}{2.i}e^{i.x} - \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x} + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x} - \frac{(-i)^p}{2.i}e^{-i.x}$$

$$[Sin(x)]^{(p)} = i^p\left(\frac{1}{2.i}e^{i.x} - \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x}\right) + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x} - \frac{(-i)^p}{2.i}e^{-i.x}$$

$$[Sin(x)]^{(p)} = i^pSin(x) + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x}[1 - (-1)^p] \quad (*)$$

Agrupando de otra forma

$$[Sin(x)]^{(p)} = i^p\left(\frac{1}{2.i}e^{i.x} + \frac{1}{2.i}e^{-i.x}\right) - \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x} - \frac{(-i)^p}{2.i}e^{-i.x}$$

$$[Sin(x)]^{(p)} = \frac{i^p}{i}\left(\frac{1}{2}e^{i.x} + \frac{1}{2}e^{-i.x}\right) + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x}[-1 - (-1)^p]$$

$$[Sin(x)]^{(p)} = i^{p-1}Cos(x) + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x}[-1 - (-1)^p] \quad (**)$$

Estas dos últimas presentaciones de la *p*-derivada nos ayuda a verificar dos casos triviales:

1. La primera: $[Sin(x)]^{(p)} = i^pSin(x) + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x}[-1 - (-1)^p]$, verificamos que, para $p = 0$, $[Sin(x)]^{(0)} = Sin(x)$
2. La segunda: $[Sin(x)]^{(p)} = i^{p-1}Cos(x) + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x}[-1 - (-1)^p]$, verificamos que, para $p = 1$; $[Sin(x)]^{(1)} = Cos(x)$

4. DERIVADA DE ORDEN *p* SEGÚN FOURIER

Existen varias definiciones de la derivada de orden fraccionario incluye la integración de orden fraccionario, esto lo podemos verificar en la bibliografía dada en este documento.

La generalización de la derivada de orden *p* según Fourier, de la forma más sencilla en el siguiente análisis.

Tomamos una función del conjunto $C^1_{per\Omega}$, aplicamos la serie de Fourier:

$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i.n.x}$, sabemos que la serie converge absoluta uniformemente, por tanto tomamos la *p*-derivada de cada término según la fórmula 3.2 $f^{(p)}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (e^{i.n.x})^{(p)}$, entonces $f^{(p)}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(i.n)^{(p)}.\,e^{(p)i.n.x}$. Siendo esta última la generalización de la derivada de orden *p* según Fourier. Podemos decir que la demostración de la equivalencia se reduce al cálculo de la fórmula 3.2. Además su equivalencia se da solamente en la intersección de los espacios donde estas dos definiciones de derivada son definidas.

5. CONCLUSIÓN

En este trabajo se presenta la definición de orden entero y su generalización en orden fraccionario, además se realiza la compatibilidad con la definición de la derivada según Fourier, se describe también algunos ejemplos en los cuales se evidencia su correctitud. Definiciones similares son dadas por algunos autores, uno de ellos se cita en el libro de SAMKO, existen otras definiciones desde otra perspectiva con el uso de funciones integrales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1]. **SAMKO, KILBAS & MIRICHEV (1987).** "*Integrales y derivadas de orden fraccionario y otras propuestas*". Minsk - ex.URRS, Ed. Ciencia y Técnica, Editorial Nauka.

[2]. **MALGORZATA KLIMEK (2008)**. "*Meijer g-functions series as solutions for some euler – lagrange equations of fractional mechanics*", Enoc-2008, Saint Petersburg, Russia, june, 30-july.

***matemática*:** Una publicación de FCNM – ESPOL
2014, Vol. 12, No. 1

SOLUCIÓN EN $\mathbb{R}^n$ DE LA ECUACIÓN DE ONDA

Medina Jorge[1]

Resumen. *La ecuación de ondas es uno de los temas de mucha importancia en el estudio de las ecuaciones de la Física Matemática; este artículo pretende inicialmente explicar la obtención de la solución a la ecuación de onda unidimensional con el método de D'Almbert. En la segunda parte se resuelve la ecuación de onda tridimensional apoyado en teorías como es la Integral de Fourier, Convolución de funciones y en la teoría de funciones generalizadas desarrolladas en gran parte por el Matemático Ruso Sergei Sobolev.*

Palabras claves: Función Generalizada, Teoría de Distribución, Convolución, Sobolev, Ecuación de Onda, Ecuación Hiperbólica, Problema de Cauchy

Abstract. *The wave equation is a topic of great importance in the study of equations of Mathematical Physics, this article aims to explain initially obtaining the solution to the one-dimensional wave equation with the method of D'Almbert. In the second part of the three-dimensional wave equation supported theories such as the Fourier Integral, Convolution of functions and the theory of generalized functions developed in large part by the Russian mathematician Sergei Sovalev resolved.*

Keywords: Generalized Function, Distribution Theory, Convolution, Sobolev, wave equation, hyperbolic equation, Cauchy problem.

Recibido: Enero2014
Aceptado: Febrero2014

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales tiene una gran historia. En ella han contribuido para su desarrollo grandes matemáticos alrededor del mundo.
Para la solución de este tipo de ecuaciones se ha desarrollado nuevas líneas matemáticas, tales como el análisis funcional, teoría de funciones generalizadas y teorías de nuevos espacios funcionales. Investigaciones en teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, van en dos direcciones:

1. Para la generalidad de ecuaciones con condiciones de borde, se estudió la existencia de soluciones, de su unicidad, de su estabilidad y otros.
2. Por otro lado existen muchas ecuaciones en derivadas parciales que describen procesos físicos, biológicos y otros. Por ejemplo: de conducción de calor y vibración de ondas, ecuación en hidrodinámica, la ecuación de Schrodinger en la mecánica cuántica, entre otros.

2. CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

<u>Elíptica</u> si:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} > 0$$

<u>Parabólica</u> si:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 0$$

<u>Hiperbólica</u> si:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} < 0$$

TABLA 1
Solución en $\mathbb{R}^n$ de la ecuación de onda
Ecuación por su nombre y tipo

ECUACIÓN	NOMBRE	TIPO
$\nabla^2 u = 0$	Laplace	Elíptico
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2\nabla^2 u$	Onda	Hiperbólica
$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u$	Difusión	Parabólica

[1] *Medina Jorge, M.Sc., Profesor, Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL). (e_mail: jmedina@espol.edu.ec).*

3. LA ECUACIÓN DE ONDAS

En dimensiones Espaciales:
El problema de CAUCHY

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = F(x,t);\, en\ \mathbb{R}^N x(0,t) \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \\ u_t(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

3.1. ECUACIÓN DE ONDAS PARA N=1

$$\begin{cases} u_{tt} - cu_{xx} = 0, \quad x \in R_x R \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in R \\ u_t(x,0) = g(x), \quad x \in R \end{cases}$$

Método:

I. Mediante un cambio de variables se obtienen todas las soluciones de la ecuación.
II. Se determina una solución que satisfaga los datos.

$$u_{tt} \cdot u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) u$$

Se considera las nuevas variables de $\bar{x}$, $\bar{t}$ y se verifique que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{t}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \end{cases}$$
$$\to u_{tt} - u_{xx} = u_{\bar{x}\bar{t}}$$

Es suficiente considerar

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(x+t) \\ \bar{t} = \dfrac{1}{2}(x-t) \end{cases}$$

O bien

$$\begin{cases} x = (\bar{x} + c\bar{t}) \\ t = (\bar{x} - c\bar{t}) \end{cases}$$

$\to u_{tt} - u_{xx} = 0$ Se convierte en $u_{\bar{x}\bar{t}} = 0$, por lo que $u_{\bar{t}} = \emptyset(t)$ ó,

$$\mathrm{u}(\bar{x},\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} \emptyset(s)ds + w_1(\bar{x})$$

Es decir que: $\mathrm{u}(\bar{x},\bar{t}) = w_1(\bar{x}) + w_2(\bar{t})$
W_1 y W_2 funciones arbitrarias

$$\to u(x,t) = w_1(x+ct) + w_2(x-ct)$$

son soluciones de la ecuación de onda y esto es una suma de ondas planas.
Para determinar la solución

$$\begin{cases} u(x,0) = w_1(x) + w_2(x) = f(x) \\ u_t(x,0) = w'_1(x) - w'_2(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\to w_1(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + \int^x g(s)ds + C\right]$$

$$w_2(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - \int^x g(s)ds - C\right]$$

de donde se obtiene la **FÓRMULA DE D'ALAMBERT**

La fórmula

$$u(x,\, t) = w_1(x+ct) + w_2(x-ct) =$$

$$\frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) - \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds\right]$$

significa que el desplazamiento de la cuerda vibrante en la superposición de dos ondas, cuyos perfiles están dadas por las funciones $w_1(x)$ y $w_2(x)$ viajando en sentidos opuestos.

3.2 ECUACIÓN DE ONDAS PARA N=3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C\Delta u = 0$$

Para la ecuación diferencial cuando C=1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \ (1)$$
$$\textit{con condiciones iniciales}$$

$$u(0,x) \quad = \varphi(x); \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(\mathrm{x}) \ (2)$$

Donde $u(t,x)$, $\varphi(x)\ y\ \psi(x)$ son funciones del espacio *S*, que se definen como el espacio compuesto por funciones de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y decrecen junto con sus derivadas de cualquier orden cuando $|x| \to \infty$, más rápido que cualquier función de la forma $\frac{1}{1+|x|^\beta}$, $\forall \beta > 0$.
Para las funciones de *S* la transformada de Fourier siempre existen, y sus transformadas nuevamente son del espacio *S*. Es decir, si $u(x) \in S \to \hat{u}(\zeta) \in S$.
Representamos la transformada de Fourier de u, de la siguiente forma:

$\widehat{u}(\mathrm{t},\zeta) = \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)e^{-i(x,s)}dx = F_{x\to\zeta}u(t,x)$

Aplicando la transformada de Fourier a (1) y a (2) se transforma en

$$\text{Con}\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(t,\zeta) + (\zeta)^2 \hat{u}(t,\zeta) = 0 \quad (3) \\ \hat{u}(0,\zeta) = F_{x\to\zeta} u(0,x) = \hat{\varphi}(\zeta) \quad (4) \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\,(0,\zeta) = F_{x\to\zeta}\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \hat{\psi}(\zeta) \end{cases}$$

de esta forma (1) y (2) se forma en (3) y (4)
La solución (3) y (4) está dada por

$$(5)\ \hat{u}(t,\zeta) = \hat{\varphi}(\zeta)\, Cos(|\zeta|t) + \hat{\psi}(\zeta)\frac{Sen(|\zeta|t)}{|\zeta|}$$

donde $|\zeta| = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2}$ tomando la transformada inversa se obtiene que $\mathrm{u}(t,x) = F^{-1}_{\zeta\to x}\hat{u}(t,\zeta) =$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left[\hat{\varphi}(\zeta) Cos\big((\zeta)t\big) + \hat{\psi}(\zeta)\frac{Sen\big((\zeta)t\big)}{|\zeta|}\right] e^{i(\zeta,t)} d\zeta \quad (6)$$

lo que representa la solución general de (1) y (2).
En los cursos de análisis funcional, se da la definición de función generalizada f, como un funcional lineal continuo $T_f = (f,\varphi)$ dado en algún espacio lineal de funciones elementales φ. Este concepto aparece como la generalización de las funciones clásicas, esto se da por la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales de física matemática.
Esta generalización de conceptos clásicos de física da la posibilidad de expresar de una forma matemática correcta como es "la densidad de un punto material, la densidad de una carga puntual, la intensidad de una fuerza instantánea en un punto dado, etc."
Ahora introducimos un nuevo concepto como es el de las Funciones con Soporte Compacto $\varphi(x)$, las que se entienden como

$$Supp\varphi = \overline{\{x/\varphi(x) \neq 0\}}.$$

Función generalizada de (crecimiento lento) se denomina al **Funcional Lineal Contínuo sobre el Espacio *S***. A este espacio lo representamos como *S'*.
Para funciones *f(x)* de clase $L_1(\mathbb{R}^n)$ definimos como:

$$(f(x),\varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx\,;\ \ \forall\varphi(x)\in S$$

