



Eduardo Espinoza Ramos
Graduado y Titulado en Matemática Pura.
Catedrático de las principales
Universidades de la Capital

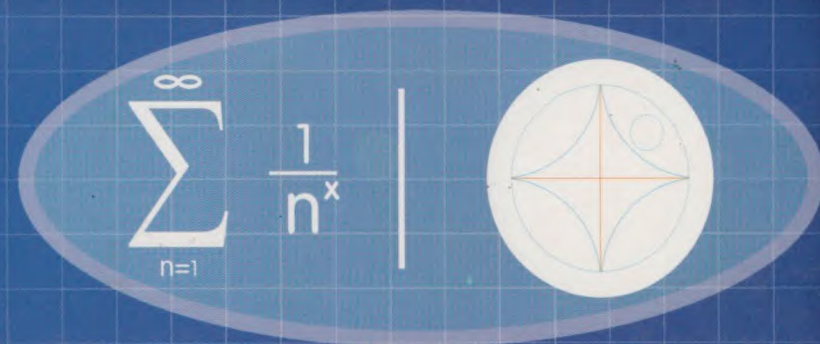
www.Solucionarios.Net



- Solucionario de Análisis Matemático por Demidovich tomo III
- Solucionario de Análisis Matemático por G.Berman, tomo I, II
- Solucionario de Leithold 2da. Parte.
- Geometría Vectorial en $\mathbb{R}^2$
- Geometría Vectorial en $\mathbb{R}^3$

Solucionario DEMIDOVICH

ANÁLISIS MATEMÁTICO



www.Solucionarios.net
 Eduardo Espinoza Ramos

Lima - Perú

ByPriale

OBRAS PUBLICADAS

Solucionario DEMIDOVICH TOMO I

TOMO I

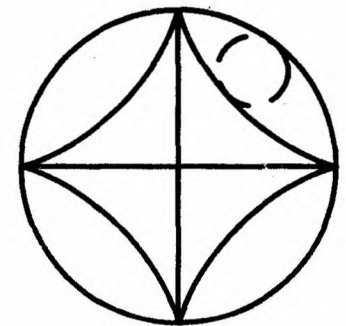
www.solucionarios.net

ANALISIS MATEMATICO I

SOLUCIONARIO DEMIDOVICH

TOMO I

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$



- ♦ INTRODUCCIÓN AL ANALISIS
- ♦ DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES
- ♦ APLICACIÓN DE LA DERIVADA

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

IMPRESO EN EL PERÚ

15 - 02 - 2004

4ta EDICIÓN

DERECHOS RESERVADOS

Este libro no puede reproducirse total ó parcialmente por ningún método gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo los sistemas de fotocopia, registros magnéticos o de alimentación de datos, sin expreso consentimiento del autor y Editor.

RUC

N° 10070440607

Ley de Derechos del Autor

N° 13714

Registro comercial

N° 10716

Escritura Publica

N° 4484

PROLOGO

Se sabe que la humanidad ha avanzado lentamente hacia la conquista de los conocimientos y la mayor de estas es la escritura, con ella la humanidad alcanzó el más alto sitio en la creación; pero tan antiguo como ella, es el concepto de cantidad. Esto nace aún antes de la escritura por eso la ciencia de los números están importante como la vida misma.

DEDICATORIA

El avance tecnológico funda sus bases en los conceptos primarios, lo que estudiados, desarrollados y perfeccionados han llevado al hombre hacia grandes conquistas.

Este libro lo dedico a mis hijos:

La aventura del pensamiento nos ha llevado de la mano con la tecnología a descubrir grandes realidades. Por ello mi deseo es plasmar en las paginas de este primer tomo, en su cuarta edición del solucionario del libro problemas y ejercicios de análisis matemático por B. Demidovich, el planteo fácil a los diversos ejercicios que se presentan, además se incluye una colección de gráficos los que ayudarán eficazmente a la captación de los diferentes problemas.

Mi agradecimiento al lector por la preferencia que brindan a cada una de mis publicaciones, las que emanan del deseo de que encuentren en ellos una ayuda para su avance y desarrollo intelectual.

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos:

RONALD, JORGE y DIANA

que Dios ilumine sus caminos para que

puedan seguir sus sueños de su próximo

INDICE

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS

1.1.	Concepto de Función	1
1.2.	Representación Gráfica de las Funciones Elementales	31
1.3.	Límites	88
1.4.	Infinitésimos e Infinitos	143
1.5.	Continuidad de las Funciones	155

CAPITULO II

DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES

2.1.	Cálculo Directo de Derivadas	173
2.2.	Derivación por Medio de Tablas	187
2.3.	Derivadas de Funciones que no están dadas explícitamente	259
2.4.	Aplicaciones Geométricas Mecánicas de la Derivada	276
2.5.	Derivadas de Orden Superior	306
2.6.	Diferenciales de Primer Orden y de Orden Superior	333
2.7.	Teorema del Valor Medio	349
2.8.	Fórmula de Taylor	354
2.9.	Regla de L'Hospital – Benoulli para el Cálculo de Límites indeterminados	361

CAPITULO III

EXTREMOS DE LAS FUNCIONES Y APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LAS DERIVADAS

3.1.	Extremos de las Funciones de un Argumento	374
3.2.	Dirección de la Concavidad – Puntos de Inflexión	423
3.3.	Asíntotas	435
3.4.	Construcción de las Gráficas de las Funciones por sus puntos Característicos	445

CAPITULO II

DERIVACIÓN DE FUNCIONES

2.1.	Cálculo Directo de Derivadas	173
2.2.	Derivación por Medio de Tablas	187
2.3.	Derivadas de Funciones que no están dadas explícitamente	239
2.4.	Aplicaciones Geométricas Mecánicas de la Derivada	276
2.5.	Derivadas de Orden Superior	308
2.6.	Diferenciales de Primer Orden y de Orden Superior	323
2.7.	Teorías del Valor Medio	349
2.8.	Fórmulas de Taylor	354
2.9.	Regla de L'Hospital – Escorpión para el Cálculo de Límites indeterminados	361

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS

1.1. CONCEPTO DE FUNCIÓN.-

- 1 Demostrar que si a y b son numero reales.

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

Desarrollo

Escribiremos: $a = (a - b) + b$, tomando valor absoluto

$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$, por la desigualdad triangular:

$$\text{Luego: } |a| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \quad \dots (1)$$

$$\text{Además: } |a - b| = |b - a| \geq |b| - |a|, \text{ es decir: } |a - b| \geq |b| - |a| \quad \dots (2)$$

$$\text{Por tanto de (1) y (2) se tiene: } ||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \dots (3)$$

$$\text{por otro lado: } |a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b| \quad \dots (4)$$

$$\text{de donde: } |a - b| \leq |a| + |b|$$

$$\text{Luego de (3) y (4) se tiene: } ||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

- 2 Demostrar las siguientes igualdades:

$$a) |a \cdot b| = |a| |b| \quad b) |a|^2 = a^2$$

$$c) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0 \quad d) \sqrt{a^2} = |a|$$

Desarrollo

a) 1er Caso: Si $a \geq 0$ y $b \geq 0 \Rightarrow |a| = a, |b| = b$ por definición del valor absoluto de donde $|a||b| = ab$

Como $a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0 \Rightarrow |ab| = a \cdot b$

Por definición del valor absoluto

Luego $|a||b| = ab = |ab| \Rightarrow |a||b| = |ab|$

2do. Caso: Si $a \geq 0 \wedge b < 0$

Como: $b < 0 \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow |ab| = |-(ab)| = |a(-b)|$

Como: $-b > 0 \Rightarrow$ por la parte 1ra se tiene:

$|ab| = |a(-b)| = |a||-b| = |a||b| \Rightarrow |ab| = |a||b|$

3er. Caso: Si $a < 0 \wedge b \geq 0$ es en forma análoga al 2do caso y se tiene

$|ab| = |a||b|$

4to. Caso: Si $a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow -a > 0 \wedge -b > 0$

entonces $(-a)(-b) = ab$ aplicando el 1ro y el 2do caso se tiene:

$|ab| = |(-a)(-b)| = |-a||-b| = |a||b|$ por lo tanto $|ab| = |a||b|$

b) $|a|^2 = a^2$

Si $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \Rightarrow |a|^2 = a^2$

Si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a \Rightarrow |a|^2 = (-a)^2 = a^2$

Por tanto $|a|^2 = a^2$

$$c) \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \left| a \cdot \left(\frac{1}{b} \right) \right| = |a| \left| \frac{1}{b} \right| \text{ por la parte (a)}$$

$$\text{además } \left| \frac{1}{b} \right| = |b|^{-1} \text{ por la parte (b)}$$

$$\text{Luego: } \left| \frac{1}{b} \right| = |b|^{-1} = \frac{1}{|b|} \Rightarrow \left| \frac{1}{b} \right| = \frac{1}{|b|}$$

$$\text{Como } \left| \frac{a}{b} \right| = |a| \left| \frac{1}{b} \right| = |a| \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}, \text{ por lo tanto } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$d) \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\text{Si } a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a^2} = a$$

$$\text{Si } a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow \sqrt{(-a)^2} = -a \Rightarrow a^2 = -a$$

$$\text{Luego por lo tanto } \sqrt{a^2} = |a|$$

3

Resolver las inecuaciones.

$$a) \quad |x - 1| < 3$$

$$b) \quad |x + 1| > 2$$

$$c) \quad |2x + 1| < 1$$

$$d) \quad |x - 1| < |x + 1|$$

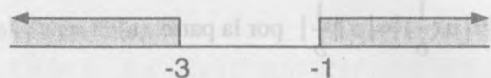
Desarrollo

$$a) \quad \text{Si } |x - 1| < 3 \Rightarrow -3 < x - 1 < 3$$

$$\text{de donde } -2 < x < 4 \Rightarrow x \in (-2, 4)$$

$$b) |x+1| > 2 \Rightarrow x+1 > 2 \vee x+1 < -2$$

$$\Rightarrow x > 1 \text{ ó } x < -3$$



La solución es $x \in <-\infty, -3> \cup <1, +\infty>$

$$c) |2x+1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x+1 < 1$$

$$\Leftrightarrow -2 < 2x < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 0$$

La solución es $x \in <-1, 0>$

$$d) |x-1| < |x+1| \Rightarrow |x-1|^2 < |x+1|^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow 4x > 0 \Rightarrow x > 0$$

Luego la solución es $x \in <0, +\infty>$

$$4 \text{ Hallar } f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3) \text{ y } f(4) \text{ si: } f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Desarrollo

$$\text{Como } f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 11(-1) - 6 = -24$$

$$f(0) = (0)^3 - 6(0)^2 + 11(0) - 6 = -6$$

$$f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 0$$

$$f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6 = 0$$

$$f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 11(3) - 6 = 0$$

$$f(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 11(4) - 6 = 6$$

$$5 \text{ Hallar } f(0), f(-\frac{3}{4}), f(-x), f(\frac{1}{x}), \frac{1}{f(x)} \text{ Si } f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

Desarrollo

$$\text{Como } f(x) = \sqrt{1+x^2} \text{ entonces } f(0) = \sqrt{1+0^2} = 1$$

$$f(-\frac{3}{4}) = \sqrt{1+(-\frac{3}{4})^2} = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} = \sqrt{1+x^2}$$

$$f(\frac{1}{x}) = \sqrt{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$6 \text{ Sea } f(x) = \arccos(\log x). \text{ Hallar } f(\frac{1}{10}), f(1) \text{ y } f(10)$$

Desarrollo

$$\text{Como } f(x) = \arccos(\log x) \text{ entonces}$$

$$f(\frac{1}{10}) = \arccos(\log \frac{1}{10}) = \arccos(-\log 10) = \arccos(-1) = \pi$$

$$f(1) = \arccos(\log 1) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$f(10) = \arccos(\log 10) = \arccos(1) = 0$$

- 7 La función $f(x)$ es lineal. Hallar dicha función si: $f(-1) = 2$ y $f(2) = -3$.

Desarrollo

Como $f(x)$ es lineal $\Rightarrow f(x) = ax + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$

$$\text{Luego } \begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(2) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = -a + b \\ -3 = 2a + b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se tiene los valores de: $a = -\frac{5}{3}$, $b = \frac{1}{3}$

$$\therefore f(x) = -\frac{5x}{3} + \frac{1}{3}$$

- 8 Hallar la función entero y racional de segundo grado $f(x)$ si $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ y $f(3) = 5$.

Desarrollo

Si $f(x)$ es función entero y racional de segundo grado entonces $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes por determinarse.

$$\text{Como } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f(3) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = c \\ 0 = a + b + c \\ 5 = 9a + 3b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 9a + 3b = 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se tiene $a = \frac{7}{6}$, $b = -\frac{13}{6}$

Luego como $f(x) = ax^2 + bx + c$, se tiene $f(x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{13}{6}x + 1$

- 9 Se sabe que: $f(4) = -2$ y $f(5) = 6$. Hallar el valor aproximado de $f(4.3)$, considerando la función $f(x)$, en el segmento $4 < x < 5$, es lineal. (interpolación lineal de funciones).

Desarrollo

$f(x)$ es lineal $\Rightarrow f(x) = ax + b$

$$\text{Como } \begin{cases} f(4) = -2 \\ f(5) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = -2 \\ 5a + b = 6 \end{cases} \text{ resolviendo el sistema se tiene } a = 8, b = -34$$

Como $f(x) = ax + b \Rightarrow f(x) = 8x - 34$

Luego $f(4.3) = 8(4.3) - 34 = 0.4$

- 10 Escribir una sola fórmula que exprese la función: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ empleando del signo del valor absoluto.

Desarrollo

$$\text{Como } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si $x \leq 0 \Rightarrow$ para $f(x) = 0$ se tiene $\frac{x + |x|}{2}$

Si $x > 0 \Rightarrow$ para $f(x) = x$ se tiene $\frac{x + |x|}{2}$

$$\text{Luego: } f(x) = \frac{|x| + x}{2}$$

- 11 Determinar el campo de existencia de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x+1}$

Desarrollo

El campo de existencia de una función también se conoce con el nombre de dominio de la función.

Luego como $y = \sqrt{x+1}$ para que esté bien determinado debe cumplirse que $x+1 \geq 0$ de donde $x \geq -1 \Rightarrow x \in [-1, +\infty)$

El campo de existencia de la función es $-1 \leq x \leq \infty$

b) $y = \sqrt[3]{x+1}$

Desarrollo

Como $y = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow x+1$ puede ser positivo, negativo o cero, luego

el campo de existencia es: $-\infty < x < +\infty$

12

$$y = \frac{1}{4-x^2}$$

Desarrollo

Los valores de x para que $y = \frac{1}{4-x^2}$ esté bien determinado es:

$$4-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

Luego el campo de existencia de la función es: $<-\infty, -2> \cup <-2, 2> \cup <2, +\infty>$

13

a) $y = \sqrt{x^2-2}$

Desarrollo

Para que $y = \sqrt{x^2-2}$ esté bien determinada debe cumplirse:

$$x^2-2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow x \geq \sqrt{2} \vee x \leq -\sqrt{2}$$

Luego el campo de existencia es: $<-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty>$

b) $y = x\sqrt{x^2-2}$

Desarrollo

Para que $y = x\sqrt{x^2-2}$ esté definida:

$$x^2-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{2} \vee x \leq -\sqrt{2}$$

también para $x=0$, $y = x\sqrt{x^2-2}$ está definida

Luego el campo de existencia es: $x=0, |x| \geq \sqrt{2}$

14

$$y = \sqrt{2+x-x^2}$$

Desarrollo

Para que $y = \sqrt{2+x-x^2}$ esté bien definida debe cumplirse que $2+x-x^2 \geq 0$, es decir: $x^2-x-2 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) \leq 0$



Luego el campo de existencia es: $[-1, 2]$

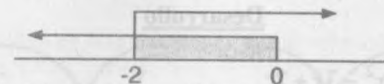
15

$$y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$$

Desarrollo

Para que $y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$ esté definida, debe cumplirse que:

$$-x \geq 0 \wedge 2+x > 0, \text{ de donde: } x \leq 0 \wedge x > -2$$



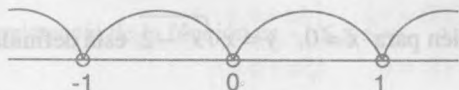
Luego el campo de existencia es $[-2, 0]$

16 $y = \sqrt{x - x^3}$

Desarrollo

Para que esté bien definida debe cumplirse que:

$$x - x^3 \geq 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) \leq 0 \text{ de donde:}$$



luego el campo de existencia es: $<-\infty, -1] \cup [0, 1]$

17 $y = \log\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$

Desarrollo

Para que $y = \log\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ esté bien definida debe cumplirse que: $\frac{2+x}{2-x} > 0$

de donde $(2+x)(2-x) > 0$, pero $x \neq 2$

$\Rightarrow (x+2)(x-2) < 0$, de donde se tiene:



Luego el campo de existencia es $<-2, 2>$

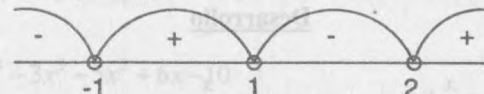
18 $y = \log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}\right)$

Desarrollo

Para que $y = \log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}\right)$ esté bien definida debe cumplirse que:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} > 0 \text{ de donde } (x^2 - 3x + 2)(x+1) > 0 \text{ para } x \neq -1$$

$(x-2)(x-1)(x+1) > 0$, entonces:



Luego el campo de existencia es: $<-1, 1> \cup <2, +\infty>$

19

$$y = \arccos\left(\frac{2x}{1+x}\right)$$

Desarrollo

$$y = \arccos\left(\frac{2x}{1+x}\right) \Rightarrow \cos y = \frac{2x}{1+x}$$

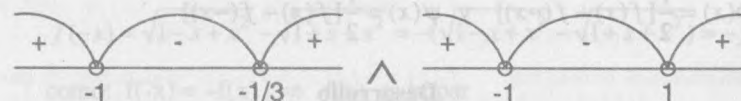
pero se conoce que: $-1 \leq \cos y \leq 1$, de donde $-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1$

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{1+x} \wedge \frac{2x}{1+x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{2x}{1+x} + 1 \wedge \frac{2x}{1+x} - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{3x+1}{1+x} \wedge \frac{x-1}{x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (3x+1)(1+x) \wedge (x-1)(x+1) \leq 0, x \neq -1$$



Luego $(-\infty, -1) \cup [-\frac{1}{3}, +\infty) \cap (-1, 1]$

20

$$y = \arcsen(\log \frac{x}{10})$$

Desarrollo

$$y = \arcsen(\log \frac{x}{10}) \Rightarrow \text{sen } y = \log \frac{x}{10}$$

como $-1 \leq \text{sen } y \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \log \frac{x}{10} \leq 1$ además $\frac{x}{10} > 0 \Rightarrow x > 0$

Luego $\frac{1}{e} \leq \frac{x}{10} \leq e \Rightarrow \frac{10}{e} \leq x \leq 10e \Rightarrow x \in [\frac{10}{e}, 10e]$

21

$$y = \sqrt{\text{sen } 2x}$$

Desarrollo

Para que $y = \sqrt{\text{sen } 2x}$ esté bien determinado debe cumplirse que: $1 \geq \text{sen } 2x \geq 0$

Como $0 \leq \text{sen } 2x \leq 1 \Rightarrow \arcsen 0 \leq 2x \leq \arcsen 1$

$$\Rightarrow 0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \text{ de donde se tiene:}$$

$$k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ donde } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

22

Sea $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$. Hallar:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad \text{y} \quad \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

Desarrollo

Como $\begin{cases} f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10 \\ f(-x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 10 \end{cases}$ Luego:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = 2x^4 - 5x^2 - 10$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10 \\ f(-x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 10 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \frac{1}{2}(-6x^2 + 12x) \Rightarrow \psi(x) = -3x^2 + 6x$$

23

La función $f(x)$, determinada en el campo simétrico $-1 < x < 1$, se denomina par si $f(-x) = f(x)$ e impar si $f(-x) = -f(x)$. Determinar cuales de las siguientes funciones son pares y cuales impares:

a) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$

Desarrollo

Como $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{2}(a^{-x} + a^x)$

Luego $f(x) = f(-x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ es par

b) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

Desarrollo

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$$

$$f(-x) = \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2} = -(\sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2}) = -f(x)$$

como: $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ es impar

$$c) f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

Desarrollo

Como $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$, entonces:

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x+1)^2} + \sqrt[3]{(-x-1)^2} = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2} = f(x)$$

Luego $f(-x) = f(x)$ entonces la función $f(x)$ es par.

$$d) f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Desarrollo

$$\text{Como } f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow f(-x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$$

Como $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ la función es impar

- 24 Demostrar que cualquier función $f(x)$, determinado en el intervalo $-1 < x < 1$, puede representarse como la suma de una función par y otra impar.