Y la transformada de Fourier de $(Ff)(\zeta)$=$\int_{\mathbb{R}^n_x} f(x)e^{-i(x,\zeta)}\,dx$

Y para cualquier $\varphi(x) \in S$:

$$\big(Ff(\xi),\ \varphi(\zeta)\big) = \int_{\mathbb{R}^n_\zeta}\left(\int_{\mathbb{R}^n_x} f(x)e^{-i(x,\zeta)}dx\right)\varphi(\zeta)\,d\zeta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_x} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n_\zeta}\varphi(\zeta)e^{-i(x,\zeta)}d\zeta\right)dx$$

= (*f*(*x*), (Fφ)(x))

Convolución: Sean $f(x)\epsilon\, S',\ g(x)\,\epsilon\, C_b$
C_b *Espacio de funciones acotadas continuas en* $\mathbb{R}^n$

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

Su transformada está dada por

$$F_{x\to\zeta}\big(f(x) * g(x)\big) = \hat{g}(\zeta).\hat{f}(\zeta)$$

Y su antitransformada

$$F^{-1}_{\zeta\to x}\big(\hat{g}(\zeta).\hat{f}(\zeta)\big) = (f*g)(x)$$

Con ayuda de la convolución. Para eso regresamos al problema inicial de CAUCHY y observamos cómo caso particular, cuando $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) \neq O$ es decir:

$$\frac{\partial^2 u_1}{dt^2} - \Delta u_1 = 0,\ \ x\in\mathbb{R}^3,\ t>0 \ \ (7)$$
$$u_1(x,0) \quad = 0,\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,o) = \psi(x)$$

entonces de acuerdo a (6) tenemos

$$u_1(x,t) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\psi(\zeta)\frac{Sen\big((\zeta)t\big)}{|\zeta|}e^{i(\zeta,x)}d\zeta$$

$$=F^{-1}_{\zeta\to x}\left(\frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|}\ \hat{\psi}(\zeta)\right) \ (8)$$

Nuestro objetivo ahora es simplificar (8), para esto se introduce un nuevo concepto que es la δ-función, definida de manera puntual en la esfera.

Con ayuda de la transformada de Fourier de δ_{S_R}, $n = 3$ $\left(S_R = S_R(0) = \left\{x{:}\ |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2} = R\right\}\right)$es una esfera en $\mathbb{R}^3$

Definición: δ- función, punto a punto en la esfera se denomina a la función generalizada, es decir un funcional lineal contínuo de la forma:

$$\left(\delta_{S_{\mathbb{R}}}(x),\ \varphi(x)\right) = \int_{S_R} \varphi(x) d\sigma_x,\ \forall\, \varphi \in S'$$

ver [2]

Donde $d\sigma_x$ es un elemento de la superficie de la superficie de la esfera S_R

Determinamos la transformada de Fourier de δ_{S_R}

$$\left(\left(F\delta_{S_R}\right),\ \varphi\right) = \left(\delta_{S_R},\ F\varphi\right)$$

$$= \left(\delta_{S_R};\ \int_{\mathbb{R}_\zeta^n} \varphi(\zeta) e^{-i(x,\zeta)} d\zeta\right)$$

$$= \int_{S_R} \left(\int_{R_n^\zeta} \varphi(\zeta) e^{-i(x,\zeta)} d\zeta\right) d\sigma_x$$

$$= \int_{R_n^\zeta} \left(\int_{S_R} e^{-i(x,\zeta)} d\sigma_x\right) \varphi(\zeta) d\zeta$$

$\rightarrow F\delta_{S_R} = \int_{S_R} e^{-i(x,\zeta)} d\sigma_x$, ver [2]

Para n=3

$$\int_{S_R} e^{-i(x,\zeta)} d\sigma_x = 4\pi R \frac{Sen(|\zeta|R)}{|\zeta|}$$

Esto se lo obtiene con ayuda de coordenadas esféricas.

$$\begin{cases} x = Rcos\varphi sen\psi \\ y = Rsen\varphi sen\psi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \psi \le \pi \\ z = Rcos\psi \end{cases}$$

De esta forma la transformada de Fourier de la función generalizada S_R está dado por:

$$(F\delta_{S_R},\varphi) = \int_{R_n^\zeta} \left(4\pi R \frac{Sen(|\zeta|R)}{|\zeta|}\right) \varphi(\zeta) d\zeta$$

$$= \left(4\pi R \frac{Sen(|\zeta|R)}{|\zeta|}, \varphi\right)$$

$\rightarrow F\delta_{S_R} = \left(4\pi R \frac{Sen(|\zeta|R)}{|\zeta|}\right) = \int_{S_R} e^{-i(x,\zeta)} d\sigma_x$ (9), Ver [2].

Y con ayuda de la transformación de Fourier y la Convolución se obtiene que

$$F(\delta_{S_R} * \varphi)(\zeta) = F(\delta_{S_R})(\zeta)(F(\varphi)(\zeta))$$

Aquí se está tomando que $f = \delta_{S_R}$.

Se tiene que $F_{x\to\zeta}\left(\delta_{S_t}\right) = 4\pi t \frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|}$

$$F_{x\to\zeta}\left[\frac{1}{4\pi}\delta_{S_t}\right] = \frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|} \quad (10)$$

Y por el teorema de lo Convolución de Funciones generalizados tenemos

$$\frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|}\hat{\psi}(\zeta) = F_{x\to\zeta}\left[\frac{1}{4\pi}\delta_{S_t}\right] F_{x\to\zeta}\psi(x)$$

$$= F\left[\frac{1}{4\pi t}\delta_{S_t} * \psi\right] \quad (11)$$

de (8) y (11) obtenemos

$$u_1(x,t) = F_{\zeta\to x}^{-1}\left(\frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|}\hat{\psi}(\zeta)\right)’7$$

$$= F_{\zeta\to x}^{-1}\left(\frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|}\right) * F_{\zeta\to x}^{-1}\hat{\psi}(\zeta)$$

$$= \frac{1}{4\pi t}\left(\delta_{S_t} * \psi\right)(x) = \frac{1}{4\pi t}\left(\delta_{S_t}(y),\ \psi(x-y)\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(0)} \psi(x-y) d\sigma_y = \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} \psi(z) d\sigma_z$$

donde $x - y = z, \quad d\sigma_y = d\sigma_z$

$S_t(0) = \{|y| = t\}, \quad S_t(x) = \{|x - z| = t\}$

Se obtiene

$$u_1(t,x) = t\frac{1}{4\pi t^2}\int_{S_t(x)} \psi(z) d\sigma_z = tM_t\psi(x)$$

donde$M_t\psi$ se representa como el VALOR MEDIO de la función ψ en la esfera

$$S_t(x) = \{z{:}\ |z - x| = t\}$$

$$M_t\psi(x) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S_t(x)} \psi(z) d\sigma_z$$

De la misma forma resolvemos poner

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \Delta u_2 = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^3,\ \ t > 0$$

$$u_2(x,0) = \varphi(x),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = 0,$$
$$\varphi(x) \in S$$

De (6) tomamos

$$u_2(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} Cos((\zeta)t)\hat{\varphi}(\zeta) e^{i(x,\zeta)} d\zeta$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|}\ \hat{\varphi}(\zeta) e^{i(x,\zeta)} d\zeta\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(tM_t\varphi(x))$$

La solución general de (1) y (2) es la suma de $u_1(t,x)\ y\ u_2(t,x)$, es decir

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) =$$
$$= tM_t\psi + \frac{\partial}{\partial t}(tM_t\varphi)$$

Donde

$$M_t\psi = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{(S_t(x))}\psi(z)dz \quad (12)$$

Esta fórmula se denomina Kirchhoff.
Esta integral está tomado en la esfera con centro en el punto "x" con radio "t", al punto $(t,\ x)$ en el cual se tiene la solución.

4. CONCLUSIÓN

La búsqueda de la solución de la ecuación en derivadas parciales que describe el movimiento de onda en tres dimensiones, se la realizo en el espacio S', de funciones de decrecimiento lento, su convergencia en el cálculo clásico es conocido como convergencia débil, la cual en el cálculo moderno es convergencia de funciones generalizadas.

Se observa que en una sola dimensión la búsqueda solo depende del espacio de las funciones elementales dadas en las condiciones de frontera del problema de Cauchy.

Para la compresión de esta búsqueda se requiere un profundo conocimiento de los espacios de Fourier, su transformada, la propiedad de Convolución y Teoría de Distribución.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1]. KREYSZIG, E. (2000). Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. México: LIMUSA, S.A.

[2]. B.MASLENIKOVA (1997) "*Ecuaciones diferenciales en Derivadas Parciales*". Moscú.- Universidad Rusa de la Amistad de los Pueblos.

[3]. B.C. BLADIMIROV, (1976). "*Ecuaciones de la Física Matemática*". Moscú.- Editorial Ciencia

[4]. WALTER RUDIN, (1980). "*Principios de Análisis Matemático*", México Editorial Mc Graw-Hill

***matemática*:** Una publicación de FCNM – ESPOL
2014, Vol. 12, No. 1

IMPLEMENTACIÓN DE UN ALGORITMO GENÉTICO PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN DE PROYECTOS CON RECURSOS LIMITADOS

Narváez Gabriela[1], Saltos Ramiro[2]

Resumen. *Mayoritariamente en las empresas de producción industrial y en aquellas que brindan servicios de mantenimiento a las maquinarias, cotidianamente se enfrentan a un problema de índole operativo que debe ser resuelto por las personas competentes en el menor tiempo posible. Este equipo de trabajo tiene en frente un proyecto que está compuesto por una serie de actividades y procesos que tienen una duración determinada. Los procesos y actividades consumen los recursos escasos de la compañía y obedecen una serie de relaciones de precedencia. El equipo de trabajo deberá elaborar una secuencia según la cual se deben ejecutar las diferentes actividades y procesos, respetando todas las limitantes consideradas de tal manera que el tiempo de finalización del proyecto sea el menor posible. Este tipo de problemas suelen ser conocidos como Programación de Proyectos con Recursos Limitados (RCPSP por sus siglas en inglés). En este trabajo se hablará un poco sobre la teoría detrás de los algoritmos genéticos, conoceremos sus ventajas y, se diseñará e implementará uno de ellos basado en la secuenciación en serie que nos permita encontrar soluciones óptimas al problema planteado en el menor tiempo posible.*

Palabras Claves: Programación de Proyectos con Recursos Limitados, Algoritmos Genéticos.

Abstract. *Mainly in industrial production companies and those that provide maintenance services to machinery, daily face a problem of operational nature that must be resolved by the people involved in the shortest time possible. This team has in front a project that consists of a series of activities and processes that have a definite duration. The processes and activities consume scarce resources of the company and obey a set of precedence relationships. The team should develop a sequence according to which we should implement the various activities and processes, respecting all the constraints considered so that the project completion time is minimum. Such problems are usually known as Resource Constrained Project Scheduling (RCPSP). In this paper we will talk a little about the theory behind genetic algorithms, know their strengths and, design and implement one based on sequencing in series to allow us to find optimal solutions to the problem in the shortest time possible.*

Keywords: Resource Constrained Project Scheduling, Genetic Algorithms.

Recibido: Octubre 2013
Aceptado: Diciembre 2013

1. INTRODUCCIÓN

Mayoritariamente en las empresas de producción industrial y en aquellas que brindan servicios de mantenimiento a las maquinarias, cotidianamente se enfrentan a un problema de índole operativo que debe ser resuelto por las personas competentes en el menor tiempo posible. Este equipo de trabajo tiene en frente una obra, como usualmente se denominan a los proyectos industriales, o proyecto que está compuesto por una serie de actividades y procesos que tienen una duración determinada. Los procesos y actividades consumen los recursos escasos de la compañía. El equipo de trabajo deberá elaborar una secuencia según la cual se deben ejecutar las diferentes actividades y procesos, respetando la limitación de los recursos junto con un conjunto de restricciones adicionales de tal manera que el tiempo de finalización de la obra sea el menor posible.