Desarrollo

A la función $f(x)$ escribiremos así: $f(x) = f(x) + \frac{1}{2}f(-x) - \frac{1}{2}f(-x)$

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(-x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

definiremos la función: $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ que es par, es decir:

$$f_1(-x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = f_1(x) \Rightarrow f_1(x) \text{ es par}$$

ahora definiremos la función $f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ que es impar, es decir:

$$f_2(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(-(-x))) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -f_2(x) \Rightarrow f_2(x) \text{ es impar}$$

por lo tanto $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ es la suma de una función par y otra impar.

- 25 Demostrar que el producto de dos funciones pares o de dos impares es una función par, mientras que el producto de una función par por otra impar es una función impar.

Desarrollo

Sea $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones pares por demostrar que $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ es par como $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son pares.

$$\begin{cases} f_1(-x) = f_1(x) \\ f_2(-x) = f_2(x) \end{cases}$$

$$f(-x) = (f_1 \cdot f_2)(-x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = f(x) \text{ entonces}$$

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \text{ es par.}$$

Si $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$ donde $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son funciones impares por demostrar que $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$ es par

$$\text{Como } g_1(x) \text{ y } g_2(x) \text{ son impares} \Rightarrow \begin{cases} g_1(-x) = -g_1(x) \\ g_2(-x) = -g_2(x) \end{cases}$$

$$g(-x) = (g_1 \cdot g_2)(-x) = g_1(-x) \cdot g_2(-x) = [-g_1(x)][-g_2(x)]$$

$$g(-x) = g_1(x) \cdot g_2(x) = g(x) \Rightarrow g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \text{ es par}$$

- 26 La función $f(x)$ se llama periódica, si existe un número positivo T (periodo de la función) tal que $f(x + T) = f(x)$ para todos los valores de x pertenecientes al campo de existencia de la función $f(x)$. Determinar cuales de las funciones que se enumeran a continuación son periódicas y hallar el periodo mínimo T de las mismas.

a) $f(x) = 10 \sin 3x$

Desarrollo

$$\text{Como } f(x) = 10 \sin 3x \Rightarrow f(x + T) = 10 \sin(3x + 3T)$$

$$\text{Como } \sin x = \sin(x + 2\pi) \Rightarrow 3T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Luego } f(x) = 10 \sin 3x \text{ es periódica y } T = \frac{2\pi}{3}$$

b) $f(x) = a \sin(\lambda x) + b \cos(\lambda x)$

Desarrollo

$$\text{Sea } f(x) = a \sin(\lambda x) + b \cos(\lambda x) \text{ entonces:}$$

$$f(x + T) = a \sin(\lambda x + \lambda T) + b \cos(\lambda x + \lambda T)$$

$$\text{Como } \sin x = \sin(x + 2\pi) \text{ y } \cos x = \cos(x + 2\pi) \text{ de donde}$$

$$\lambda T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\text{por lo tanto } f(x) = a \sin(\lambda x) + b \cos(\lambda x) \text{ es periódica, donde el periodo}$$

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}$$

c) $f(x) = \sqrt{\lg x}$

Desarrollo

$$f(x) = \sqrt{\lg x} \Rightarrow f(x + T) = \sqrt{\lg(x + T)}$$

$$\text{Como } \lg x = \lg(x + \pi) \Rightarrow T = \pi$$

$$\text{Para que } f(x) = f(x + T), \text{ luego: } f(x) = \sqrt{\lg x} \text{ es periódica con } T = \pi$$

d) $f(x) = \sin^2 x$

Desarrollo

$$\text{Se conoce que } \sin(x + \pi) = \sin x \cdot \cos \pi + \cos x \cdot \sin \pi = -\sin x$$

$$\text{De donde } \sin^2(x + \pi) = \sin^2 x \text{ de donde:}$$

$$f(x) = f(x + \pi) \text{ entonces la función } f(x) = \sin^2 x \text{ es periódica con periodo } T = \pi.$$

e) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

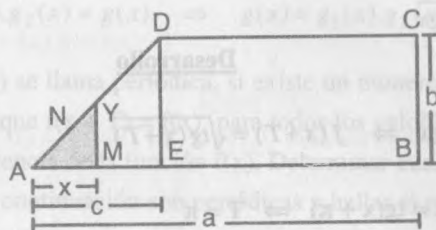
Desarrollo

$$\text{Se conoce que } \sqrt{x} \neq \sqrt{x} + \sqrt{T} \text{ para } T \neq 0$$

$$\text{Luego } f(x) = \sin(\sqrt{x}) \Rightarrow f(x + T) = \sin(\sqrt{x + T})$$

$$\text{Por tanto } f(x) \neq f(x + T) \text{ la función: } f(x) = \sin(\sqrt{x}) \text{ no es periódica}$$

- 27 Expresar la longitud del segmento $y = MN$ y el área S de la figura AMN como función de $x = AM$ construir las gráficas de estas funciones.

**Desarrollo**

En el $\triangle ADE$, "x" varía desde A hasta E, es decir:

$0 \leq x \leq c$, por semejanza de triángulos tenemos:

$\triangle AMN \sim \triangle ADE$, de donde: $\frac{y}{b} = \frac{x}{c} \Rightarrow y = \frac{bx}{c}$ para $0 \leq x \leq c$, ahora

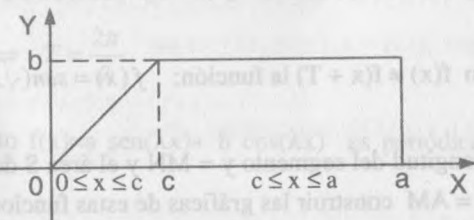
veremos para los "x" que varía desde E hasta B, $c < x \leq a$ se tiene $y = b$,

$$\text{luego: } y = \begin{cases} \frac{b}{c}x & \text{para } 0 \leq x \leq c \\ b & \text{para } c < x \leq a \end{cases}$$

ahora veremos para el área S de la región si $0 \leq x \leq c \Rightarrow S = \frac{xy}{2}$

Pero $y = \frac{b}{c}x$, reemplazando se tiene: $S = \frac{xy}{2}$ si $0 \leq x \leq c$

Si $c \leq x \leq a \Rightarrow S = bx - \frac{bc}{2}$, para $c < x \leq a$ La gráfica es:

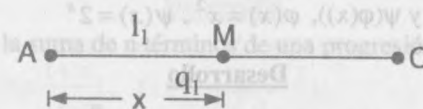


- 28 Las densidades lineales (es decir, la masa de una unidad de longitud) de una barra $AB = l$, en sus porciones $AC = l_1$, $CD = l_2$ y $DB = l_3$, ($l_1 + l_2 + l_3 = l$) son respectivamente iguales a: q_1, q_2, q_3 , expresar la masa m de una porción variable $AM = x$ de esta misma barra, como función de x, construir la gráfica de esta función.

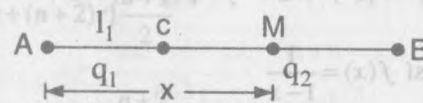
Desarrollo

Consideremos primero: $p = \frac{m}{l} \Rightarrow m = lp$

Luego si $0 \leq x \leq l_1$ entonces $m = xq_1$

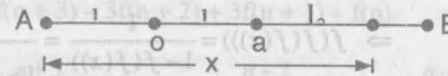


Si $l_1 < x \leq l_1 + l_2 \Rightarrow m = l_1q_1 + q_2(x - l_1)$



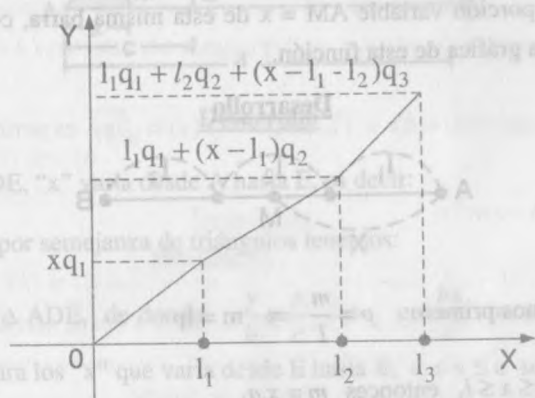
Si $l_1 + l_2 < x < l_1 + l_2 + l_3$ entonces: $m = l_1q_1 + l_2q_2 + (x - (l_1 + l_2))q_3$

$m = l_1q_1 + l_2q_2 + (x - l_1 - l_2)q_3$



Resumiendo se tiene: g

$$m = \begin{cases} xq_1 & \text{si } 0 \leq x \leq l_1 \\ l_1q_1 + (x-l_1)q_2 & \text{si } l_1 < x \leq l_1 + l_2 \\ l_1q_1 + l_2q_2 + (x-l_1-l_2)q_3 & \text{si } l_1 + l_2 < x \leq l_1 + l_2 + l_3 = l \end{cases}$$



- 29 Hallar: $\varphi(\psi(x))$ y $\psi(\varphi(x))$, $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 2^x$

Desarrollo

Como $\psi(x) = 2^x$ y $\varphi(x) = x^2$ entonces:

$$\varphi(\psi(x)) = (\psi(x))^2 = (2^x)^2 = 2^{2x} \quad \text{y} \quad \psi(\varphi(x)) = 2^{\varphi(x)} = 2^{x^2}$$

- 30 Hallar $f(f(f(x)))$ si $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Desarrollo

$$\text{Como } f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f(f(x)) = \frac{1}{1-f(x)}$$

$$\Rightarrow f(f(f(x))) = \frac{1}{1-f(f(x))} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-f(x)}} = \frac{1-f(x)}{-f(x)}$$

$$\text{es decir: } f(f(f(x))) = \frac{1-f(x)}{-f(x)} = \frac{1-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{1-x}} = \frac{-x}{-1} = x. \quad \text{Luego } f(f(f(x))) = x$$

- 31 Hallar $f(x+1)$ si $f(x-1) = x^2$

Desarrollo

$$\text{Como } f(x-1) = x^2 \Rightarrow f(x+1) = f[(x+2)-1] = (x+2)^2$$

$$\text{Es decir: } f(x+1) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

- 32 Sea $f(n)$ la suma de n miembros de una progresión aritmética. Demostrar que $f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0$.

Desarrollo

Como $f(n)$ es la suma de n términos de una progresión aritmética. Entonces:

$$f(n) = (2a + (n-1)r) \frac{n}{2} \quad \text{donde "a" es el primer término y "r" la razón}$$

$$f(n+3) = [2a + (n+2)r] \frac{n+3}{2}$$

$$f(n+2) = [2a + (n+1)r] \frac{n+2}{2}$$

$$f(n+1) = [2a + nr] \frac{n+1}{2}$$

calculemos $f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n)$

$$[2a + (n+2)r] \frac{n+3}{2} - 3[2a + (n+1)r] \frac{n+2}{2} + 3[2a + nr] \frac{n+1}{2} - [2a + (n-1)r] \frac{n}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[(2an + 6a + n^2r + 5nr + 6r) - 3(2an + 4a + n^2r + 3nr + 2r) + 3(2an + 2a + n^2r + nr) - (2an + n^2r - nr)] = \frac{1}{2}[(0) + (0) + (0)] = 0$$

En consecuencia: $f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0$

- 33 Demostrar que, si $f(x) = kx + b$ y los números x_1 , x_2 y x_3 constituyen una progresión aritmética, también formaran una progresión aritmética los números $f(x_1)$, $f(x_2)$ y $f(x_3)$.

Desarrollo

x_1 , x_2 y x_3 constituyen una progresión aritmética $\Rightarrow x_1, x_2 = x_1 + r$, $x_3 = x_1 + 2r$ donde r es la razón, probaremos que $f(x_1)$, $f(x_2)$ y $f(x_3)$ constituye una progresión aritmética.

Como $f(x) = kx + b$ entonces $f(x_1) = kx_1 + b$

$$f(x_2) = f(x_1 + r) = k(x_1 + r) + b = kx_1 + b + kr$$

$$f(x_3) = f(x_1 + 2r) = k(x_1 + 2r) + b = kx_1 + b + 2kr$$

$$\text{Luego: } \frac{kx_1 + b}{f(x_1)} \quad \frac{kx_1 + b + kr}{f(x_2)} \quad \frac{kx_1 + b + 2kr}{f(x_3)}$$

constituye una progresión aritmética, donde kr es la razón.

- 34 Demostrar que, si $f(x)$ es una función exponencial, es decir $f(x) = a^x$, ($a < 0$) y los números x_1 , x_2 y x_3 constituyen una progresión aritmética, los números $f(x_1)$, $f(x_2)$ y $f(x_3)$ forma una progresión aritmética.

Desarrollo

Como x_1 , x_2 y x_3 constituye una progresión aritmética $x_1, x_2 = x_1 + r$, $x_3 = x_1 + 2r$ donde r es la razón

$$\text{Como } f(x) = a^x \text{ entonces: } \begin{cases} f(x_1) = a^{x_1} \\ f(x_2) = f(x_1 + r) = a^{x_1 + r} = a^r \cdot a^{x_1} \\ f(x_3) = f(x_1 + 2r) = a^{x_1 + 2r} = a^{2r} \cdot a^{x_1} \end{cases}$$

$$\text{Luego: } \frac{a^{x_1}}{f(x_1)}, \frac{a^r \cdot a^{x_1}}{f(x_2)}, \frac{a^{2r} \cdot a^{x_1}}{f(x_3)}$$

Constituyen una progresión geométrica cuya razón es a^r .

- 35 Sea $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Demostrar que $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

Desarrollo

$$\text{Como } f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), f(y) = \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$f(x) + f(y) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \log\left(\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}\right) \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) &= \log\left(\frac{1 + \frac{x+y}{1+xy}}{1 - \frac{x+y}{1+xy}}\right) = \log\left(\frac{1 + xy + x + y}{1 + xy - x - y}\right) \\ &= \log\left(\frac{(1+x) + (1+y)y}{(1-x) - (1-x)y}\right) = \log\left(\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}\right) \quad \dots (2) \end{aligned}$$

comparando (1) y (2) se tiene: $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

- 36 Sea $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ y $\psi(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$. Demostrar que:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + \psi(x) \cdot \psi(y) \quad \text{y} \quad \psi(x+y) = f(x) \cdot \psi(y) + f(y) \cdot \psi(x)$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-(x+y)}) = \frac{1}{2}(a^x \cdot a^y + a^{-x} \cdot a^{-y}) \\ &= \frac{a^{x+y}}{2} + \frac{a^{-x-y}}{2} = \frac{a^x \cdot a^y}{2} + \frac{a^{-x} \cdot a^{-y}}{2} \\ &= \frac{1}{4}(a^x \cdot a^y + a^{-x} \cdot a^y + a^x \cdot a^{-y} + a^{-x} \cdot a^{-y}) + \\ &\quad + \frac{1}{4}(a^x \cdot a^y - a^{-x} \cdot a^y - a^x \cdot a^{-y} + a^{-x} \cdot a^{-y}) \\ &= \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(a^y + a^{-y}) + \frac{1}{2}(a^x - a^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(a^y - a^{-y}) \\ &= f(x) \cdot f(y) + \psi(x) \cdot \psi(y) \end{aligned}$$

- 37 Hallar $f(-1)$, $f(0)$ y $f(1)$ si: $f(x) = \begin{cases} \arcsen x, & \text{para } -1 \leq x \leq 0 \\ \arctag x, & \text{para } 0 < x < +\infty \end{cases}$

Desarrollo

$$f(-1) = \arcsen(-1) = -\arcsen(1) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} f(0) = \arcsen(0) = 0 \\ f(1) = \arctag(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

- 38 Determinar las raíces (ceros) y los campos de valores positivos y de valores negativos de la función y; si:

a) $y = 1 + x$

Desarrollo

Para que $y = 0$ se tiene que $1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$, luego $y = 0$ cuando $x = -1$

El campo de valores positivos es cuando $y > 0$, es decir $1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$

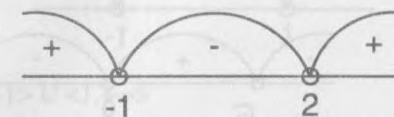
y el campo de valores negativos es cuando $y < 0$ es decir $1 + x < 0 \Rightarrow x < -1$

Luego $y < 0$, cuando $x < -1$

b) $y = 2 + x - x^2$

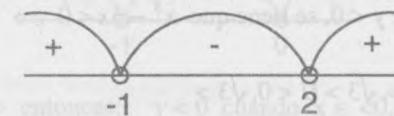
Desarrollo

Para que $y = 0$ se tiene que $2 + x - x^2 = 0$, de donde: $x = -1$, $x = 2$, luego: $y = 0$, cuando $x = \{-1, 2\}$ y para los valores positivos $y > 0$ se tiene: $2 + x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$, de donde se tiene:



Luego $x \in \langle -1, 2 \rangle$. Entonces: $y > 0$ cuando $x \in \langle -1, 2 \rangle$ y para los valores negativos $y < 0$ se tiene: $2 + x - x^2 < 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0$

$(x - 2)(x + 1) > 0$, de donde se tiene:



Luego $x \in <-\infty, -1> \cup <2, +\infty>$ entonces:

$y < 0$ cuando $x \in <-\infty, -1> \cup <2, +\infty>$

c) $y = 1 - x + x^2$

Desarrollo

Para que $y = 0$ se tiene que $1 - x + x^2 = 0$ de donde $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, luego $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y = 0$. Como las raíces no son reales entonces:

$$1 - x + x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0 \text{ para } -\infty < x < +\infty$$

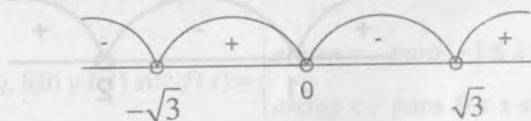
d) $y = x^3 - 3x$

Desarrollo

Para que $y = 0$, se tiene $x^3 - 3x = 0$, de donde: $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$

Luego $y = 0$ cuando $x = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$

Para $y > 0$, se tiene $x^3 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0$

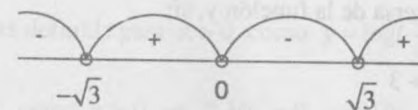


Luego $x \in <-\sqrt{3}, 0> \cup <\sqrt{3}, +\infty>$, entonces:

$y > 0$ cuando $x \in <-\sqrt{3}, 0> \cup <\sqrt{3}, +\infty>$

para que $y < 0$, se tiene que $x^3 - 3x < 0 \Rightarrow x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) < 0$

$x \in <-\infty, \sqrt{3}> \cup <0, \sqrt{3}>$



Luego $x \in <-\infty, \sqrt{3}> \cup <0, \sqrt{3}>$ entonces:

$y < 0$, cuando $x \in <-\infty, \sqrt{3}> \cup <0, \sqrt{3}>$

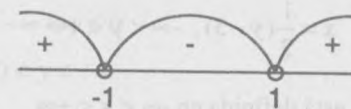
e) $y = \log\left(\frac{2x}{1+x}\right)$

Desarrollo

Para que $y = 0$, debe ocurrir: $\frac{2x}{1+x} = 1$ de donde $x = 1$, luego: cuando $x = 1$

Para que $y > 0$ ocurrirá cuando $\frac{2x}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x}{x+1} - 1 > 0$ de donde:

$$\frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) > 0$$



luego $x \in <-\infty, -1> \cup <1, +\infty>$

para que $y < 0$ debe ocurrir que $0 < \frac{2x}{1+x} < 1$

de donde $0 < 2x(1+x) < (1+x)^2$ $0 < 2x(1+x) \wedge x^2 < 1$



luego $x \in <0, 1>$ entonces: $y < 0$ cuando $x \in <0, 1>$

39 Hallar la inversa de la función y, si:

a) $y = 2x + 3$

b) $y = x^2 - 1$

c) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$

d) $y = \log\left(\frac{x}{2}\right)$

e) $y = \text{arctag}(3x)$

¿En qué campo estarán definidas estas funciones inversas?

Desarrollo

a) Como $y = 2x + 3$, esta función está definida en $-\infty < x < +\infty$, despejamos x es decir:

$$x = \frac{1}{2}(y-3), -\infty < x < +\infty \text{ como } x = \frac{1}{2}(y-3) \Rightarrow -\infty < \frac{1}{2}(y-3) < +\infty$$

$$\Rightarrow -\infty < y-3 < +\infty \Rightarrow -\infty < y < +\infty$$

$$\text{Entonces: } x = \frac{1}{2}(y-3), -\infty < y < +\infty$$

b) $y = x^2 - 1$ está definida en $-\infty < x < +\infty$

$$x^2 = y+1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1} \text{ para } x = \sqrt{y+1} \text{ se tiene:}$$

$$0 < \sqrt{y+1} \leq \infty \text{ de donde } -\infty < x < +\infty$$

$$\text{para } x = -\sqrt{y+1} \text{ se tiene } -\infty < -\sqrt{y+1} \leq 0 \text{ de donde: } -1 \leq y < +\infty$$

$$\text{luego } x = \sqrt{y+1} \text{ y } x = -\sqrt{y+1} \text{ para } -1 \leq y < +\infty$$

c) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$, en forma análoga al caso anterior: $x = \sqrt[3]{1-y^3}$, $-\infty < y < +\infty$

d) $y = \log\left(\frac{x}{2}\right)$ está definida para $x > 0$ como $y = \log\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\Rightarrow x = 2 \cdot 10^y \text{ como } x > 0 \Rightarrow 2 \cdot 10^y > 0 \Rightarrow 10^y > 0$$

$$-\infty < y < +\infty \text{ entonces: } x = 2 \cdot 10^y \text{ para } -\infty < y < +\infty$$

e) $y = \text{arctg } 3x$, en forma análoga a los casos anteriores.

$$y = \text{arctg } 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{tag } y; \text{ para } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

40 Hallar la inversa de: $y = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Desarrollo

$$\text{Si } x \leq 0 \Rightarrow y = x \Rightarrow x = y \text{ para } -\infty < y \leq 0$$

$$\text{Si } x > 0 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \text{ para } y > 0$$

$$\text{Luego } x = \begin{cases} y & \text{si } -\infty < y \leq 0 \\ \sqrt{y} & \text{si } 0 < y < +\infty \end{cases}$$

41 Escribir las funciones que se dan a continuación en forma de cadena de igualdades, de modo que cada una de los eslabones contenga una función elemental simple (potencial, exponencial, trigonométrica, etc.).

a) $y = (2x-5)^{10}$

Desarrollo

$$\text{Como } y = (2x-5)^{10} \Rightarrow y = u^{10} \text{ donde } u = 2x-5$$

b) $y = 2^{\cos x}$

Desarrollo

Como $y = 2^{\cos x} \Rightarrow y = 2^u$, donde $u = \cos x$

c) $y = \log(\operatorname{tag} \frac{x}{2})$

Desarrollo

Como $y = \log(\operatorname{tag} \frac{x}{2}) \Rightarrow y = \log(u)$ donde $u = \operatorname{tg}(v)$ y $v = \frac{x}{2}$

d) $y = \operatorname{arcsen}(3^{-x^2})$

Desarrollo

Como $y = \operatorname{arcsen}(3^{-x^2}) \Rightarrow y = \operatorname{arcsen} u$ de donde $u = 3^v$ y $v = -x^2$

- 42 Escribir en forma de una igualdad las siguientes funciones compuestas, dadas mediante una cadena de igualdades.

a) $y = u^2$; $u = \sin x$

Desarrollo

Como $u = \sin x$, $y = u^2 \Rightarrow y = \sin^2 x$

b) $y = \operatorname{arctg} u$, $u = \sqrt{v}$, $v = \log x$

Desarrollo

Como $u = \sqrt{v} \Rightarrow y = \operatorname{arctg} \sqrt{v}$ donde $v = \log x$

Entonces $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{\log x})$

c) $y = \begin{cases} 2u & \text{si } u \leq 0 \\ 0 & \text{si } u > 0 \end{cases} \quad u = x^2 - 1$

Desarrollo

Para $u \leq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1$

para $u > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1$

luego como $u = x^2 - 1$ se tiene: $y = \begin{cases} 2(x^2 - 1) & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

- 43 Escribir en forma explícitas las funciones y , dadas por las ecuaciones:

a) $x^2 - \arccos y = \pi$

b) $10^x + 10^y = 10$

c) $x + |y| = 2y$

Hallar los campos de definición de las funciones implícitas dadas

Desarrollo

a) $x^2 - \arccos y = \pi \Rightarrow \arccos y = x^2 - \pi$

$$y = \cos(x^2 - \pi) = \cos x^2 \cdot \cos \pi + \sin x^2 \cdot \sin \pi$$

$$y = -\cos x^2 \quad \text{para } \sqrt{\pi} \leq |x| \leq \sqrt{2\pi}$$

b) $10^x + 10^y = 10 \Rightarrow 10^y = 10 - 10^x \Rightarrow y = \log(10 - 10^x), -\infty < x < 1$

1.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES.-

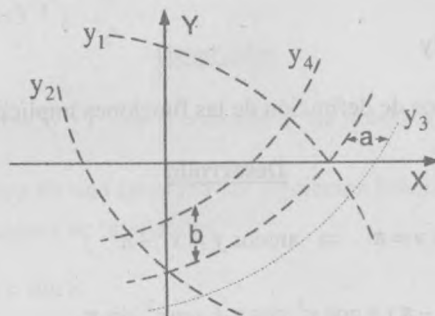
La construcción de las gráficas se hace mediante una tabulación y enseguida uniendo dichos puntos.

Si partimos de la gráfica $y = f(x)$ con ayuda de construcciones geométricas elementales obtendremos las gráficas de las funciones:

- 1 $y_1 = -f(x)$, que es la representación simétrica de la gráfica respecto al eje OX.

- 2 $y_2 = f(-x)$, que es la representación simétrica de la gráfica respecto al eje OX.
- 3 $y_3 = f(x-a)$, que es la misma gráfica desplazada a lo largo del eje OX en la magnitud a.
- 4 $y_4 = f(x) + b$, que es la misma gráfica desplazada a lo largo del eje OY en la magnitud b.

Haremos una representación de todo esto.



Construir las gráficas de las funciones lineales (L. Recta)

- 44 $y = kx$ si $k = 0, 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2$

Desarrollo

Como $y = kx$

Para $k = 0 \Rightarrow y = 0$

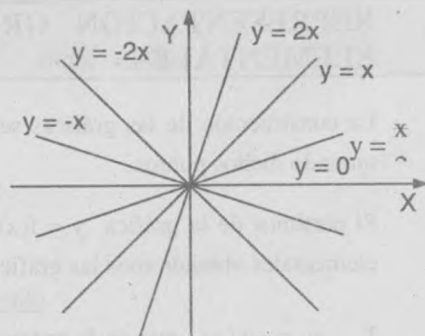
$k = 1 \Rightarrow y = x$

$k = 2 \Rightarrow y = 2x$

$k = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2}$

$k = -1 \Rightarrow y = -x$

$k = -2 \Rightarrow y = -2x$



- 45 $y = x + b$, si $b = 0, 1, 2, -1, -2$

Desarrollo

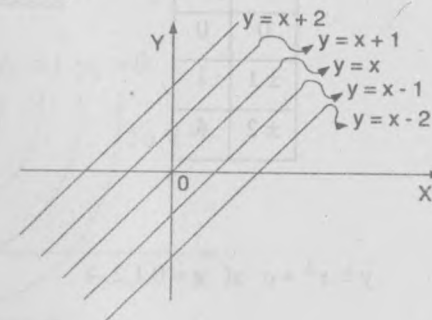
Para $b = 0 \Rightarrow y = x$

$b = 1 \Rightarrow y = x + 1$

$b = 2 \Rightarrow y = x + 2$

$b = -1 \Rightarrow y = x - 1$

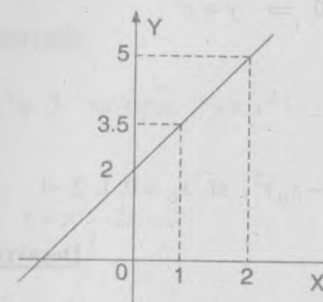
$b = -2 \Rightarrow y = x - 2$



- 46 $y = 1.5x + 2$

Desarrollo

x	y
0	2
1	3.5
2	5



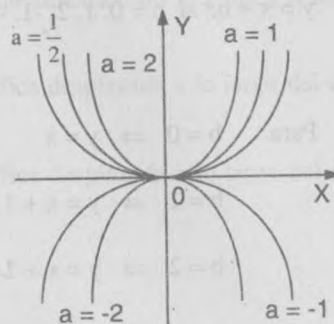
Construir las gráficas de las siguientes funciones racionales enteras de 2do grado (parábola).

- 47 $y = ax^2$, si $a = 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2, 0$

Desarrollo

Para $a = 1 \Rightarrow y = x^2$

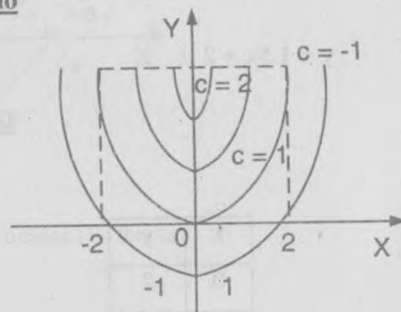
x	y
0	0
± 1	1
± 2	4



48 $y = x^2 + c$ si $c = 0, 1, 2, -1$

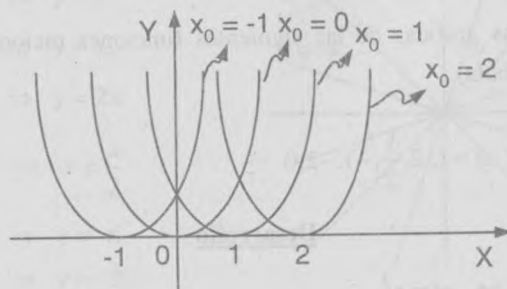
Desarrollo

Si $c = 0 \Rightarrow y = x^2$



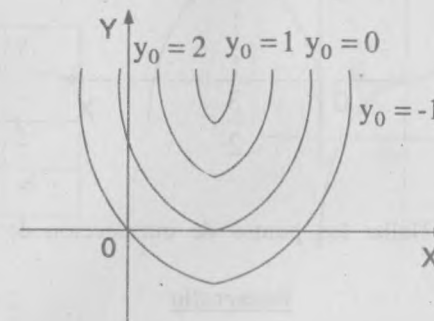
49 $y = (x - x_0)^2$, si $x_0 = 0, 1, 2, -1$

Desarrollo



50 $y = y_0 + (x - 1)^2$, si $y_0 = 0, 1, 2, -1$

Desarrollo



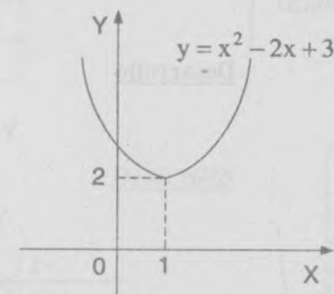
51 $y = ax^2 + bx + c$ si:

1 $a = 1$ $b = -2$ $c = 3$

2 $a = -2$ $b = 6$ $c = 0$

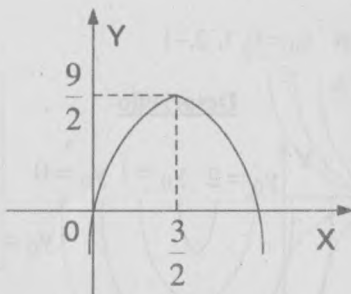
Desarrollo

1 Para $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$ se tiene $y = x^2 - 2x + 3$ de donde $y = (x - 1)^2 + 2$



2 Para $a = -2$, $b = 6$, $c = 0$ se tiene $y = -2x^2 + 6x$

$$y = -2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{2} \Rightarrow y = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$



- 52 $y = 2 + x - x^2$. Hallar los puntos de intersección de ésta parábola con el eje OX.

Desarrollo

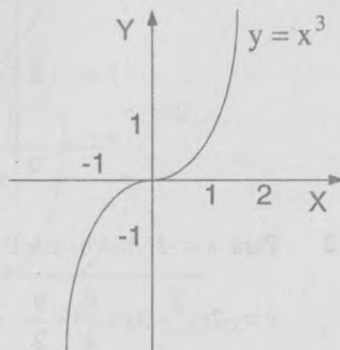
Para encontrar los puntos de intersección con el eje X debe ocurrir $y = 0$ es decir $2 + x - x^2 = 0$ de donde $x^2 = -x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$ luego los puntos de intersección con el eje X es: $x = -1, 2$

CONSTRUIR LAS GRÁFICAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES RACIONALES ENTERAS DE GRADO SUPERIOR AL SEGUNDO

- 53 $y = x^3$ (parábola cúbica)

Desarrollo

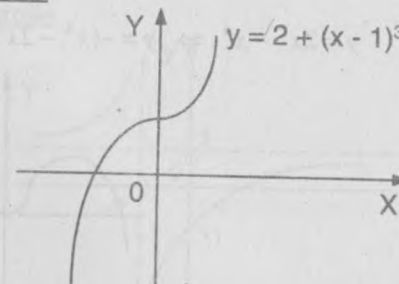
x	y
0	0
1	1
-1	-1
2	8
-1	-8



- 54 $y = 2 + (x - 1)^3$

Desarrollo

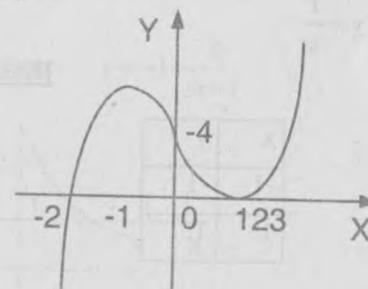
x	y
0	1
1	2
-1	-6



- 55 $y = x^3 - 3x + 2$

Desarrollo

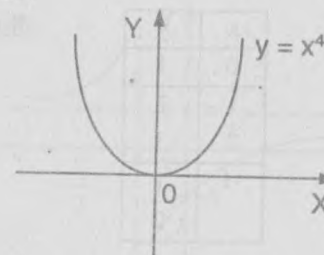
x	y
0	2
1	0
2	4
-1	4
-2	0
-3	-15
3	20



- 56 $y = x^4$

Desarrollo

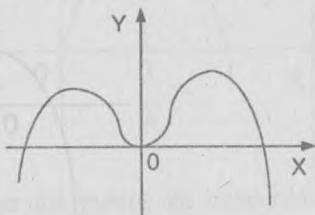
x	y
0	0
± 1	1
± 2	16



57 $y = 2x^2 - x^4$

Desarrollo

$$y = 2x^2 - x^4 \Rightarrow y = -(x^4 - 2x^2 + 1) + 1 \Rightarrow y = 1 - (x^2 - 1)^2$$

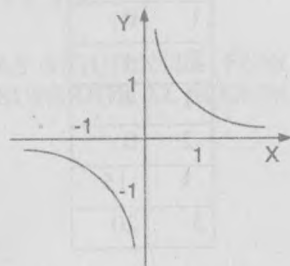


CONSTRUIR LAS GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES HOMOGRAFICAS SIGUIENTES (Hipérbolas)

58 $y = \frac{1}{x}$

Desarrollo

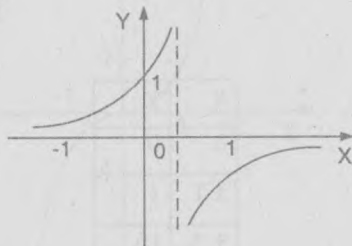
x	y
-1	-1
1	1



59 $y = \frac{1}{1-x}$

Desarrollo

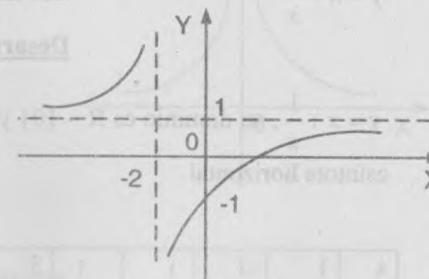
x	y
0	1
1/2	2/3
-1	1/2



60 $y = \frac{x-2}{x+2}$

Desarrollo

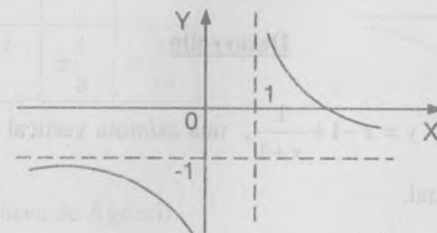
$$y = \frac{x-2}{x+2} \Rightarrow y = 1 - \frac{4}{x+2}$$



61 $y = y_0 + \frac{m}{x-x_0}$, si $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $m = 6$

Desarrollo

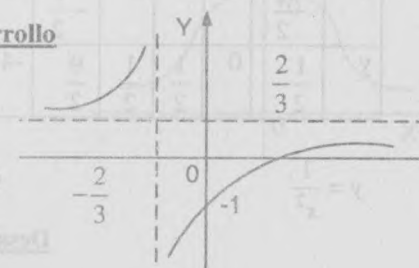
Como $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $m = 6$ se tiene: $y = -1 + \frac{6}{x-1}$



62 $y = \frac{2x-3}{3x+2}$

Desarrollo

$$y = \frac{2x-3}{3x+2} \Rightarrow y = \frac{2}{3} - \frac{13}{9} \left(\frac{1}{x+\frac{2}{3}} \right)$$



CONSTRUIR LAS GRÁFICAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES RACIONALES FRACCIONARIAS.