Este tipo de problemas suelen ser conocidos como Programación de Proyectos con Recursos Limitados en donde las restricciones adicionales son las relaciones de precedencia de las actividades que conforman el proyecto.

2. OBJETIVOS

Los objetivos que se persiguen con el presente trabajo son:

1. Dar a conocer la importancia que tiene la programación de proyectos en las empresas.
2. Diseñar un algoritmo genético eficiente para resolver el RCPSP (Problema de Programación de Proyectos con Recursos Limitados por sus siglas en inglés).

Dar a conocer la necesidad que existe actualmente de desarrollar programas de optimización.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El problema considerado en este trabajo es el de secuenciación de un proyecto con limitación de recursos y sin posibilidad de interrupción del proceso de las actividades que lo componen una vez

[1] Narváez Gabriela, Ingeniera en Logística y Transporte, Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL).
(e_mail: gabriela.narvaez.m@hotmail.com).
[2] Saltos Ramiro, Ingeniero en Logística y Transporte, Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL).
(e_mail: ramirojsaltos@hotmail.com).

iniciadas, y las relaciones de precedencia entre las tareas son del tipo fin – inicio, que quiere decir que una actividad no puede iniciar mientras todas sus predecesoras no hayan concluido. También suponemos que la duración de las actividades, los requerimientos de recursos y la disponibilidad de cada tipo de recurso son cantidades no negativas, conocidas y constantes a lo largo del tiempo en el que se realiza el proyecto. El objetivo es minimizar el tiempo total de ejecución [1].

3.1 DEFINICIÓN MATEMÁTICA DEL RCPSP

El Problema de Secuenciación de Proyectos (RCPSP) puede ser definido matemáticamente de la siguiente manera:
Un proyecto consiste en un conjunto $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ de actividades y un conjunto $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ de recursos renovables limitados. Las actividades a_0 y a_{n+1} son ficticias, tienen una duración de cero unidades de tiempo, no consumen ningún recurso y representan el inicio y fin del proyecto. Luego cada actividad a_i para $i = 1,2, \dots, n$ tienen una duración $d_i \geq 0$ y consumen una cantidad $q_{ij} \geq 0$ de los recursos siendo $Q_j \geq 0$ la disponibilidad máxima de cada recurso $r_j \in R$ en cada instante de tiempo. Adicionalmente existen restricciones de precedencia para las actividades del proyecto de tal manera que cada actividad a_i no puede ser iniciada mientras todas sus actividades predecesoras P_i no hayan sido finalizadas. De la misma manera se suele denotar S_i como el conjunto de actividades sucesoras de la actividad a_i para $i = 0,1, \dots, n+1$. El objetivo consiste en encontrar un conjunto $T = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n+1}\}$de tiempos de inicio de cada actividad que cumpla con las restricciones de precedencia y disponibilidad de los recursos, y minimice el tiempo total de duración del proyecto.

3.2 MODELO MATEMÁTICO DEL RCPSP

Sea A_t el conjunto de todas las actividades en proceso en el tiempo t, entonces el RCPSP puede ser modelado matemáticamente de la siguiente manera:

$$Min\ z = t_{n+1} \qquad (1)$$

$$St.$$

$$t_i > t_p + d_p \quad \forall a_i \in A \ \forall a_p \in P_i \qquad (2)$$

$$\sum_{a_i \in A_t} q_{ij} \leq Q_j \quad \forall r_j \in R \ \forall t \geq 0 \qquad (3)$$

La función objetivo (1) busca minimizar el tiempo de inicio de la actividad ficticia que representa el fin del proyecto, la ecuación (2) garantiza que se cumpla las restricciones de precedencia de las actividades y la última (3) asegura que no se sobrepase la disponibilidad máxima de los recursos en cada instante de tiempo.

3.3 COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DEL RCPSP

De acuerdo con la teoría de la complejidad computacional, el RCPSP es uno de los más difíciles de resolver entre los problemas de optimización combinatoria. El RCPSP pertenece a la clase de problemas NP **-** *hard* en sentido estricto [2].

4. ESQUEMAS ALGORÍTMICOS PARA EL RCPSP

Kelley y Walker distinguen dos formas básicas de generar una secuencia posible, que denominan *en serie y en paralelo*. En ambos procedimientos, una vez que una actividad ha sido introducida en la secuencia, nunca es resecuenciada [1].
La secuenciación en serie comienza numerando los vértices de forma que para cada arco del grafo de precedencia, su vértice inicial tiene un número menor que su vértice final. Este esquema de numeración tiene la propiedad de que si se secuencian las actividades en el orden indicado por su número, entonces ninguna actividad aparecerá antes que ninguna de sus predecesoras. Se puede construir una secuencia posible considerando las actividades en este orden y secuenciando cada una de ellas tan pronto como las relaciones de precedencia y las restricciones sobre los recursos lo permitan. El procedimiento de numeración no es, en general, único. El orden entre las mismas puede obtenerse de forma aleatoria o mediante una función de prioridad tal como el requerimiento de recursos, duración de las actividades, etc. Cada regla de prioridad define un algoritmo en serie diferente [1].
En la secuenciación en paralelo se construye una secuencia posible procediendo hacia delante en el tiempo. En cada momento durante la construcción, se determina el conjunto de actividades que pueden ser secuenciadas de acuerdo con las restricciones de precedencia y de recursos. Este conjunto se ordena mediante una regla de prioridad y las actividades se secuencian en ese orden mientras no se supere la capacidad de los recursos y así sucesivamente. Si las actividades reciben la prioridad independientemente de la secuencia ya existente, el

algoritmo se denomina estático. Caso contrario se denomina dinámico [1].
Una forma completamente diferente de obtener una secuencia posible es el *método de muestreo*. Los métodos de muestreo forman un conjunto de secuencias posibles usando técnicas de aleatorización y eligen la mejor secuencia obtenida [1]. La desventaja de utilizar este método radica en que no se dirige la búsqueda, simplemente se toma el mejor individuo de un vecindario y obtenemos óptimos locales que no necesariamente están cerca del óptimo global.

5. ALGORÍTMOS GENÉTICOS

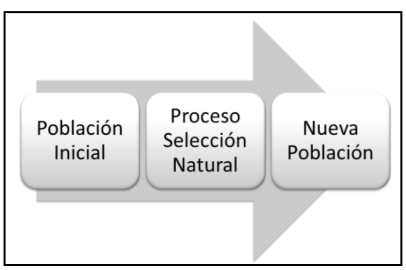
5.1. FILOSOFÍA DE LOS ALGORITMOS GENÉTICOS

Los algoritmos genéticos son métodos adaptativos que pueden usarse para resolver problemas de búsqueda y optimización. Están basados en el proceso genético de los organismos vivos. A lo largo de las generaciones, las poblaciones evolucionan en la naturaleza acorde con los principios de la selección natural y la supervivencia de los más fuertes, postulados por Charles Darwin (1859). Por imitación de este proceso, los algoritmos genéticos son capaces de ir creando soluciones para problemas del mundo real. La evolución de dichas soluciones hacia valores óptimos del problema depende en buena medida de una adecuada codificación de las mismas [4].

FIGURA 1

Implementación de un algoritmo genético para resolver el problema de programación de proyectos con recursos limitados

Proceso de Evolución de Darwin



El poder de los algoritmos genéticos proviene del hecho de que se trata de una técnica robusta, y pueden tratar con éxito una gran variedad de problemas provenientes de diferentes áreas, incluyendo aquellos en los que otros métodos encuentran dificultades. Si bien no se garantiza que el algoritmo genético encuentre la solución óptima del problema, existe evidencia empírica de que se encuentran soluciones de un nivel aceptable, en un tiempo competitivo con el resto de algoritmos de optimización combinatoria [4].

5.2. VENTAJAS DE LOS ALGORITMOS GENÉTICOS

Son intrínsecamente paralelos. La mayoría de los otros algoritmos son en serie y sólo pueden explorar el espacio de soluciones en una dirección al mismo tiempo, y si la solución que descubren resulta subóptima, no se puede hacer otra cosa que abandonar todo el trabajo hecho y empezar de nuevo. Sin embargo, ya que los algoritmos genéticos tienen descendencia múltiple, pueden explorar el espacio de soluciones en múltiples direcciones a la vez. Si un camino resulta ser un callejón sin salida, pueden eliminarlo fácilmente y continuar el trabajo en avenidas más prometedoras, dándoles una mayor probabilidad en cada ejecución de encontrar la solución [4].
Debido al paralelismo que les permite evaluar implícitamente muchos esquemas a la vez, los algoritmos genéticos funcionan particularmente bien resolviendo problemas cuyo espacio de soluciones potenciales es realmente grande – demasiado vasto para hacer una búsqueda exhaustiva en un tiempo razonable [4].
Los algoritmos evolutivos han demostrado su efectividad al escapar de los óptimos locales y descubrir el óptimo global incluso en paisajes adaptativos muy escabrosos y complejos [4].

5.3. ESQUEMA DE LOS ALGORITMOS GENÉTICOS

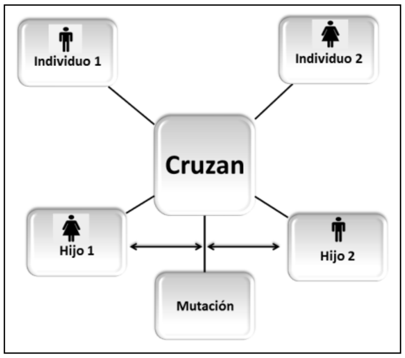
Los algoritmos genéticos tienen el siguiente esquema:

1. Existe una población inicial de individuos con determinadas características.
2. Los individuos se cruzan entre sí dando origen a los habitantes de la siguiente generación.
3. Estos habitantes heredarán las características de sus padres y si éstas son beneficiosas se irán propagando a través de las generaciones futuras, caso contrario desaparecerán por el proceso de selección natural que indica que sólo las especies más fuertes sobreviven.

Durante el proceso de cruce puede darse la mutación del nuevo individuo, si esta mutación es mala seguramente el nuevo hijo morirá al nacer, pero si es beneficiosa se irá transmitiendo en las generaciones futuras. La mutación es un proceso mediante el cual se altera de forma significativa el código genético del individuo otorgándole nuevas características que nadie posee en la población, pero al mismo tiempo ocurre con muy poca frecuencia.

Posiblemente en una especie determinada uno de cada millón de habitantes ha mutado.

FIGURA 2
Implementación de un algoritmo genético para resolver el problema de programación de proyectos con recursos limitados
Esquema del Algoritmo Genético



5.3. ANALOGÍA CON LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Dado un problema de optimización, los algoritmos genéticos tienen la siguiente secuencia:

1. Codificar al individuo como un cromosoma perteneciente al espacio de soluciones factibles del problema.
2. Crear un conjunto de individuos como población inicial.
3. Aplicar el proceso de selección natural, que consiste en que, mediante algún criterio seleccionar las parejas que realizarán el cruce.
4. Realizar el cruce de las parejas formadas. El operador de cruce más usado es el punto de cruce.
5. Delimitar la nueva población al mismo tamaño de la población inicial seleccionando los mejores individuos.
6. Aplicar la mutación. La mutación clásica es el cambio de alelos. Se debe aplicar a menos del 1% de la población.
7. Actualizar la población inicial = nueva población.
8. Si se cumple el criterio de parada, finalizar y presentar la mejor solución encontrada, caso contrario volver al paso 3. El criterio de parada es libre.

6. DISEÑO DEL ALGORITMO GENÉTICO PARA EL RCPSP

El algoritmo genético implementado para resolver el RCPSP fue elaborado en base a los siguientes criterios de diseño.

6.1. CODIFICACIÓN

Las soluciones serán codificadas como una lista de tareas donde el orden de las actividades dentro de la misma indicará cuándo deben ser planificadas en el calendario de ejecución.