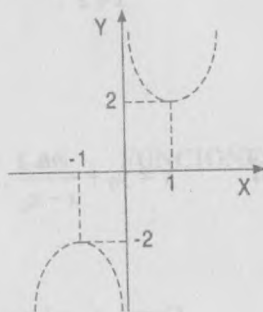
63

$$y = x + \frac{1}{x}$$

Desarrollo

$y = x + \frac{1}{x}$, su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$ y una asíntota vertical es en $x = 0$ no tiene asíntota horizontal.

x	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-3
y	2	-2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$



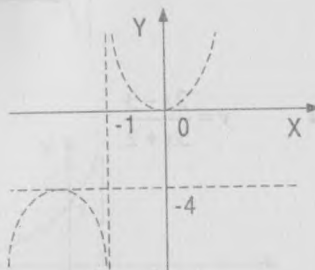
64

$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

Desarrollo

$y = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow y = x - 1 + \frac{1}{x+1}$, una asíntota vertical es en $x = -1$, no tiene asíntota horizontal.

x	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$
y	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	-4	$-\frac{9}{2}$



65

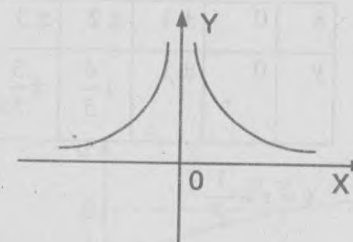
$$y = \frac{1}{x^2}$$

Desarrollo

Introducción al Análisis

En $x = 0$, se tiene asíntota vertical, en $y = 0$, se tiene asíntota horizontal.

x	± 1	$\pm \frac{1}{2}$	± 2	± 3
y	1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$



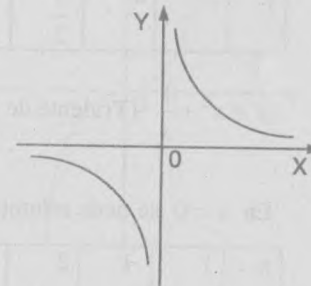
66

$$y = \frac{1}{x^3}$$

Desarrollo

En $x = 0$ se tiene una asíntota vertical, en $y = 0$, se tiene una asíntota horizontal.

x	$\pm \frac{1}{2}$	± 1	± 2	± 3
y	± 8	± 1	$\pm \frac{1}{8}$	$\pm \frac{1}{27}$

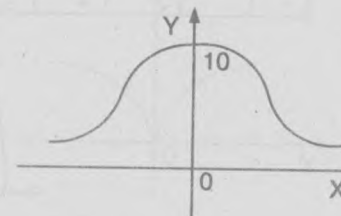


67

$$y = \frac{10}{x^2 + 1} \text{ (curva de Agnesi)}$$

Desarrollo

x	0	± 1	± 2
y	10	5	2

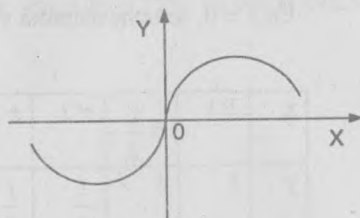


68

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ (Serpentina de Newton)}$$

Desarrollo

x	0	± 1	± 2	± 3
y	0	± 1	$\pm \frac{4}{5}$	$\pm \frac{3}{5}$

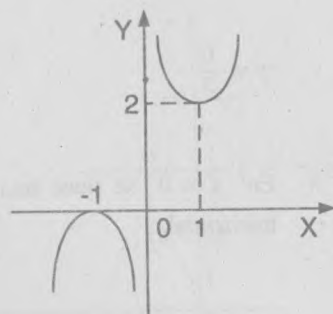


69

$$y = x + \frac{1}{x^2}$$

DesarrolloEn $x = 0$ se tiene asíntota vertical

x	1	-1	2	-2	$\pm \frac{1}{2}$
y	2	0	$\frac{9}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$

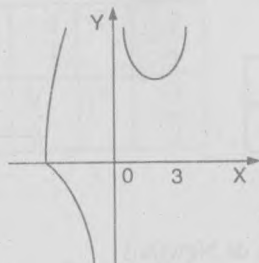


70

$$y = x^2 + \frac{1}{x} \quad (\text{Tridente de Newton})$$

DesarrolloEn $x = 0$ se tiene asíntota vertical

x	1	-1	2	-2	3	-3	$\pm \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
y	2	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{28}{3}$	$\frac{26}{3}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{28}{9}$	$-\frac{28}{3}$



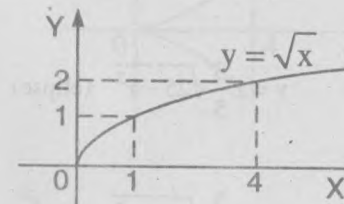
CONSTRUIR LAS GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES IRRACIONALES SIGUIENTES:

71

$$y = \sqrt{x}$$

Desarrollo $y = \sqrt{x}$ está determinado para $x \geq 0$

x	0	1	4	9	16
y	0	1	2	3	4

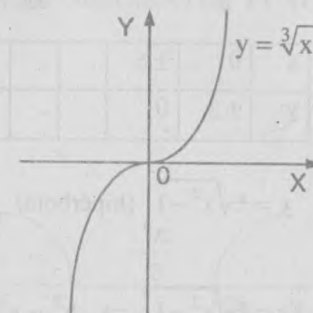


72

$$y = \sqrt[3]{x}$$

Desarrollo

x	0	± 1	± 8	± 27
y	0	± 1	± 2	± 3

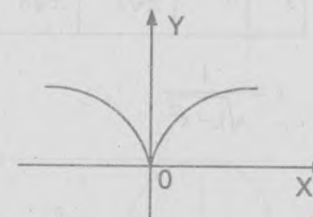


73

$$y = \sqrt[3]{x^2} \quad (\text{parábola de Neil})$$

Desarrollo

x	0	± 1	± 8
y	0	1	2

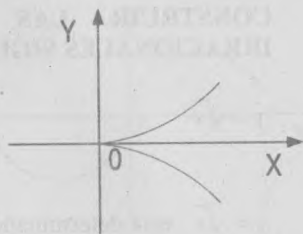


74

$$y^* = \pm x\sqrt{x} \quad (\text{parábola semi-cúbica})$$

Desarrollo

x	0	1	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{9}$
y	0	± 1	± 2	± 3

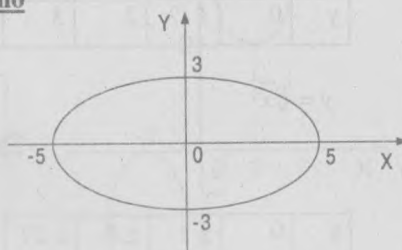


75 $y = \pm \frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2}$ (elipse)

Desarrollo

$$y = \pm \frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

x	0	± 5	.	.	.
y	± 3	0	.	.	.

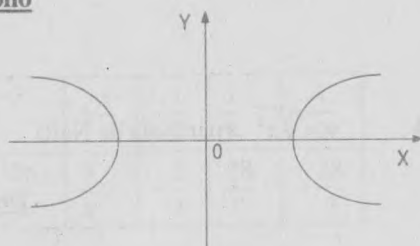


76 $y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$ (hipérbola)

Desarrollo

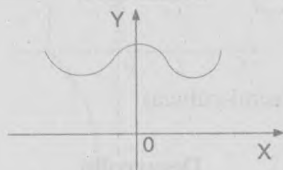
$$y = \pm \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

x	± 1	± 2	± 3
y	0	$\pm \sqrt{3}$	$\pm \sqrt{8}$



77 $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

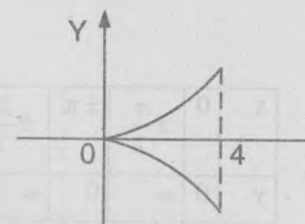
Desarrollo



78 $y = \pm x \sqrt{\frac{x}{4-x}}$ (Cisoide de Diocles)

Desarrollo

x	0	1	2	3
y	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{3}}$	± 2	$\pm \sqrt{3}$

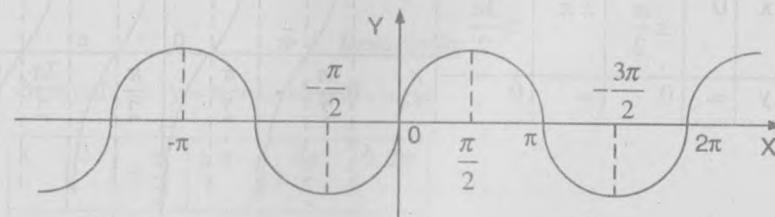


79 $y = \pm x \sqrt{25 - x^2}$ (para el estudiante)

CONSTRUIR LAS GRÁFICAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

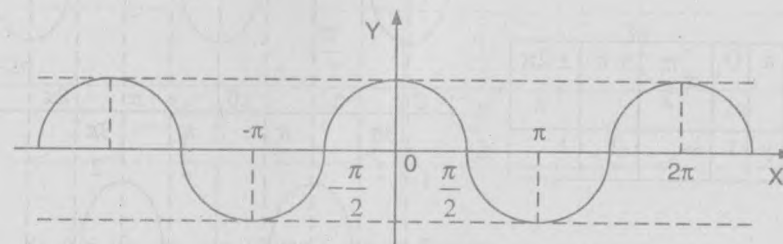
80 $y = \sin x$

Desarrollo



81 $y = \cos x$

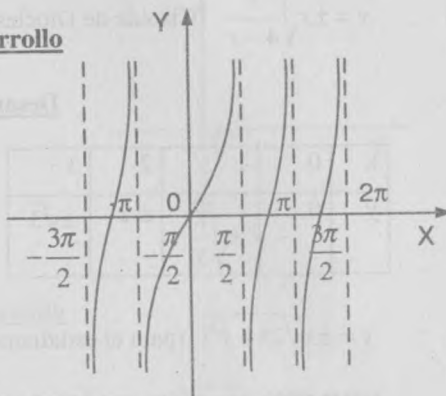
Desarrollo



82 $y = \operatorname{tg} x$

Desarrollo

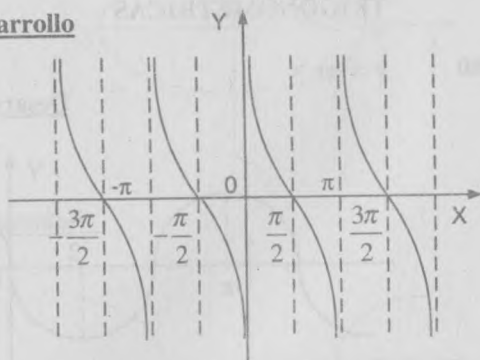
x	0	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \pi$	$\pm \frac{3\pi}{2}$
y	0	∞	0	∞



83 $y = \operatorname{ctg} x$

Desarrollo

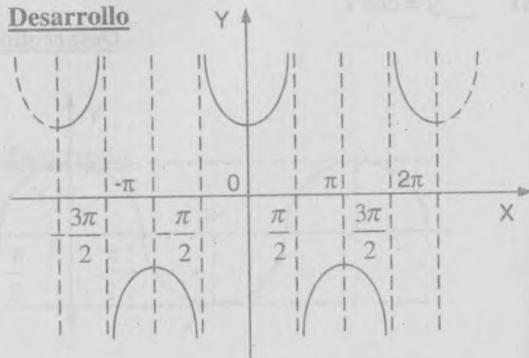
x	0	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \pi$	$\pm \frac{3\pi}{2}$
y	∞	0	∞	0



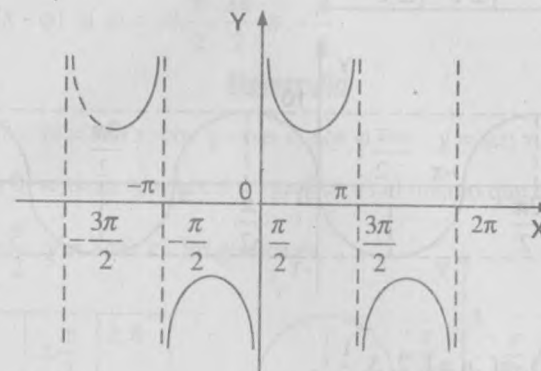
84 $y = \sec x$

Desarrollo

x	0	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \pi$	$\pm 2\pi$
y	1	∞	-1	1



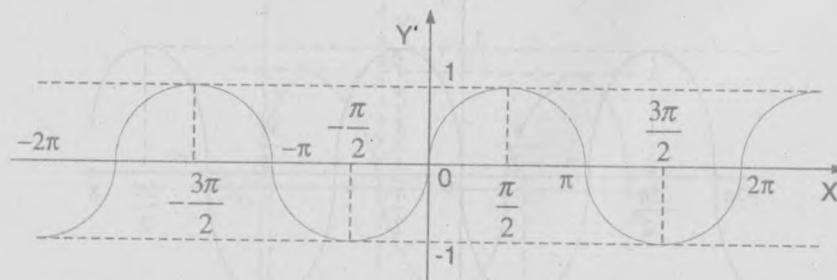
85 $y = \csc x$

Desarrollo

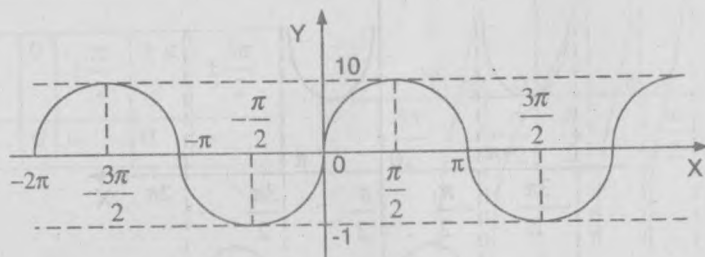
86 $y = A \operatorname{sen} x$, si $A = 1, 10, \frac{1}{2}, -2$

DesarrolloSi $A = 1 \Rightarrow y = \operatorname{sen} x$, su gráfico es:

x	0	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \pi$	$\pm \frac{3\pi}{2}$	$\pm 2\pi$
y	0	± 1	0	± 1	0

Si $A = 10 \Rightarrow y = 10 \operatorname{sen} x$, su grafica es:

x	0	$\pm \pi$	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \frac{3\pi}{2}$
y	0	0	± 1	± 1



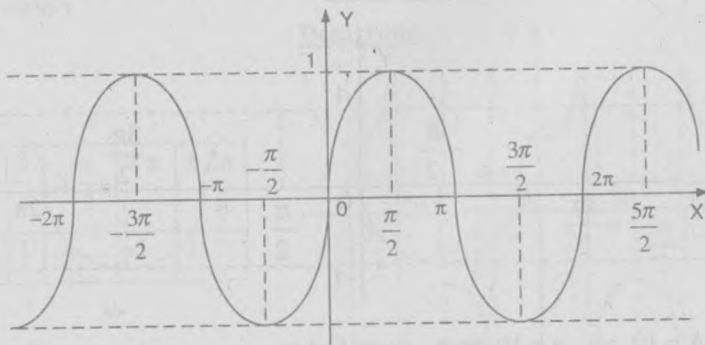
87 $y = \text{sen}(nx)$, si $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}$

Desarrollo

Si $n = 1 \Rightarrow y = \text{sen } x$ es similar al ejercicio 86,

Si $n = 2 \Rightarrow y = \text{sen } 2x$ su grafica es:

x	0	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \frac{3\pi}{2}$	$\pm \pi$
y	0	± 1	0	± 1	0



En forma similar para $n = 3, \frac{1}{2}$

88 $y = \text{sen}(x - \varphi)$ si $\varphi = -0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{4}$

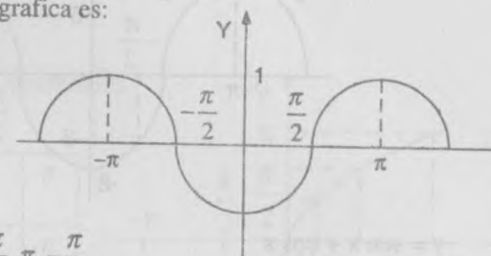
Desarrollo

$$y = \text{sen}(x - \varphi) = \text{sen } x \cdot \cos \varphi - \cos x \cdot \sin \varphi \Rightarrow y = \text{sen } x \cdot \cos \varphi - \cos x \cdot \sin \varphi$$

para $\varphi = 0$ se tiene $y = \text{sen } x$ el gráfico es el mismo que el ejercicio 86.

Para $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $y = -\cos x$. Su grafica es:

x	0	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \pi$
y	-1	0	± 1



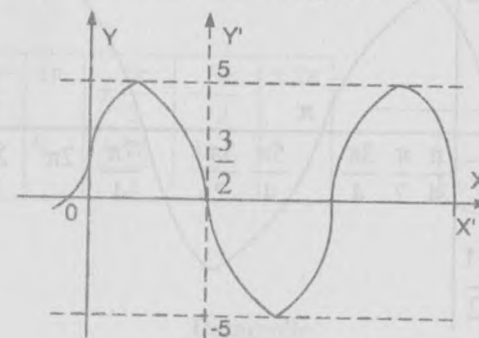
En forma similar para $\varphi = \frac{3\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{4}$

89 $y = 5 \text{sen}(2x - 3)$

Desarrollo

Sea $x' = x - \frac{3}{2} \Rightarrow y' = 5 \text{sen } 2x'$ donde el origen del nuevo sistema es $(\frac{3}{2}, 0)$

Y el gráfico se hace en forma similar al ejercicio 87.

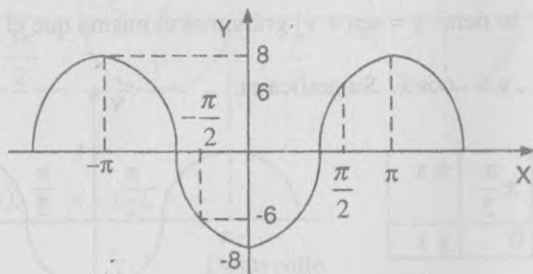


90 $y = a \sin x + b \cos x$, si $a = 6$, $b = -8$

Desarrollo

Para $a = 6$, $b = -8$, se tiene $y = 6 \sin x - 8 \cos x$. Su gráfico es:

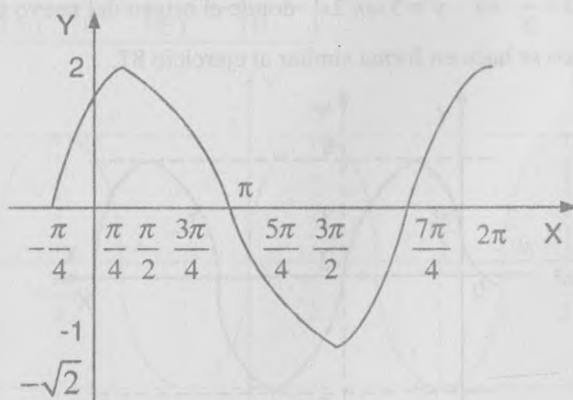
x	0	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \pi$	$\pm \frac{3\pi}{2}$	$\pm 2\pi$
y	-8	± 6	8	-6	-8



91 $y = \sin x + \cos x$

Desarrollo

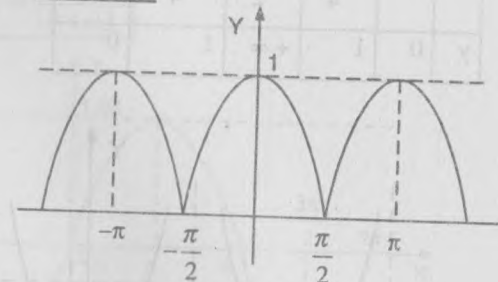
x	0	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
y	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	1



92 $y = \cos^2 x$

Desarrollo

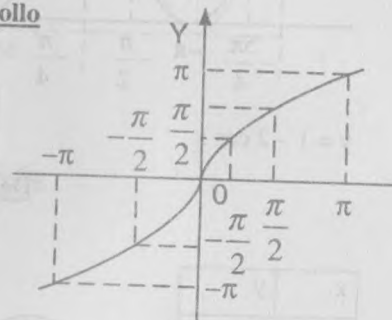
x	0	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \pi$
y	1	0	1



93 $y = x + \sin x$

Desarrollo

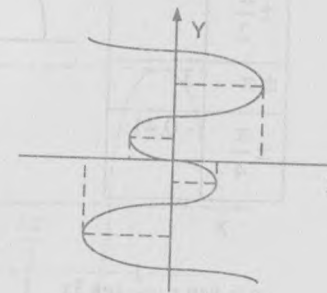
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	$\frac{\pi}{2} + 1$	π	$\frac{3\pi}{2} - 1$	2π



94 $y = x \sin x$

Desarrollo

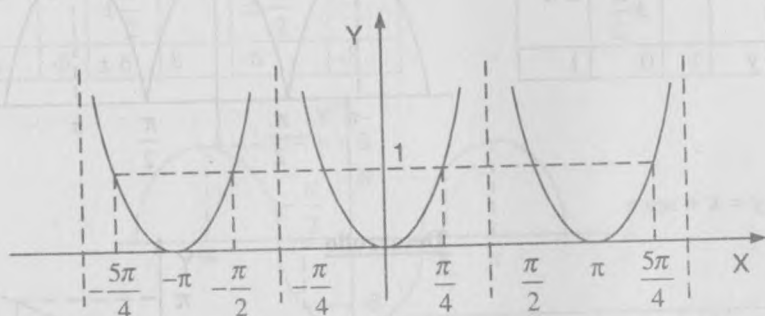
x	0	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \pi$	$\pm \frac{3\pi}{2}$	$\pm 2\pi$
y	0	$\pm \frac{\pi}{2}$	0	$\pm \frac{3\pi}{2}$	0



95 $y = \tan^2 x$

Desarrollo

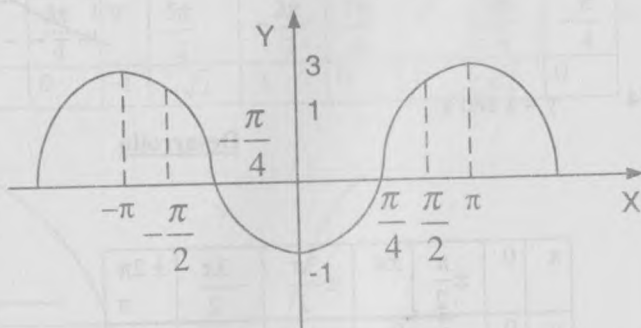
x	0	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \frac{5\pi}{4}$	$\pm \pi$
y	0	1	$+\infty$	1	0



96 $y = 1 - 2 \cos x$

Desarrollo

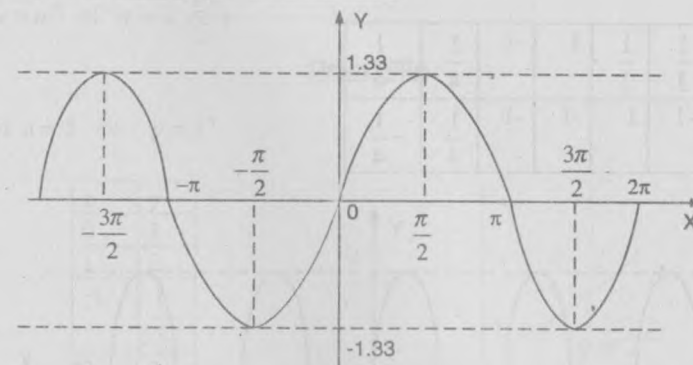
x	y
0	-1
$\pm \frac{\pi}{2}$	1
$\pm \pi$	3
$\pm \frac{\pi}{4}$	-0.41



97 $y = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x$

Desarrollo

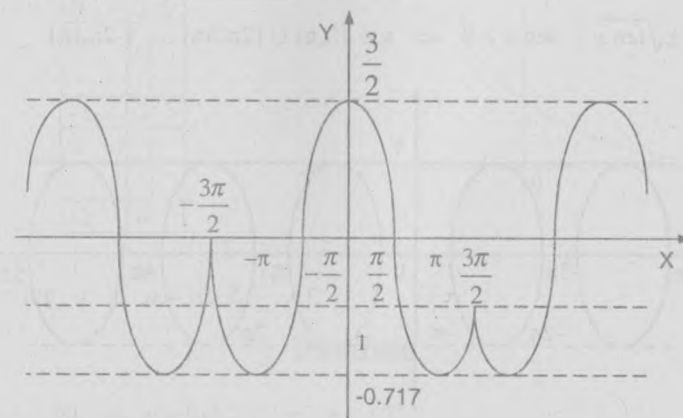
X	0	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \pi$	$\pm \frac{3\pi}{2}$
y	0	± 1.33	0	± 1.33



98 $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$

Desarrollo

x	0	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \frac{3\pi}{2}$
y	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-0.717

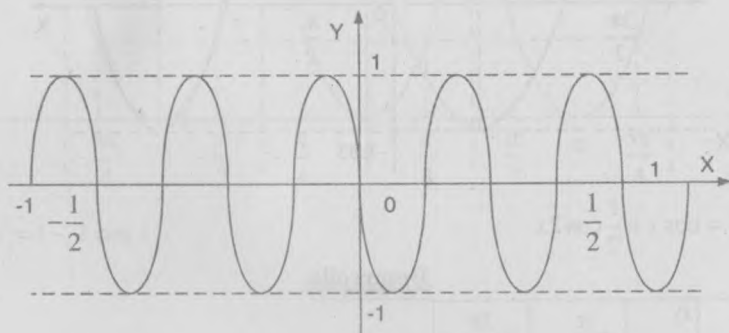


99

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

Desarrollo

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
y	-1	1	-1	-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

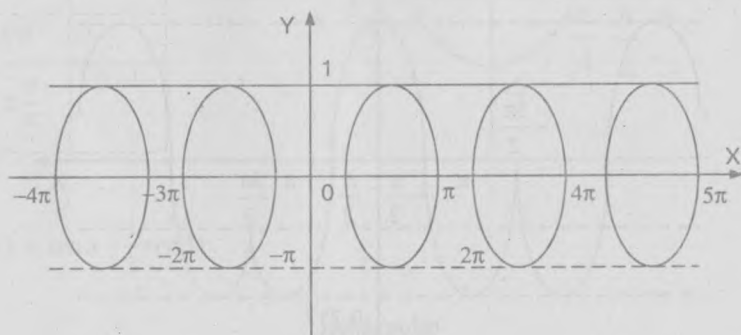


100

$$y = \pm \sqrt{\sin x}$$

Desarrollo

$$y = \pm \sqrt{\sin x}, \sin x \geq 0 \Rightarrow x \in [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \dots [-2\pi, -\pi]$$



CONSTRUIR LAS GRAFICAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

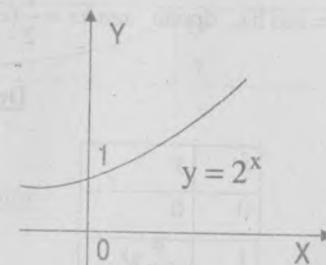
101

$$y = a^x \text{ si } a = 2, \frac{1}{2}, e$$

Desarrollo

$$\text{Si } a = 2 \Rightarrow y = 2^x$$

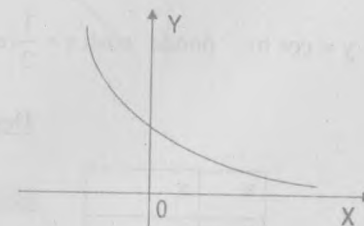
x	y
0	1
1	2
-1	$\frac{1}{2}$
2	4
-2	$\frac{1}{4}$



$$\text{Si } a = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Desarrollo

x	y
0	1
1	$\frac{1}{2}$
-1	2
2	$\frac{1}{4}$
-2	4



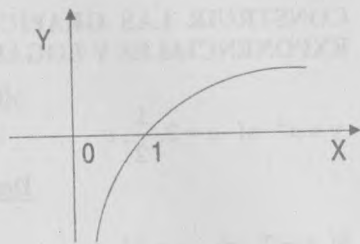
102

$$y = \log_a x \text{ si } a = 10, 2, \frac{1}{2}, e$$

Desarrollo

$$\text{Si } a = 10 \Rightarrow y = \log_{10} x \Rightarrow x = 10^y$$

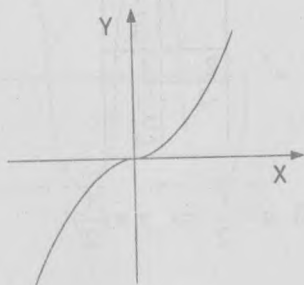
x	y
1	0
10	1
$\frac{1}{10}$	-1



103 $y = \text{sen } hx$, donde $\text{sen } hx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Desarrollo

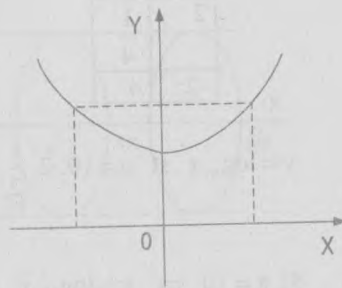
x	y
0	0
1	$\frac{e - e^{-1}}{2}$
-1	$\frac{e^{-1} - e}{2}$



104 $y = \text{cos } hx$; donde $\text{cosh } x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Desarrollo

x	y
0	1
1	$\frac{e - e^{-1}}{2}$
-1	$\frac{e + e^{-1}}{2}$



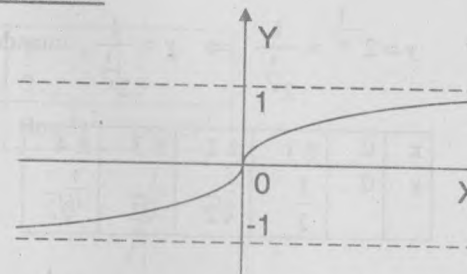
105 $y = \text{tg } hx$, donde $\text{tg } hx = \frac{\text{sen } hx}{\text{cosh } x}$

Desarrollo

$$\text{tg } hx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

cuando $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 1$

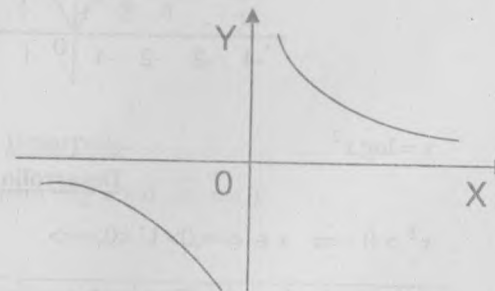
$x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -1$



106 $y = 10^{\frac{1}{x}}$

Desarrollo

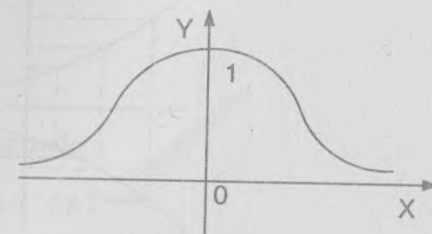
x	y
1	10
-1	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{2}$	100
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{100}$



107 $y = e^{-x^2}$ (curva de probabilidades)

Desarrollo

x	y
0	1
± 1	$\frac{1}{e}$
± 2	$\frac{1}{e^4}$

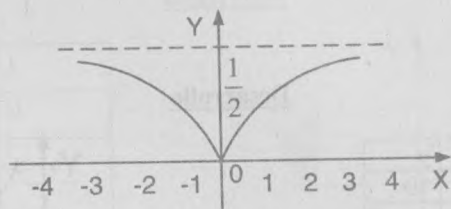


108 $y = 2^{\frac{1}{x^2}}$

Desarrollo

$$y = 2^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{x^2}}} \Rightarrow y = \frac{1}{2^{\frac{1}{x^2}}}, \text{ cuando } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$$

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[9]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[16]{2}}$

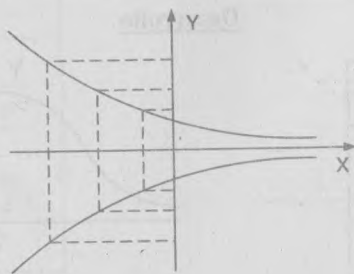


109 $y = \log x^2$

Desarrollo

$$x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

x	± 1	± 2	± 3	± 4	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{3}$	$\pm \frac{1}{4}$
y	0	Log 4	Log 9	Log 16	$-\log 4$	$-\log 9$	$-\log 16$

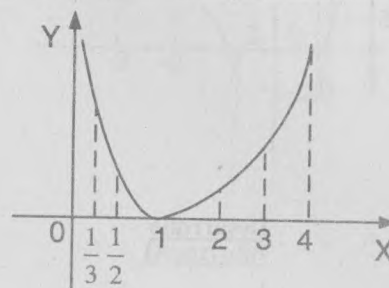


110 $y = \log^2 x$

Desarrollo

$$y = (\log x)^2 \text{ está definida para } x > 0$$

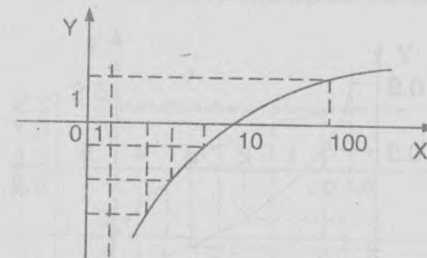
x	1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
y	0	$(\log 2)^2$	$(\log 3)^2$	$(\log 2)^2$	$(\log 3)^2$



111 $y = \log(\log x)$

Desarrollo

$$y = \log(\log x) \text{ está definido para } \log x > 0 \Rightarrow x > 1$$

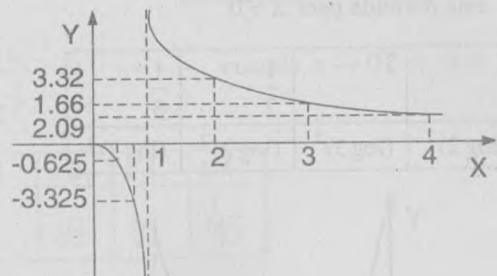


112 $y = \frac{1}{\log x}$

Desarrollo

$$y = \frac{1}{\log x} \text{ está definida para } x > 0, x \neq 1$$

x	0.2	0.5	1	2	3	4
y	-0.625	-3.325	$-\infty$	3.32	2.09	1.66

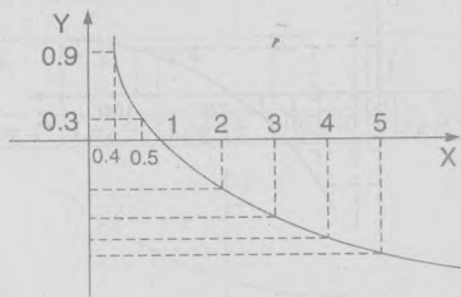


113 $y = \log\left(\frac{1}{x}\right)$

Desarrollo

$y = \log\left(\frac{1}{x}\right)$ está definido si $\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x > 0$

x	1	2	3	4	5	0.5	0.4
y	0	-0.3	-0.47	-0.60	-0.69	0.3	0.9

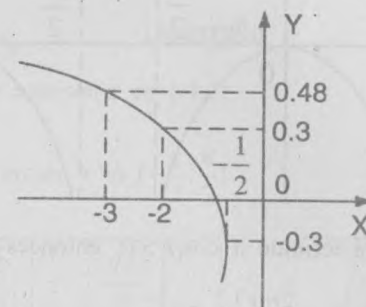


114 $y = \log(-x)$

Desarrollo

$y = \log(-x)$ está definido si $-x > 0 \Rightarrow x < 0$

x	$-\frac{1}{2}$	0	-1	-2	-3
y	-0.3	$-\infty$	0	0.3	0.48

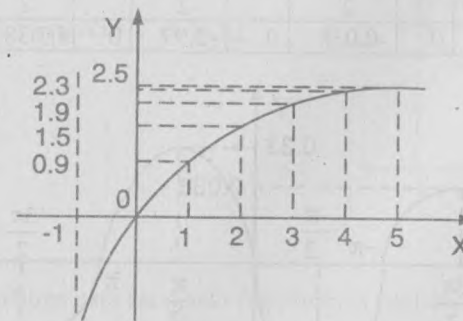


115 $y = \log_2(1+x)$

Desarrollo

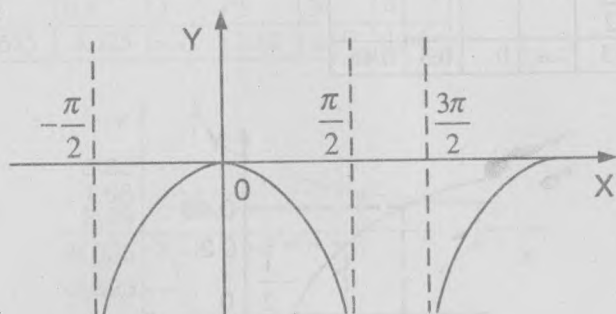
$\log_2(1+x) = \log_2 10 \cdot \log_{10}(1+x)$

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	$-\infty$	0	0.9	1.5	1.9	2.3	2.5



116 $y = \log(\cos x)$

Desarrollo



$y = \log(\cos x)$ está definido si $\cos x > 0$. entonces

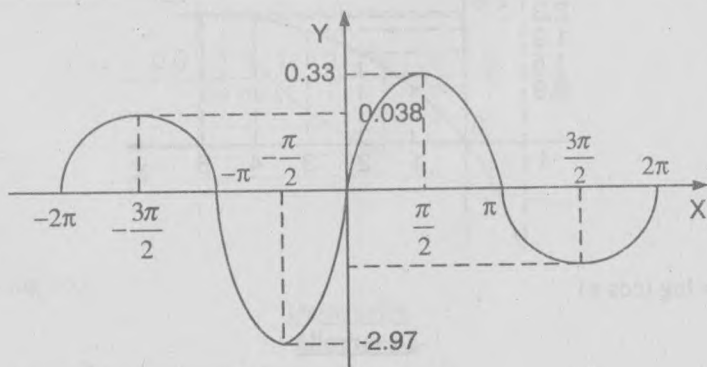
$$x \in < 2\pi n, \frac{2n+1}{2}\pi > \cup < \frac{2n+1}{2}\pi, 2\pi n >$$

$$x \in < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} > \cup < \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} > \cup \dots$$

11) $y = 2^{-x} \sin x$

Desarrollo

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\pm \frac{3\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
y	0	0.33	0	-0.038	0	-2.97	0	0.038	0



CONSTRUIR LAS GRÁFICAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

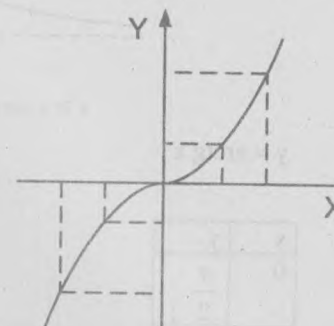
118 $y = \arcsin x$

Desarrollo

El dominio de $y = \arcsin x$ es $[-1, 1]$

El rango de $y = \arcsin x$ es $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$



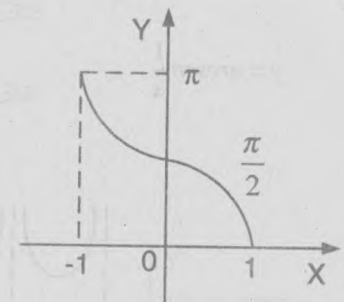
119 $y = \arccos x$

Desarrollo

El dominio de $y = \arccos x$ es $[-1, 1]$

El rango de $y = \arccos x$ es $[0, \pi]$

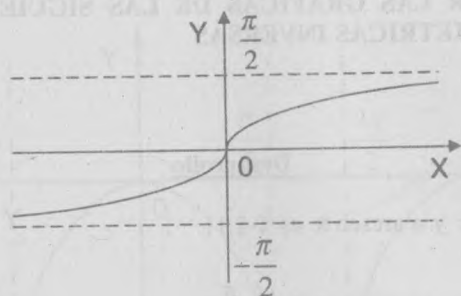
x	y
-1	π
0	$\frac{\pi}{2}$
1	0



En forma análoga para las demás funciones el cual damos su gráfico.

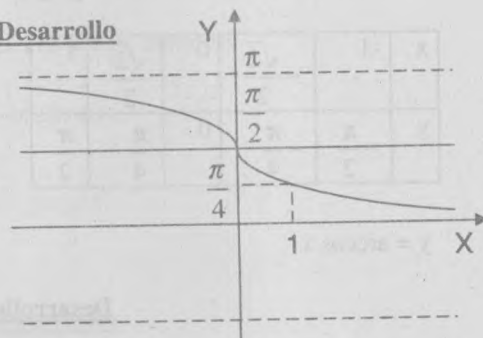
120 $y = \operatorname{arctg} x$

Desarrollo

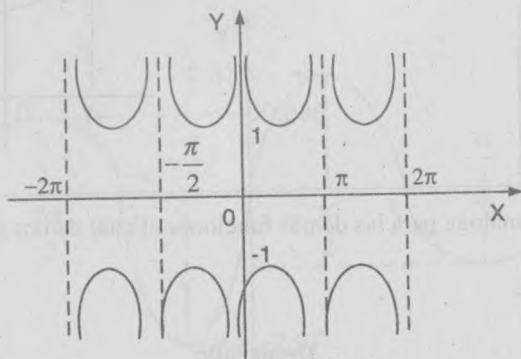


121 $y = \operatorname{arctg} x$

x	y
0	$\frac{\pi}{2}$
∞	0
∞	π
1	$\frac{\pi}{4}$

Desarrollo

122 $y = \arcsen \frac{1}{x}$

Desarrollo

Introducción al Análisis

$$y = \arcsen \frac{1}{x} \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{1}{x}$$

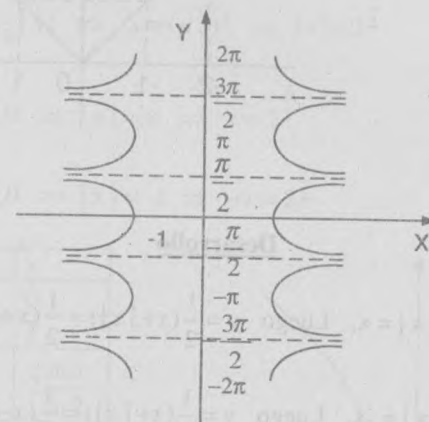
$$-1 \leq \operatorname{sen} y \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup [1, +\infty)$$

123 $y = \arccos \frac{1}{x}$

Desarrollo

$$y = \arccos \frac{1}{x} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{x} \text{ como } -1 \leq \cos y \leq 1$$

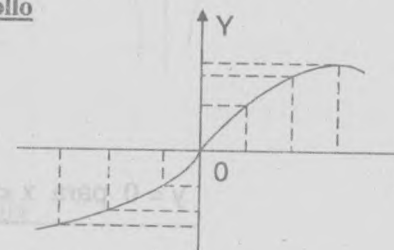
$$-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup [1, +\infty)$$



124 $y = x + \operatorname{arctg} x$

Desarrollo

x	0	$x \rightarrow +\infty$	$x \rightarrow -\infty$
y	0	$y \rightarrow +\infty$	$y \rightarrow -\infty$



CONSTRUIR LA GRÁFICA DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES

125 $y = |x|$

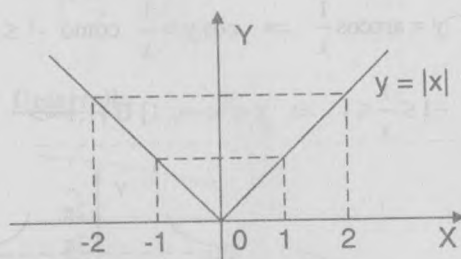
Desarrollo

Se conoce que: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Sí $x \geq 0 \Rightarrow y = x$