6.2. ELABORACIÓN DEL CROMOSOMA

El cromosoma será elaborado siguiendo la secuenciación en serie respetando las restricciones de precedencia que impone el problema. Para ello se tendrán en cada iteración dos conjuntos disjuntos, el conjunto de actividades secuenciadas y el conjunto de actividades elegibles.

Las actividades elegibles son todas aquellas actividades cuyos predecesores ya pertenecen al conjunto de actividades secuenciadas. De este conjunto se selecciona al azar una de ellas y se la agrega al final del conjunto de tareas secuenciadas. Este procedimiento se repite hasta completar el cromosoma.

6.3. CREACIÓN DE LA POBLACIÓN INICIAL

Para crear la población inicial se repetirá el proceso mencionado en el apartado anterior hasta completar el tamaño deseado de la misma.

6.4. FITNESS

El fitness representa la fortaleza del individuo creado o en este caso, qué tan buena es la solución encontrada. En nuestro problema el fitness estará dado por el tiempo total de ejecución del proyecto y mientras menor sea este, mejor será la solución generada.

6.5. SELECCIÓN NATURAL

Para el proceso de selección natural, las parejas serán formadas ordenando los individuos de la población inicial desde el más fuerte al más débil y a continuación se parearán el primero con el segundo, el tercero con el cuarto y así sucesivamente.

6.6. OPERADOR DE CRUCE

El operador de cruce es aquella función mediante la cual se crean los nuevos individuos. Esta función recibe una pareja de cromosomas y la cruza generando los hijos de la misma. Estos hijos deben garantizar el cumplimiento de las restricciones de precedencia y para ello utilizaremos el siguiente procedimiento:

1. Se genera un número entero aleatorio u entre 1 y n el cual representará el punto de cruce entre los cromosomas.
2. El primer hijo hereda los genes del padre de izquierda a derecha hasta u, y completa su secuencia genética heredando los genes de la madre, de izquierda a derecha, que aún no formen parte del nuevo individuo.
3. De manera similar, el segundo hijo hereda los genes de la madre de izquierda a derecha hasta u, y completa su secuencia genética heredando los genes del padre, de izquierda a derecha, que aún no formen parte de la misma.

6.7. MUTACIÓN

La mutación es un mecanismo que juega un papel fundamental en cualquier algoritmo genético debido a que brinda la posibilidad de salir de un entorno de búsqueda monótono y pasar a otro que probablemente tenga entre sus habitantes al individuo óptimo.

Cuando apliquemos la mutación a alguno de los nuevos habitantes, debemos asegurarnos que el individuo mutado aún pertenezca a la misma especie que los demás habitantes, esto es, que aún preserve las restricciones de precedencia que forman parte del problema de optimización. Para garantizar que esto se mantenga, elaboramos un procedimiento de mutación que consiste en intercambiar un par de alelos del nuevo individuo, siempre y cuando estos alelos no tengan relaciones de dependencia. Los pasos a seguir para lograr esto son:

1. Generar un número aleatorio u entre 1 y $n-1$.
2. Si la actividad ubicada en el puesto u de la secuencia genética no es predecesora de la actividad situada en la posición $u+1$ de la misma secuencia, entonces intercambiar ambas actividades. Caso contrario volver al paso 1.

6.8. CRITERIO DE PARADA

El criterio de parada utilizado en nuestro algoritmo genético consistirá en el alcance de un número determinado de generaciones, después de las cuales el mejor individuo encontrado durante todo el proceso evolutivo será considerado como la mejor solución al problema planteado.

6.9. CREACIÓN DEL CALENDARIO DE EJECUCIÓN

El calendario de ejecución de las tareas o mejor conocido como el diagrama de Gantt es aquel gráfico donde se indica el tiempo en el cual va a ser iniciada cada tarea y la duración de la misma ya considerando las restricciones impuestas por la escasez de los recursos. Nosotros utilizaremos la secuenciación dada por el algoritmo genético y la creación del calendario será hacia delante en el tiempo. Para cumplir con esto debemos:

1. Seleccionar la actividad que corresponda según el orden establecido en la secuenciación.
2. Ubicar el tiempo de inicio de la actividad seleccionada en el paso 1 en el primer día donde se satisfaga las restricciones de disponibilidad de recursos y todos los predecesores de dicha actividad hayan concluido.
3. Eliminar la actividad seleccionada de la secuenciación.

Si ya se han ubicado todas las actividades en el calendario, finalizar el procedimiento y el fitness de esta secuenciación será el tiempo de inicio de la última actividad secuenciada, que dado nuestro enfoque será la tarea ficticia FIN, caso contrario regresar al paso 1.

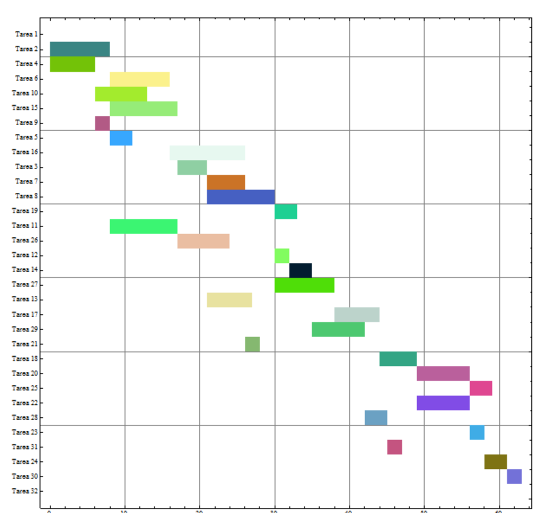
7. INFORME DE RESULTADOS

Al finalizar la ejecución del algoritmo genético, este presentará los resultados tal como se muestran en la figura 3:

FIGURA 3

Implementación de un algoritmo genético para resolver el problema de programación de proyectos con recursos limitados

Diagrama de Gantt



Donde el eje de las ordenadas muestra el orden en que son secuenciadas las tareas mientras que el eje de las abscisas indica el tiempo de inicio de cada una de ellas y la duración total del proyecto.