$x < 0 \Rightarrow y = -x$

x	y
0	0
± 1	1
± 2	2
± 3	3

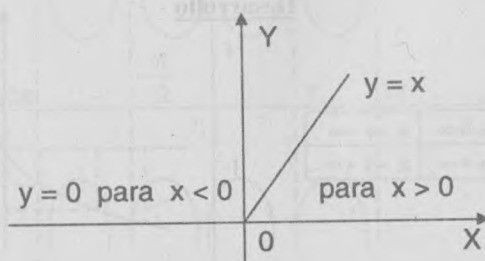


126 $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$

Desarrollo

Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$, Luego $y = \frac{1}{2}(x + |x|) = \frac{1}{2}(x + x) = x \Rightarrow y = x$

Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, Luego $y = \frac{1}{2}(x + |x|) = \frac{1}{2}(x - x) = 0 \Rightarrow y = 0$



Introducción al Análisis

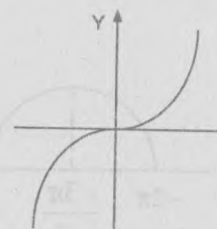
127 a) $y = x|x|$

Desarrollo

Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$, pero

$y = x|x| = x(x) = x^2 \Rightarrow y = x^2$ para $x \geq 0$

$y = x|x| = x(-x) = -x^2 \Rightarrow y = -x^2$ para $x < 0$



b) $y = \log_{\sqrt{2}} |x|$

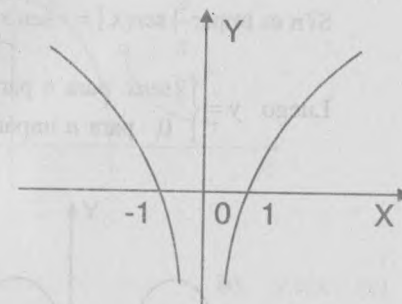
Desarrollo

$y = \log_{\sqrt{2}} |x| \Leftrightarrow x = (\sqrt{2})^y \Rightarrow |x| = 2^{\frac{y}{2}}$

para $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x = 2^{\frac{y}{2}}$

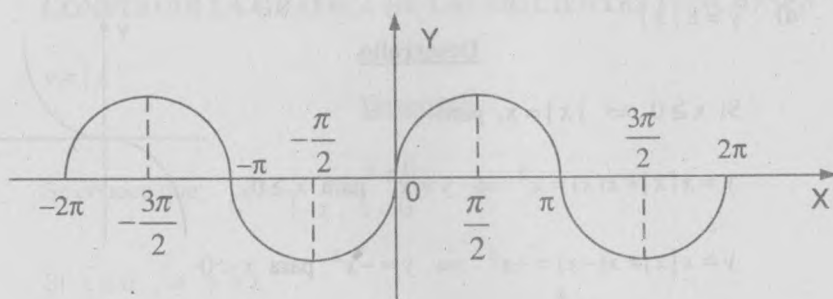
$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow -x = 2^{\frac{y}{2}}$

x	y
± 1	0
± 2	2
± 3	$2 \frac{\ln 3}{\ln 2}$
$\pm \frac{1}{2}$	-2
$\pm \frac{1}{4}$	-4



128 a) $y = \sin x + |\sin x|$

DesarrolloSe conoce que $y = \sin x$ tiene por gráfico:



$$\text{Si } x \in [0, \pi] \Rightarrow |\text{sen } x| = \text{sen } x$$

$$\text{Como } y = \text{sen } x + |\text{sen } x| = 2 \text{sen } x \text{ para } x \in [0, \pi]$$

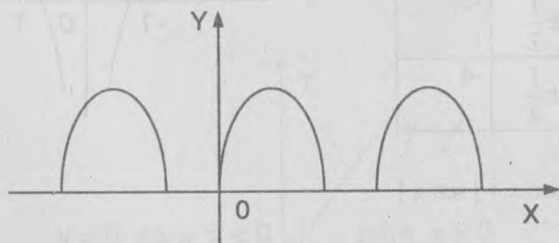
$$\text{Si } x \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow |\text{sen } x| = -\text{sen } x \Rightarrow y = 0$$

Generalizando para $n \in \mathbb{Z}$ consideramos el intervalo $[n\pi, (n+1)\pi]$

$$\text{Si } n \text{ es par } |\text{sen } x| = \text{sen } x$$

$$\text{Si } n \text{ es impar } |\text{sen } x| = -\text{sen } x$$

$$\text{Luego } y = \begin{cases} 2\text{sen } x & \text{para } n \text{ par cuando } x \in [n\pi, (n+1)\pi] \\ 0 & \text{para } n \text{ impar cuando } x \in [n\pi, (n+1)\pi] \end{cases}$$



b) $y = \text{sen } x - |\text{sen } x|$ en forma similar el ejemplo (a).

$$129 \quad y = \begin{cases} 3-x^2 & \text{para } |x| \leq 1 \\ \frac{2}{|x|} & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$$

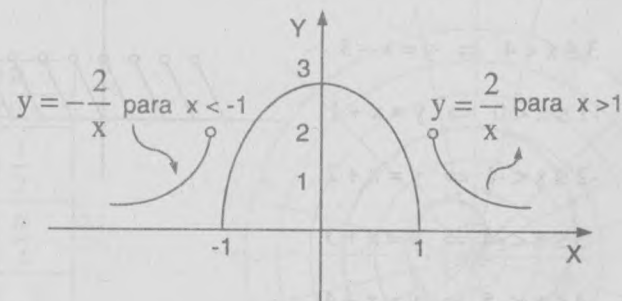
Desarrollo

$$\text{Si } |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$|x| > 1 \Rightarrow x > 1 \vee x < -1$$

$$\text{además } x > 1 \Rightarrow |x| = x \wedge x < -1 \Rightarrow |x| = -x$$

$$\text{Luego } y = \begin{cases} 3-x^2 & \text{para } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{para } x > 1 \\ -\frac{2}{x} & \text{para } x < -1 \end{cases}$$



$$130 \quad \text{a) } y = [x], \quad \text{b) } y = x - [x]$$

donde $[x]$ es la parte entera del número x , es decir, el mayor número entero menor o igual a x .

Desarrollo

$$\text{a) } y = [x] = [n] \Rightarrow n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Si } 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0$$

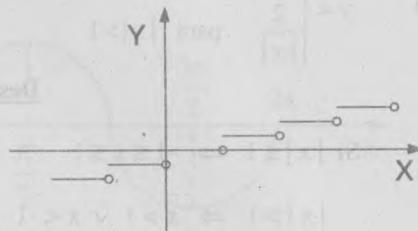
$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow y = 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = -1$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow y = -2$$

$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow y = -3$$



b) $y = x - [x], [x] = n \Rightarrow n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$

$$\text{Si } 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow y = x - 2$$

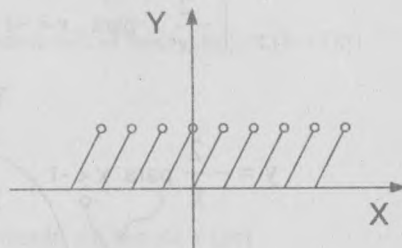
$$3 \leq x < 4 \Rightarrow y = x - 3$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = x + 1$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow y = x + 2$$

$$-3 \leq x < -4 \Rightarrow y = x + 3$$

$$-4 \leq x < -5 \Rightarrow y = x + 4$$



CONSTRUIR LAS GRÁFICAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES (r, φ) ($r \geq 0$)

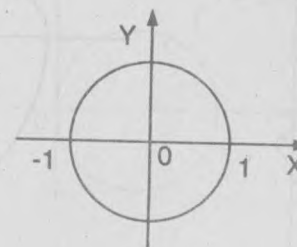
131 $r = 1$ (circunferencia)

Desarrollo

Se conoce que $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}$$

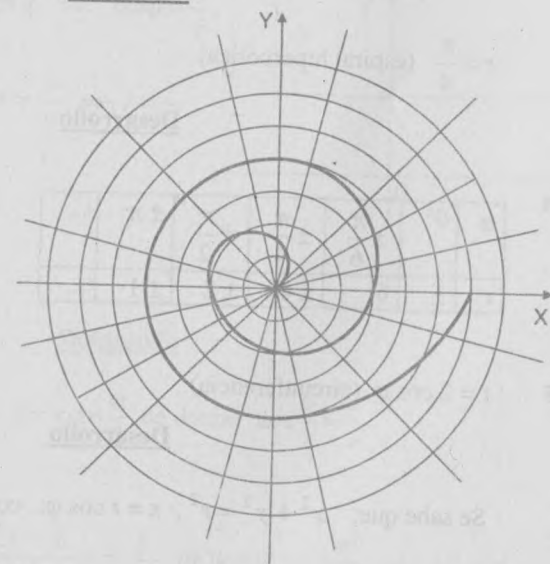
como $r = 1$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, luego: $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ (circunferencia)



132 $r = \frac{\varphi}{2}$ (espiral de Arquímedes)

Desarrollo

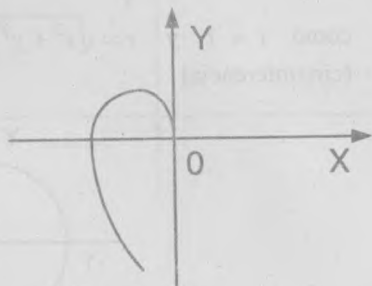
φ	R
0	0
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$
π	$\frac{\pi}{2}$



133 $r = e^{\varphi}$ (espiral logarítmica)

Desarrollo

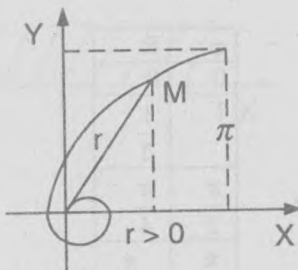
φ	r
0°	1
$\frac{\pi}{6}$	$e^{\frac{\pi}{6}}$
$-\frac{\pi}{6}$	$e^{\frac{\pi}{6}}$
$\frac{\pi}{4}$	$e^{\frac{\pi}{4}}$
$-\frac{\pi}{4}$	$e^{\frac{\pi}{4}}$
$\frac{\pi}{2}$	$e^{\frac{\pi}{2}}$
$-\frac{\pi}{2}$	$e^{\frac{\pi}{2}}$
$\vdots$	$\vdots$



134 $r = \frac{\pi}{4}$ (espiral hiperbólica)

Desarrollo

φ	0°	$\pm \frac{\pi}{6}$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \pi$	...
r	$\pm$	6	± 4	± 2	± 1	...



135 $r = 2 \cos \varphi$ (circunferencia)

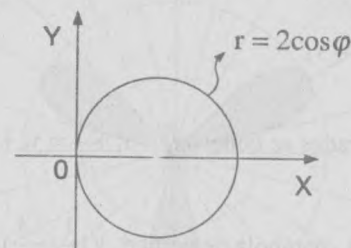
Desarrollo

Se sabe que: $x^2 + y^2 = r^2$, $x = r \cos \varphi$, $\cos \varphi = \frac{x}{r}$

Como $r = 2 \cos \varphi \Rightarrow r = \frac{2x}{r}$, de donde $r^2 = 2x \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$

Luego $x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ circunferencia de $C(1,0)$ y radio 1



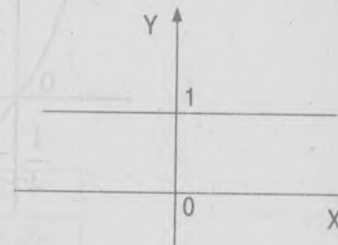
136 $r = \frac{1}{\sin \varphi}$

Desarrollo

Se conoce que $y = r \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{y}{r}$

Como $r = \frac{1}{\sin \varphi} \Rightarrow r = \frac{1}{\frac{y}{r}} \Rightarrow r = \frac{r}{y}$

Como $r \neq 0 \Rightarrow y = 1$



137 $r = \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ (parábola)

Desarrollo

$\sec^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$ pero $x = r \cos \frac{\varphi}{2}$ de donde $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{x}{r}$

como $r = \sec^2 \frac{\varphi}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\frac{x^2}{r^2}}$ de donde $r = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow x^2 = r$

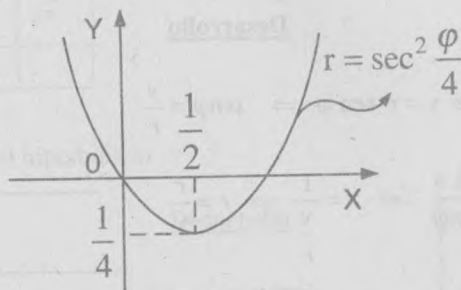
para $r \neq 0$, además $r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

luego: $x^4 - x^2 = y^2$. Sea: $x_1^2 = x^2 \Rightarrow x_1 = x^2$ además $y^2 = y_1$

Entonces: $x_1^2 - x_1 = y_1$

Completando cuadrados se tiene: $x_1^2 - x_1 + \frac{1}{4} = y_1 + \frac{1}{4}$

$(x_1 - \frac{1}{2})^2 = (y_1 + \frac{1}{4})$ parábola de vértice $V(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ y se abre hacia arriba

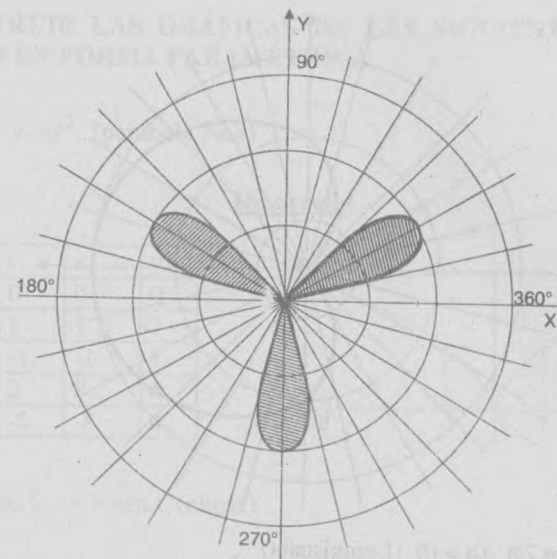


138 $r = 10 \sin 3\phi$ (rosa de tres pétalos)

Desarrollo

ϕ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
r	0	7.05	10	7.05	0	-7	-10	-2.60	0	7.05	10	7.05

ϕ	180°	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	330°	345°	360°
r	0	-7.05	-10	-2.60	0	7.05	10	7.05	0	-10	-2.60	0



139 $r = a(1 + \cos \phi)$ ($a > 0$) (Cardioid)

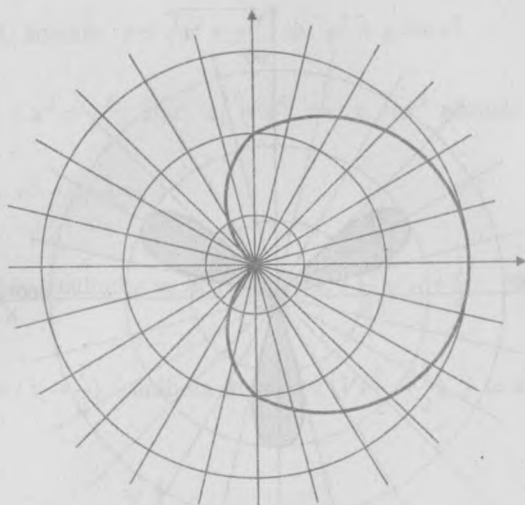
Desarrollo

ϕ	0°	15°	30°	45°	60°	75°
R	2a	1.97a	1.87a	1.71a	1.5a	1.26a

ϕ	90°	105°	120°	135°	150°	165°
r	a	0.74a	0.5a	0.29a	0.1a	0.03a

ϕ	180°	195°	210°	225°	240°	255°	270°
r	0	0.3a	0.1a	0.29a	0.5a	0.74a	a

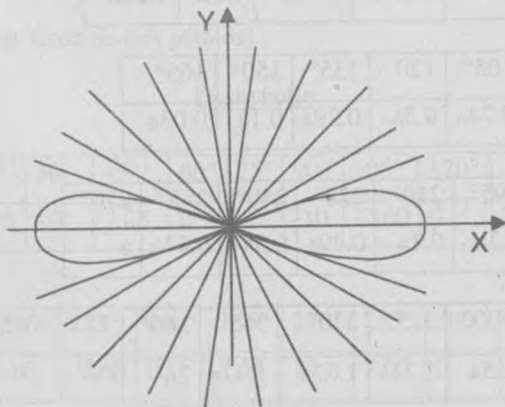
ϕ	285°	300°	315°	330°	345°	360°
r	1.26a	1.5a	1.71a	1.87a	1.97a	2a



140 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ($a > 0$) (Lemniscata)

Desarrollo

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
r	a	$\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	0	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$

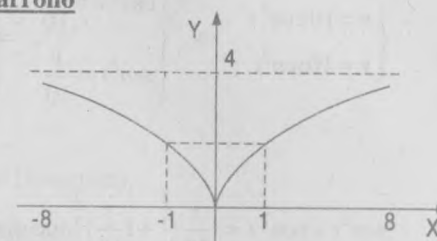


CONSTRUIR LAS GRÁFICAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES DADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

141 $x = t^3$, $y = t^2$ (parábola Neil)

Desarrollo

t	x	y
0	0	0
1	1	1
-1	-1	1
2	8	4
-2	-8	4



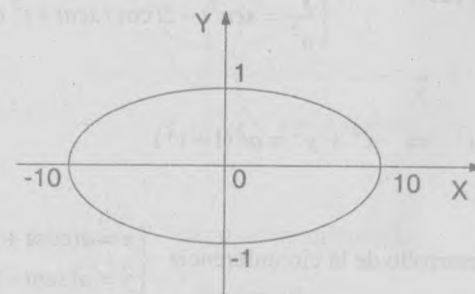
142 $x = 10 \cos t$, $y = \sin t$ (elipse)

Desarrollo

$$x = 10 \cos t \Rightarrow \cos^2 t = \frac{x^2}{100}$$

$$y = \sin t \Rightarrow \sin^2 t = y^2$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = \frac{x^2}{100} + y^2 = 1 \text{ de donde } \frac{x^2}{100} + y^2 = 1 \text{ (elipse)}$$



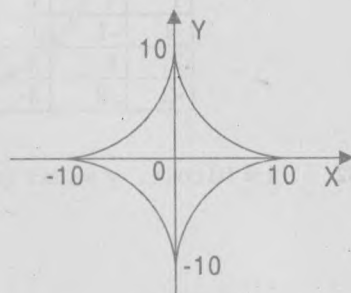
143 $x = 10 \cos^3 t$, $y = 10 \sin^3 t$ (astroide)

Desarrollo

$$\begin{cases} x = 10 \cos^3 t \\ y = 10 \sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^3 t = \frac{x}{10} \\ \sin^3 t = \frac{y}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 t = \left(\frac{x}{10}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \sin^2 t = \left(\frac{y}{10}\right)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = \left(\frac{x}{10}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{10}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ de donde}$$

$$1 = \left(\frac{x}{10}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{10}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 10^{\frac{2}{3}}$$



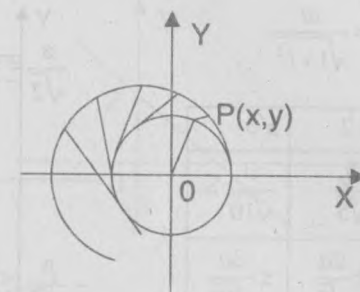
144 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ (desarrollo del círculo)

Desarrollo

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t + 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t \\ \frac{y^2}{a^2} = \sin^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \cos^2 t \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 + t^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2(1 + t^2)$$

envolvente (desarrollo de la circunferencia) $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$

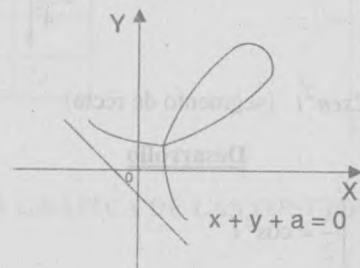


145 $x = \frac{at}{1+t^3}$, $y = \frac{at^2}{1+t^3}$ (folium de Descartes)

Desarrollo

$$\begin{cases} x = \frac{at}{1+t^3} \\ y = \frac{at^2}{1+t^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+t^3}{t} = \frac{a}{x} \\ \frac{1+t^3}{t} = \frac{at}{y} \end{cases} \text{ Luego: } \frac{a}{x} = \frac{at}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} = t$$

$$\text{Como: } x = \frac{at}{1+t^3} \Rightarrow x = \frac{a(\frac{y}{x})}{1 + \frac{y^3}{x^3}} \Rightarrow x = \frac{ax^3 y}{x(x^3 + y^3)} \Rightarrow x^3 + y^3 - axy = 0$$

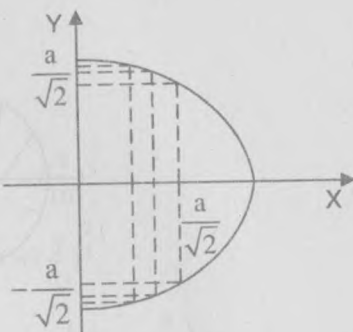


146 $x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}$ (semi-circunferencia)

Desarrollo

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}$$

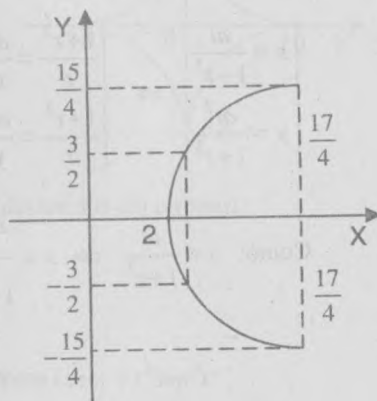
t	0	± 1	± 2	± 3
x	a	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{\sqrt{5}}$	$\frac{a}{\sqrt{10}}$
y	0	$\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{2a}{\sqrt{5}}$	$\pm \frac{3a}{\sqrt{10}}$



147 $x = 2^t + 2^{-t}, \quad y = 2^t - 2^{-t}$ (rama de una hipérbola)

Desarrollo

t	0	1	-1	2	-2
x	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{17}{4}$
y	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$	$-\frac{15}{4}$

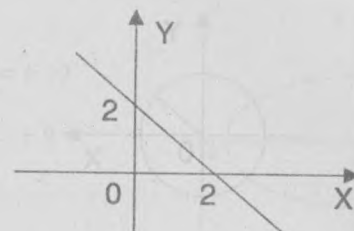


148 $x = 2\cos^2 t; \quad y = 2\sin^2 t$ (segmento de recta)

Desarrollo

$$\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 2\sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \cos^2 t \\ \frac{y}{2} = \sin^2 t \end{cases}$$

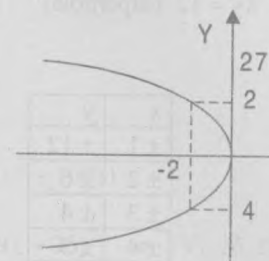
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \sin^2 t + \cos^2 t \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow x + y = 2$$



149 $x = t - t^2, \quad y = t^2 - t^3$

Desarrollo

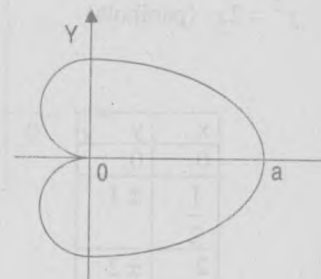
t	0	1	-1	2	-2	3	-3
x	0	0	-2	-2	-6	-6	-12
y	0	0	2	-4	12	-18	27



150 $x = a(2\cos t - \cos^2 2t), \quad y = a(2\sin t - \sin^2 2t)$

Desarrollo

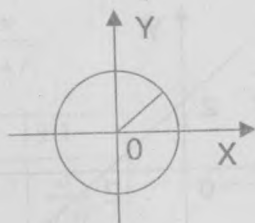
t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
x	a	$a\sqrt{2}$	a
y	0	$a\sqrt{2}$	2a



CONSTRUIR LA GRÁFICA DE LAS FUNCIONES DADAS EN FORMA IMPLÍCITA

151 $x^2 + y^2 = 25$ (circunferencia)

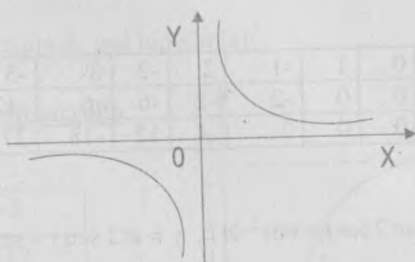
Desarrollo



152 $xy = 12$ (hipérbola)

Desarrollo

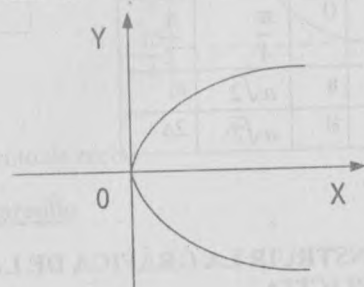
x	y
± 1	± 12
± 2	± 6
± 3	± 4
± 4	± 3
± 6	± 2
0	∞



153 $y^2 = 2x$ (parábola)

Desarrollo

x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	± 1
2	± 2
$\frac{9}{2}$	± 3
8	± 4

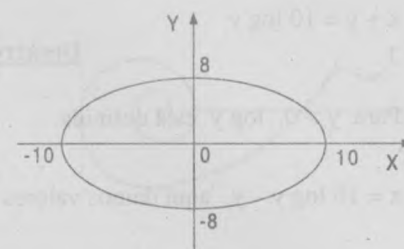


154 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ (elipse)

Desarrollo

$$y = 0, x = \pm 10$$

$$x = 0, y = \pm 8$$



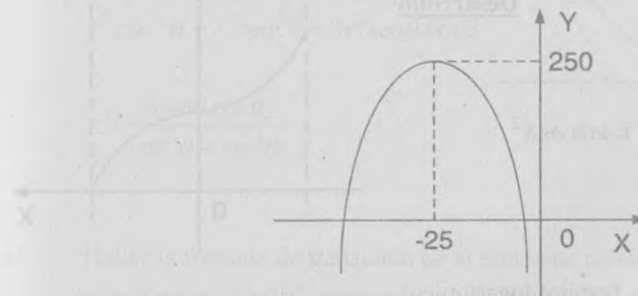
155 $y^2 = x^2(100 - x^2)$

Desarrollo

Sea $w = y^2$, $z = x^2$

$$y^2 = 100x^2 - x^4 \Rightarrow w = 100z - z^2 \Rightarrow w = -(z^2 - 100z)$$

completando cuadrado se tiene: $w - 2500 = -(z + 25)^2 \Rightarrow V(-25, 2500)$

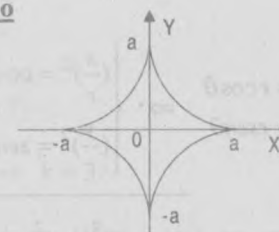


156 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (astroide)

Desarrollo

$$x = 0, y = \pm a$$

$$y = 0, x = \pm a$$



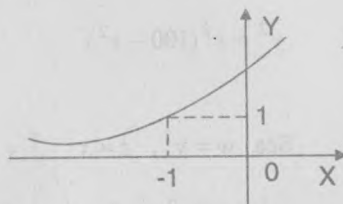
157 $x + y = 10 \log y$

Desarrollo

Para $y > 0$, $\log y$ está definida:

$x = 10 \log y - y$, aquí damos valores arbitrarios para y donde $y > 0$.

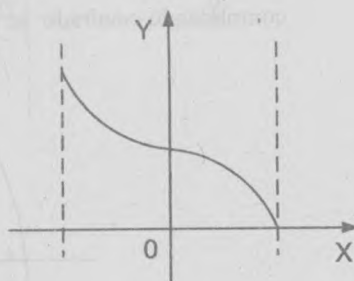
x	-1	$-10 \log 2 - \frac{1}{2}$	$10 \log 2 - 2$
y	1	$\frac{1}{2}$	2



158 $x^2 = \cos y$

Desarrollo

$$x^2 = \cos y \Rightarrow y = \arccos x^2$$



159 $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctg \frac{y}{x}}$ (espiral logarítmica)

Desarrollo

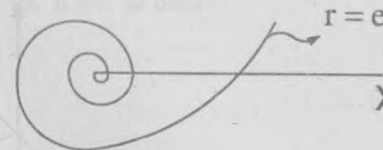
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \cos^2 \theta \\ \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$\text{Como } \sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

$r = e\theta$ en coordenadas polares



160 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (folio de Descartes)

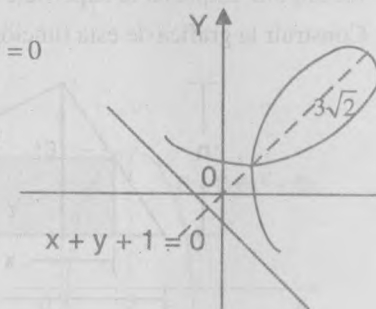
Desarrollo

Pasando a coordenadas polares se tiene: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta - 3r^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta = 3r^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$r = \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$$



161 Hallar la fórmula de transición de la escala de celsius (C) a la de Fahrenheit si se conoce que 0°C corresponde a 32°F y 100°C a 212°F . Construir la gráfica de la función obtenida.

Desarrollo

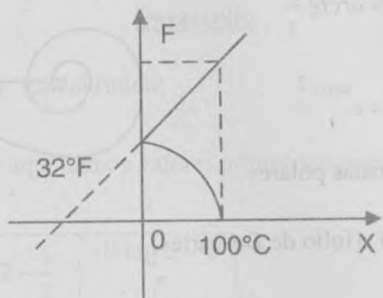
$$\text{Para } 0^\circ\text{C} \Rightarrow 32^\circ\text{F}$$

$$100^\circ\text{C} \Rightarrow 212^\circ\text{F} \Rightarrow (0, 32), (100, 212)$$

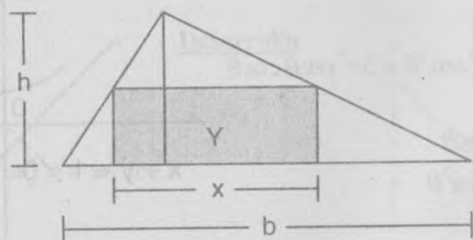
$$\text{Sea } F = mc + k \Rightarrow 32 = m(0) + k \Rightarrow k = 32$$

$$212 = 100m + 32 \Rightarrow 100m = 212 - 32 \Rightarrow 100m = 180 \Rightarrow m = 1.8$$

$$f = 1.8c + 32$$



- 162 En un triángulo, cuya base es $b = 10$ y su altura $h = 6$, esta inscrito un rectángulo. Expresar la superficie de dicho rectángulo y como función de x . Construir la gráfica de esta función y hallar su valor máximo.



Desarrollo

La figura dada en el problema ubicaremos de la forma siguiente:

Area del rectángulo Y es: $Y = Bx$... (1)

También en el área del rectángulo "y" se puede expresar:

$$y = \frac{bh}{2} - (A_1 + A_2 + A_3) \text{ donde } A_1 = \frac{ZB}{2}, A_2 = \frac{x(h-B)}{2}, A_3 = \frac{B(b-x-Z)}{2}$$

$$\text{Luego } y = \frac{bh}{2} - \frac{1}{2}(ZB + xh - xB + Bb - Bx - BZ)$$

$$y = \frac{bh}{2} - \frac{1}{2}(xh - 2Bx + Bb) \text{ como } b = 10, h = 6 \text{ se tiene:}$$

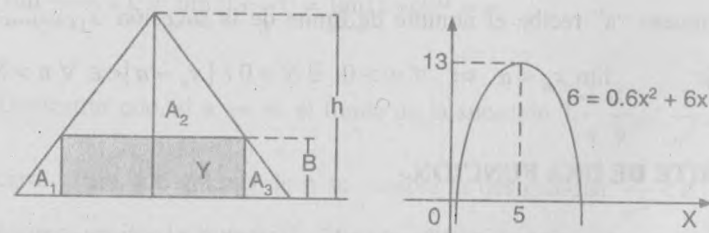
$$y = 30 - \frac{1}{2}(6x - 2Bx + 10B)$$

de (1) se tiene $B = \frac{y}{x}$, reemplazando (2) se tiene:

$$y = 30 - \frac{1}{2}(6x - 2y + \frac{10y}{x}), \text{ de donde } y = 0.6(10 - x)$$

$$\text{como } y = 0.6x(10 - x) \Rightarrow y = -0.6x^2 + 6x \Rightarrow y - 13 = -0.6(x - 5)$$

La gráfica de la función es:



El valor máximo es cuando $x = 5$, $\max y = 13$

- 164 Resolver la ecuación: $2x^2 - 5x + 2 = 0$

Desarrollo

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x = -1$$

completando cuadrados se tiene:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = -1 + \frac{25}{16} \Rightarrow (x - \frac{5}{4})^2 = \frac{9}{16} \text{ de donde } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{4}$$

165 Resolver el sistema de ecuación: $xy = 10$, $x + y = 7$

Desarrollo

Como $x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - x$, además: $xy = 10 \Rightarrow x(7 - x) = 10$

$$7x - x^2 - 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 5) = 0,$$

de donde se tiene: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$

1.3. LÍMITES.-

1° LÍMITES DE UNA SUCESIÓN.-

El número "a" recibe el nombre de límite de la sucesión $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, es

decir: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N > 0 / |x_n - a| < \epsilon \forall n > N$

2° LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.-

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que: $|f(x) - A| < \epsilon$ para $0 < |x - a| < \delta$

3° LÍMITES LATERALES.-

Si $x < a$ y $x \rightarrow a$, escribiremos convencionalmente $x \rightarrow a - 0$, de la misma manera si $x > a$ y $x \rightarrow a$, escribiremos $x \Rightarrow a + 0$ y a los números

$f(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ y $f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ se llaman límites laterales por

la izquierda y por la derecha en el punto "a" respectivamente. Para que exista

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ es necesario y suficiente que se cumple la igualdad $f(a - 0) = f(a + 0)$

PROPIEDADES DE LÍMITES

Si existen los $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$. Entonces se tiene:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \text{ donde } \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$$

NOTA: Los límites siguientes se usa continuamente.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{\alpha})^\alpha = e$$

166 Demostrar que, si $n \rightarrow \infty$, el límite de la sucesión $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$ es cero. ¿Para qué valores de n se cumple la desigualdad $\frac{1}{n^2} < \epsilon$ (siendo número positivo arbitrario)? Efectuar el cálculo numérico para:

a) $\epsilon = 0.1$

b) $\epsilon = 0.01$

c) $\epsilon = 0.001$

Desarrollo

Probaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, es decir:

dado un $\epsilon > 0$, $\exists N = ? / |\frac{1}{n^2} - 0| < \epsilon \forall n > N$

$$|\frac{1}{n^2} - 0| = |\frac{1}{n^2}| = \frac{1}{n^2} < \epsilon \Rightarrow n^2 > \frac{1}{\epsilon}, n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon}} = N$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon \quad \forall n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

por lo tanto la desigualdad $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ se cumple $\forall n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$

a) Para $\varepsilon = 0.1$ se tiene $n > \sqrt{\frac{1}{0.1}} = \sqrt{10} \Rightarrow n \geq 4$

b) Para $\varepsilon = 0.01$ se tiene $n > \sqrt{\frac{1}{0.01}} = 10$

c) Para $\varepsilon = 0.001$ se tiene $n > \sqrt{\frac{1}{0.001}} = \sqrt{1000} \Rightarrow n \geq 32$

167 Demostrar que el límite de la sucesión: $x_n = \frac{n}{n+1}$, ($n = 1, 2, \dots$), cuando $n \rightarrow \infty$ es igual a 1. ¿Para qué valores de $n > N$ se cumple la desigualdad $|x_n - 1| < \varepsilon$ (siendo ε un número positivo)?.

Hallar N para a) $\varepsilon = 0.1$ b) $\varepsilon = 0.01$ c) $\varepsilon = 0.001$

Desarrollo

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ es por demostrar.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N = ? / |x_n - 1| < \varepsilon, \forall n > N$

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N$$

Luego: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \forall n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

a) Para $\varepsilon = 0.1$, $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1 = 9$

b) Para $\varepsilon = 0.01$, $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1 = 99$

c) Para $\varepsilon = 0.001$, $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1 = 999$

168 Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$. ¿Cómo elegir para el número positivo dado número positivo δ de modo que de la desigualdad $|x - 2| < \delta$ se deduzca la desigualdad $|x^2 - 4| < \varepsilon$. Calcular δ , para:

a) $\varepsilon = 0.1$

b) $\varepsilon = 0.01$

c) $\varepsilon = 0.001$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x^2 - 4| < \varepsilon$$

Siempre que $0 < |x - 2| < \delta$

$$|x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2| |x-2| < \varepsilon$$

$$\text{Sea } |x - 2| < 1 \Rightarrow -1 < x - 2 < 3 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x + 2 < 5 \Rightarrow |x + 2| < 5$$

$$\text{Luego: } |x^2 - 4| = |x + 2| |x - 2| < 5 |x - 2| < \varepsilon \Rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta$$

Luego es suficiente tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ ($\varepsilon < 1$)

a) Para $\varepsilon = 0.1$ se tiene $\delta = \frac{\varepsilon}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$

b) Para $\varepsilon = 0.01$ se tiene $\delta = \frac{\varepsilon}{5} = \frac{0.01}{5} = 0.002$

c) Para $\varepsilon = 0.001$ se tiene $\delta = \frac{\varepsilon}{5} = \frac{0.001}{5} = 0.0002$

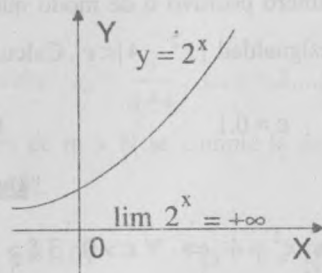
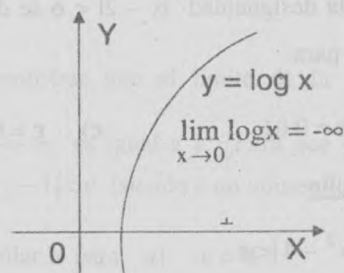
169 Dilucidar el sentido exacto de las notaciones convencionales:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Desarrollo



170 Hallar los límites de las sucesiones:

a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}, \dots$

b) $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{2n}{2n+1}, \dots$

c) $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$

d) $0.2, 0.23, 0.233, 0.2333, \dots$

Desarrollo

Introducción al Análisis

a) Sea $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, entonces: Si n es par $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0$

Si n es impar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 0$

b) Sea $x_n = \frac{2n}{2n+1}$, entonces: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2+\frac{1}{n}} = \frac{2}{2+0} = 1$

c) $a_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$

$a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}$

$a_n = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}}$

Luego $a_n = 2^{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}})}$

entonces $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ es una progresión geométrica $r = \frac{1}{2}$, y

es igual a: $\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^n})$

Reemplazando (2) en (1) tenemos: $a_n = 2^{\frac{1}{2} \cdot 2(1 - \frac{1}{2^n})} = 2^{1 - \frac{1}{2^n}}$

Como para hallar la suma de una sucesión es suficiente calcular el límite del término n -ésimo cuando $n \rightarrow \infty$ es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(1-\frac{1}{2^n})} = 2^{1-0} = 2$$

d) 0.2, 0.23, 0.233, 0.2333, 0.2333...3, ... el término n -ésimo es $x_n = 0.23333...3$

$$x_n = 0.2 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots 0.000...3$$

$$x_n = 0.2 + \left(\frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots + \frac{3}{100^{n-1}} \right)$$

$$x_n = 0.2 + \frac{3}{100} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} \right)$$

$$x_n = 0.2 + \frac{3}{100} \left(\frac{1 - (\frac{1}{10})^n}{1 - \frac{1}{10}} \right) = 0.2 + \frac{3}{100} \cdot \frac{10(1 - \frac{1}{10^n})}{9} = 0.2 + \frac{1}{30} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[0.2 + \frac{1}{30} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) \right] = 0.2 + \frac{1}{30} = \frac{6+1}{30} = \frac{7}{30}$$

HALLAR LOS LÍMITES:

$$171 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$

Desarrollo

$$\text{Se conoce: } 1+2+3+\dots+n-1 = \frac{n}{2}(n-1)$$

Introducción al Análisis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+(n-1)}{n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$172 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$$

Desarrollo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{n+2}{n} \right) \left(\frac{n+3}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right) \left(1 + \frac{3}{n} \right) = (1+0)(1+0)(1+0) = 1$$

$$173 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right)$$

Desarrollo

Se conoce que $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 2n^2 - 3n - 1}{2(n+1)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+2} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n}} = - \frac{3+0}{2+0} = -\frac{3}{2}$$

$$174 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$$

Desarrollo

Si n es par se tiene:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Si n es impar se tiene:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

Luego:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} = 1$$

175
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$$

Desarrollo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n}{2^n + 3^n}, \text{ dividiendo entre } 3^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\frac{2}{3})^n + 3}{(\frac{2}{3})^n + 1} = \frac{2(0) + 3}{0 + 1} = 3$$

176
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

Desarrollo

Usando la suma de una progresión geométrica: $S = \frac{a - ar^n}{1 - r}$, donde a es el primer término y r la razón.