8. ANÁLISIS DEL ALGORITMO Y RESULTADOS

Para evaluar la eficacia del algoritmo genético desarrollado se corrieron 30 instancias de prueba obtenidas de [6] con un número de 30 tareas en el proyecto calibrando los parámetros con 50 individuos en la población inicial y el criterio de parada con 50 generaciones. Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla:

TABLA I

Implementación de un algoritmo genético para resolver el problema de programación de proyectos con recursos limitados

Resultados del Algoritmo Genético

Instancia	Sol AG	Opt	R-Gap	Time (s)
1	46	43	0,0697	130,18
2	51	47	0,0851	113,78
3	47	47	0	88,32
4	62	62	0	148,18
5	39	39	0	124,52
6	48	48	0	123,8
7	60	60	0	128,54
8	54	53	0,0188	105,03
9	49	49	0	129,98
10	45	45	0	109,27
11	38	38	0	105,64
12	51	51	0	146,56
13	43	43	0	92,18
14	43	43	0	124,83
15	51	51	0	121,15
16	47	47	0	116,34
17	48	48	0	116,69
18	54	54	0	117,27
19	65	65	0	123,11
20	59	59	0	137,85
21	49	49	0	106,49
22	60	60	0	119,25
23	47	47	0	119,51
24	57	57	0	119,55
25	59	59	0	121,39
26	45	45	0	115,86
27	56	56	0	132,14
28	55	55	0	121,23
29	38	38	0	111,28
30	48	48	0	113,98
Promedio			**0,0057**	**119,464**

Adicionalmente se corrieron 5 instancias con 60 tareas en el proyecto con los siguientes resultados:

TABLA II

Implementación de un algoritmo genético para resolver el problema de programación de proyectos con recursos limitados

Resultados del AG con 60 Tareas

Instancia	Sol AG	Opt	R-Gap	Time (s)
1	77	77	0	660,55
2	75	68	0,102941	676,78
3	73	68	0,073529	736,16
4	93	91	0,021978	674,46
5	78	73	0,068493	723,82
Promedio			**0,053388**	**694,354**

9. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo se desarrolló un algoritmo genético para resolver el problema de secuenciación de proyectos con recursos limitados y con relaciones de precedencia del tipo fin – inicio. A través de los experimentos se comprobó que nuestro algoritmo resultó ser una herramienta adaptativa muy eficaz para resolver este tipo de problemas hallando las soluciones óptimas para problemas de tamaño relativamente pequeños en un intervalo corto de tiempo.

Para instancias de mayor tamaño el algoritmo encuentra buenas soluciones con un gap no mayor al 20% con un tiempo de ejecución aceptable en la práctica, esto es, no mayor a dos horas.

Por medio de los experimentos se constató que la convergencia al óptimo de las instancias depende en cierta medida de que tan buenos o malos eran los fitness de los individuos que conformaban la población inicial, esto es, si el mejor individuo en la población inicial ya era la solución óptima del problema, entonces el algoritmo con toda certeza llegaría al óptimo debido a que se decidió guardar el mejor individuo que se naciera en cada generación reemplazando al anterior si este no era mejor que la nueva secuencia generada.

En el caso que no estuviera la secuencia óptima en la población inicial, el algoritmo llegaría a generarla dependiendo de la cantidad de generaciones estén programadas así mismo como de los fitness de los individuos de la población inicial y el número de tareas del proyecto.

La adecuada programación de las tareas de un proyecto es de vital importancia en las áreas operativas de una empresa debido a que una mala planificación puede acarrear grandes pérdidas económicas para la compañía. Gracias a la tecnología existente se pueden evitar estos problemas porque la planificación de los proyectos ya no se realizarán por el sentido común del planificador que hasta ahora lo hacía usando papel y lápiz, o en su defecto un software no optimizador como Microsoft Project, con el cual usando una instancia de 30 tareas nos demoramos media hora en sólo ingresar las precedencias de las tareas y no se consideran las limitaciones impuestas por la escasez de los recursos.

Por lo mencionado anteriormente salta a la luz la necesidad de desarrollar aplicaciones eficientes y fáciles de usar de manera que la planificación elaborada por el software sea sofisticada y optimice los recursos de la empresa. Esto es minimice el gasto que se incurre en la utilización de los recursos y el tiempo que se necesitaría para terminar el proyecto, lo cual mejora el nivel de servicio ofrecido por la empresa a sus clientes.

Finalmente, nuestro algoritmo genético puede ser utilizado como motor para la creación de este tipo de soluciones empresariales.

Para futuros trabajos de investigación dentro de este ámbito damos las siguientes recomendaciones:

- Cambiar el operador de cruce de uno a más puntos para mejorar las soluciones.
- Sugerimos usar dos puntos fijos para instancias de 50 a 70 tareas y 3 puntos fijos o más para instancias mayores.
- Recordar que el operador de cruce que se diseñe debe mantener las relaciones de precedencia de las tareas.
- Modificar el operador de mutación incrementando la probabilidad de que un individuo sea sujeto de una alteración en su secuencia genética.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1]. VALDÉS, R. Y TAMARIT, J., (1989). **"***Algoritmos Heurísticos Deterministas y Aleatorios en Secuenciación de Proyectos con Recursos Limitados*", Universidad de Valencia.

[2]. ARTIGUES, C. ET AL., (2008). "*Resource Constrained Project Scheduling*", Iste and Wiley, Primera Edición, pp. 23 – 24.

[3]. BUSTAMANTE, J., (2009). "*Apuntes de Metaheurísticas y Redes Neuronales*", Escuela Superior Politécnica del Litoral.

[4]. LONDOÑO, N., (2006). "*Algoritmos Genéticos*", Universidad Nacional de Colombia.

[5]. REEVES, C. Y ROWE, J., (2003). "*Genetic* **Algorithms Principles and Perspectives",** Kluwer Academics Publishers, Primera Edición.

[6]. PSP Lib., http://129.187.106.231/psplib/

[7]. Wolfram Research Inc., www.wolfram.com

matemática
UNA PUBLICACIÓN DE LA FCNM – ESPOL

Abril 2014 Volumen 12 Número 1

CONTENIDO

UNA PUBLICACIÓN DE LA FCNM – ESPOL