Luego:
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - (\frac{1}{2})^n \right) = 1 - 0 = 1$$

177
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \right]$$

Desarrollo

De acuerdo al ejercicio anterior se tiene:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{1 - (-\frac{1}{3})^n}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3 - 3(-\frac{1}{3})^n}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 3(-\frac{1}{3})^n}{4} = \frac{3 - 3(0)}{4} = \frac{3}{4}$$

178
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

Desarrollo

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n+1}{n} \right) = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{6} (1+0)(2+0) = \frac{1}{3}$$

179
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Desarrollo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

180

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2 + 1}$$

Desarrollo

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, -1 \leq \operatorname{sen}(n!) \leq 1, \text{ como } \frac{n}{n^2 + 1} > 0$$

$$\text{Entonces: } -\frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n}{n^2 + 1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2 + 1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2 + 1} \leq 0 \text{ de donde } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2 + 1} = 0$$

Para hallar límite de la razón de dos polinomios enteros respecto a x , cuando $x \rightarrow \infty$, se divide los dos términos de la razón por x^n , donde n es la mayor potencia de estos polinomios.

También en muchos casos se emplea este procedimiento cuando se trata de fracciones que contienen expresiones irracionales.

181

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$$

DesarrolloIntroducción al Análisis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} \text{ dividimos entre } x^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1$$

182

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000x}{x^2 - 1}$$

Desarrollo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000x}{x^2 - 1} = 1000 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1}, \text{ dividiendo entre } x^2$$

$$= 1000 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1000 \left(\frac{0}{1-0} \right) = 0$$

183

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7}$$

Desarrollo

Dividiendo entre x^2 tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} = \frac{1-0+0}{0+0} = \frac{1}{0} = \infty$$

184

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}$$

Desarrollo

Dividiendo entre x^3 se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{8}{x^2} + \frac{5}{x^3}} = \frac{0 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$185 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{72x^5 - 204x^4 - 562x^3 - 261x^2 - 174x + 9}{x^5+5} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{72 - \frac{204}{x} - \frac{562}{x^2} - \frac{261}{x^3} - \frac{174}{x^4} + \frac{9}{x^5}}{1 + \frac{5}{x^5}} = \frac{72 - 0 - 0 - 0 - 0 + 0}{1 + 0} = 72 \end{aligned}$$

$$186 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

DesarrolloDividiendo entre x^2 el numerador y denominador se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} = \frac{2 - 0 - 0}{\sqrt{1 + 0}} = 2$$

$$187 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$$

DesarrolloDividiendo el numerador y denominador entre x se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}} = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

$$188 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$$

DesarrolloDividiendo el numerador y denominador entre x^2 se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{10}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$189 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$$

DesarrolloDividiendo el numerador y denominador entre x se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt[3]{0+0}}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$190 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

DesarrolloDividiendo entre $\sqrt{x}$ al denominador y numerador se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{0 + \sqrt{0}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

Cuando $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios enteros y además $P(a) \neq 0$ ó $Q(a) \neq 0$, el límite cuando $x \rightarrow a$ de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es decir $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ se encuentra directamente. Cuando $P(a) = Q(a) = 0$, se simplifica la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ por el binomio $(x-a)$, una o varias veces.

$$191 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = \frac{(-1)^3 + 1}{(-1)^2 + 1} = \frac{-1 + 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$192 \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25} = \frac{5^2 - 5(5) + 10}{(5)^2 - 25} = \frac{0 + 10}{0} = \frac{10}{0} = \infty$$

$$193 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+2} = \frac{-1-1}{-1+2} = -2$$

$$194 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-2} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$195 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)^2}{(x^2+2x+3)(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$196 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - ax - x + a}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x(x-1) - a(x-1)}{x^3 - a^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-1}{x^2+ax+a^2} = \frac{a-1}{3a^2} \end{aligned}$$

$$197 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

$$198 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1 - 3}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{1-x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{3}{3} = -1$$

199

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

Desarrollo

Sea $x = y^2 \Rightarrow \sqrt{x} = y$, además cuando $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 1$, luego tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{y^2-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{(y-1)(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{y+1} = \frac{1}{2}$$

200

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$$

Desarrollo

Sea $x = y^6 \Rightarrow \sqrt{x} = y^2 \wedge \sqrt[3]{x} = y^2$

Cuando $x \rightarrow 64$, $y \rightarrow 2$, luego tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2-8}{y^2-4} = -\lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)(y+2)}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2+2y+4}{y+2} = \frac{4+4+4}{4} = 3$$

201

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

Desarrollo

Sea $x = y^{12} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = y^4 \wedge \sqrt[4]{x} = y^3$

Cuando $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 1$, luego tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^4-1}{y^3-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y^2-1)(y^2+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y+1)(y^2+1)}{y^2+y+1} = \frac{(2)(2)}{3} = \frac{4}{3}$$

202

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(x-1)^2}$$

Sea $x = y^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = y$ cuando $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 1$, luego tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)^2}{(y^3-1)^2}$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)^2}{(y-1)^2(y^2+y+1)^2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{(y^2+y+1)^2} = \frac{1}{9}$$

203

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x+7)(x-7)(2+\sqrt{x-3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{4-x+3}{(x+7)(x-7)(2+\sqrt{x-3})} = -\lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = -\frac{1}{14(4)} = -\frac{1}{56}$$

$$204 \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$$

Desarrollo

Sea $x = y^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = y$ cuando $x \rightarrow 8$, $y \rightarrow 2$, luego tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{y-2} = \lim_{y \rightarrow 2} (y^2+2y+4) = 4+4+4=12$$

$$205 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

Desarrollo

Sea $x = y^6 \Rightarrow \sqrt{x} = y^3 \wedge \sqrt[3]{x} = y^2$

Cuando $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 1$, luego tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}$$

$$206 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3-\sqrt{5+x})(3+\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})}{(1-\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5+x})(3+\sqrt{5+x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(9-5-x)(1+\sqrt{5-x})}{(1-5+x)(3+\sqrt{5+x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(1+\sqrt{5-x})}{(x-4)(3+\sqrt{5+x})} = -\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} \\ &= -\frac{1+1}{3+3} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$207 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

$$208 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$209 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+0)^2}+\sqrt[3]{x(x+0)}+\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

$$210 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6})(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6})}{\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6}} \\ &= \frac{(x^2 - 2x + 6) - (x^2 + 2x - 6)}{\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6}} = \frac{-4x + 12}{\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6} = \frac{-4(x-3)}{\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4(x-3)}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4}{(x-1)(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6})} \\ &= \frac{-4}{(3-1)(\sqrt{9-6+6} + \sqrt{9+6-6})} = \frac{-4}{2(3+3)} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$211 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+a-x}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = \frac{a}{\infty} = 0$$

$$212 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x(x+a)} - \sqrt{x})$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x(x+a)} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x(x+a)} - x)(\sqrt{x(x+a)} + x)}{\sqrt{x(x+a)} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+a) - x^2}{\sqrt{x(x+a)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{\sqrt{x(x+a)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}} + 1} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$213 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6 - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + 6}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5 + \frac{6}{x}}{\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1} = \frac{-5 + 0}{\sqrt{1 - 0 + 0} + 1} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$214 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2 + 1 - x^2)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

215 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[3]{1 - x^3})$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[3]{1 - x^3}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt[3]{1 - x^3})(x^2 - x\sqrt[3]{1 - x^3} + \sqrt[3]{(1 - x^3)^2})}{x^2 - x\sqrt[3]{1 - x^3} + \sqrt[3]{(1 - x^3)^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1 - x^3}{x^2 - x\sqrt[3]{1 - x^3} + \sqrt[3]{(1 - x^3)^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - x\sqrt[3]{1 - x^3} + \sqrt[3]{(1 - x^3)^2}} = \frac{1}{\infty} = 0
 \end{aligned}$$

En muchos casos en el cálculo de límites se emplea la fórmula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, y además se supone que: $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ y $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$

216 a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} 2}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Desarrollo

Se conoce que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ además: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}$

de donde: $\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

217 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen} 3x}{3x} = 3(1) = 3$$

218 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \operatorname{sen} 5x}{5x} \cdot \frac{5x}{2 \operatorname{sen} 2x} = \frac{5(1)}{2(1)} = \frac{5}{2}$$

219 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\operatorname{sen}(3\pi x)}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\operatorname{sen}(3\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \left(\frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x} \right)}{3\pi \left(\frac{\operatorname{sen}(3\pi x)}{3\pi x} \right)} = \frac{\pi(1)}{3\pi(1)} = \frac{1}{3}$$

$$220 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n})$$

Desarrollo

Sea $x = \frac{\pi}{n}$, cuando $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow x \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$221 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \left(\frac{1}{1+1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$222 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$$

Desarrollo

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 2 \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \cdot \lim_{\frac{x-a}{2} \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}} = \cos \frac{a+a}{2} (1) = \cos a$$

$$223 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$$

Desarrollo

$$\cos x - \cos a = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{x+a}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \operatorname{sen} \left(\frac{x+a}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\operatorname{sen} \left(\frac{x+a}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen} \left(\frac{x+a}{2} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}} \\ &= -\operatorname{sen} \left(\frac{a+a}{2} \right) \cdot (1) = -\operatorname{sen} a \end{aligned}$$

$$224 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2} = \lim_{x+2 \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\pi x)}{x+2} \quad \text{Sea } y = x+2, \text{ cuando } x \rightarrow -2, y \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(\pi x)}{x+2} = \lim_{x+2 \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\pi x)}{x+2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \pi(y+2)}{y}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \pi y + \operatorname{tg} 2\pi}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg} \pi y - \operatorname{tg} 2\pi}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \pi y + \operatorname{tg} 2\pi}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg} \pi y - \operatorname{tg} 2\pi}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \pi y}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \pi y}{y \cos \pi y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\pi \operatorname{sen} \pi y}{\pi y} \cdot \left(\frac{1}{\cos \pi y} \right) = \pi(1)(1) = \pi$$

225

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

Desarrollo

$$\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = 2 \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \\ &= \cos\left(\frac{2x+0}{2}\right)(1) = \cos x \end{aligned}$$

226

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x (\operatorname{sen} x - \cos x)}{\cos x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\cos x (\operatorname{sen} x - \cos x)}{\operatorname{sen} x - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} -\cos x = \cos \frac{\pi}{4} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$227 \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Desarrollo

Sea $z = \frac{1}{x}$, cuando $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \operatorname{sen} z = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

Pero $-1 \leq \operatorname{sen} z \leq 1$, además $-\frac{1}{z} \leq \frac{\operatorname{sen} z}{z} \leq \frac{1}{z}$, de donde

$$\lim_{z \rightarrow \infty} -\frac{1}{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0, \text{ por lo tanto } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 0$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Desarrollo

Sea $y = \frac{1}{x}$, cuando $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

228

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = -\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = -\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

Sea $y = x - 1$, cuando $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = - \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \\
&= - \lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (y+1) = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \operatorname{sen}(\frac{\pi y}{2} + \frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi y}{2} + \frac{\pi}{2})} \\
&= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(\operatorname{sen} \frac{\pi y}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2})}{\cos \frac{\pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(0 + \cos \frac{\pi y}{2})}{0 - \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cos(\frac{\pi y}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\pi y}{2})} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi y}{2}} = \frac{\cos(0)}{\frac{\pi}{2} (1)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

229 $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x)$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x) &= -\operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{ctg}(2x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} \cdot (-\operatorname{tg} x) \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg}^2 x - 1) \operatorname{tg}^2 x = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{tg}^2 x) = -\frac{1}{2} (1 - 0) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

230 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\pi - x}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\pi - x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\pi - x}$$

Sea $y = x - \pi \Rightarrow x = y + \pi$, además cuando $x \rightarrow \pi$, $y \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\pi - x} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\pi - x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{sen}(\frac{y + \pi}{2})}{\pi - y} \\
&= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{y}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{y}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{y} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{y}{2}}{y} \\
&= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \frac{y}{2})(1 + \cos \frac{y}{2})}{y(1 + \cos \frac{y}{2})} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \frac{y}{2}}{y(1 + \cos \frac{y}{2})} \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{y}{2}}{y} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{y}{2}}{1 + \cos \frac{y}{2}} \right) = -\frac{1}{2} (1) \left(\frac{0}{1+1} \right) = -\frac{1}{2} (0) = 0
\end{aligned}$$

231

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$$

Sea $y = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = y + \frac{\pi}{3}$. Cuando $x \rightarrow \frac{\pi}{3} \Rightarrow y \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi-3x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi-3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-2\cos(y+\frac{\pi}{3})}{\pi-3(y+\frac{\pi}{3})} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-2\cos(y+\frac{\pi}{3})}{3y} = -\frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-2(\cos y \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{3})}{y} \\
 &= -\frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-2(\cos \frac{y}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{sen} y)}{y} = -\frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1-\cos y}{y} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} y}{y} \right) \\
 &= -\frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1-\cos^2 y}{y(1+\cos y)} + \sqrt{3} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \right) \\
 &= -\frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} y}{1+\cos y} \right) + \sqrt{3} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \right] = -\frac{1}{3} (1(0) + \sqrt{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$232 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$$

Desarrollo

$$\cos mx - \cos nx = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{m+n}{2} \right) x \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{m-n}{2} \right) x$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{m+n}{2} \right) x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{m-n}{2} \right) x}{x} \\
 &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m+n}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{m+n}{2} \right)}{\frac{m+n}{2}} \cdot \frac{m-n}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{m-n}{2} \right)}{\frac{m-n}{2}} x
 \end{aligned}$$

$$= -2 \left(\frac{m+n}{2} \right) (1) \cdot \left(\frac{m-n}{2} \right) = - \left(\frac{m^2-n^2}{2} \right) = \frac{1}{2} (n^2 - m^2)$$

$$233 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \cos x)}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \cos x) (1 + \cos x)}{x^3 (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x)}{x^3 (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x}{x^3 (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^3 \left(\frac{1}{1 + \cos x} \right) = (1)^3 \left(\frac{1}{1+1} \right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$234 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x}$$

Desarrollo

Sea $z = \arcsen x \Rightarrow x = \operatorname{sen} z$; cuando $x \rightarrow 0$, entonces $z \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} z}{z}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$235 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg}(2x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{sen} 3x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} 3x}
 \end{aligned}$$

... (1)

Calculando $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} = 2, \text{ donde } z = \operatorname{arctg} 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} z$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{1}{2} \operatorname{tg} z} = 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{tg} z} = 2$$

Luego, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} = 2$... (2)

Reemplazando (2) en (1) se tiene: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg}(2x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}} = \frac{2}{3}$

236

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x)}{\operatorname{sen}(\pi x)}$$

Sea $z = x - 1 \Rightarrow x = z + 1$; Cuando $x \rightarrow 1 \Rightarrow z \rightarrow 0$, luego:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x)}{\operatorname{sen}(\pi x)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1-z-1)(1+z+1)}{\operatorname{sen} \pi(z+1)} \\ &= -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(2+z)}{\operatorname{sen} \pi z \cos \pi + \operatorname{sen} \pi \cdot \cos \pi z} \\ &= -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(2+z)}{-\operatorname{sen} \pi z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2+z}{\pi \operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{2+0}{\pi(1)} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

237

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x + \operatorname{sen}(3x)}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x + \operatorname{sen}(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}{1 + 3 \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}} = \frac{1-2}{1+3} = -\frac{1}{4}$$

238

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 + \sqrt{x}) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 + \sqrt{x}) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - x}$$

Sea $z = x - 1 \Rightarrow x = z + 1$; Cuando $x \rightarrow 1$, entonces $z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 + \sqrt{x}) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 + \sqrt{z+1}) \cos\left(\frac{\pi}{2}(z+1)\right)}{-z} \\ &= -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 + \sqrt{z+1}) \left(\cos \frac{\pi z}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)}{xz} \\ &= -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 + \sqrt{z+1}) \left(0 - \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2}\right)}{z} = -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 + \sqrt{z+1}) \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right)}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} (1 + \sqrt{z+1}) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} z} = (1 + \sqrt{0+1}) \left(1\right) \left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$

$$239 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} \\ &= (1) \left(\frac{1}{(1 + \sqrt{1})(1 + 1)}\right) = \frac{1}{(2)(2)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

240

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x})(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}{x(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - (1 - \sin x)}{x(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})} \\ &= 2(1) \left(\frac{1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Para hallar los límites de la forma: $\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)]^{\psi(x)} = c \quad \dots (\alpha)$

se debe tener presente:

- 1 Si existen los límites finitos: $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$; $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = B$, entonces

$$C = A^B$$

- 2 Si $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A \neq 1$ y $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \pm \infty$, en este caso el límite de C se halla directamente.

- 3 Si $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty$, se supone que $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, donde $\alpha(x) \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow a$ y por consiguiente:

$$C = \lim_{x \rightarrow a} [(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}]^{\alpha(x) \cdot \psi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \cdot \psi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x) - 1] \psi(x)}$$

Siendo $e = 2.718\dots$ el número de NEPER.

$$241 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x$$

Desarrollo

$$\varphi(x) = \frac{2+x}{3-x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \frac{2}{3} \neq 1$$

$$\text{Luego } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{\lim_{x \rightarrow 0} x} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

$$242 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1}\right)^{\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$243 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}\right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1}} = (0)^2 = 0$$

$$244 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}\right)^{\frac{\sin x}{x}} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}\right)^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \left(\frac{0-0+3}{0-0+2}\right)^1 = \frac{3}{2}$$

$$245 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1}\right)^{x^2}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1}\right)^{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1}\right)\right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

$$246 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Desarrollo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{-n}\right]^{(-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$247 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^2$$

$$248 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-1}}\right]^{\frac{-x}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$249 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-4}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4(x+2)}{x+3}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4(x+2)}{x+3}} = e^{-4} \end{aligned}$$

$$250 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Desarrollo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = e^x$$

$$251 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = e$$

$$252 \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

Desarrollo

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 1$, donde $\psi(x) = \cos x$, entonces

$\psi(x) = 1 + \alpha(x)$, donde $\alpha(x) \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow 0$ es decir:

$$\psi(x) = 1 + (\cos x - 1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 + \cos x - 1}{\cos x - 1} \right]^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x}} = e^{-(1) \left(\frac{0}{2} \right)} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Desarrollo

Análogo al caso anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \cos x - 1}{\cos x - 1} \right)^{\frac{1}{x^2}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

253 $\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(2x+1) - \ln(x+2)]$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(2x+1) - \ln(x+2)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) \\ &= \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{2+0}{1+0}\right) = \ln 2 \end{aligned}$$

254 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+10x)}{x}$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+10x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+10x)^{\frac{1}{x}} = \left[\log \lim_{x \rightarrow 0} (1+10x)^{\frac{1}{x}} \right] \\ &= \log \left[\lim_{x \rightarrow 0} ((1+10x)^{\frac{1}{10x}})^{10} \right] = \log e^{10} = 10 \log e \end{aligned}$$

255 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{(1-x)^{\frac{1}{x}}} \right) \right] = \frac{1}{2} \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{(1-x)^{\frac{1}{x}}} \right] = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}}{\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e}{e^{-1}} \right) = \frac{1}{2} \ln e^2 = \ln e = 1 \end{aligned}$$

256 $\lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x+1) - \ln x]$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x+1) - \ln x] &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right) = \ln e = 1 \end{aligned}$$

$$257 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = [\ln(\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}})]$$

y de acuerdo al ejercicio 152 b se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \ln[\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}] = \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln e = -\frac{1}{2}$$

$$258 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Desarrollo

$$\text{Sea } y = e^x - 1 \Rightarrow e^x = y + 1 \Rightarrow x = \ln(1 + y).$$

cuando $x \rightarrow 0$ entonces $y \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{y} \ln(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\ln e} \frac{1}{1}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$259 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

Desarrollo

$$\text{Sea } \alpha = a^x - 1 \Rightarrow x = \frac{\ln(\alpha + 1)}{\ln a}. \text{ Cuando } x \rightarrow 0, \text{ entonces } \alpha \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\frac{\ln(1 + \alpha)}{\ln a}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{\ln(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a$$

$$260 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1), \quad k > 0$$

Desarrollo

$$\text{Sea } y = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{y}. \text{ Cuando } n \rightarrow \infty, \text{ entonces } y \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y}(a^y - 1) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} \text{ de acuerdo al ejercicio 259}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = \ln a$$

$$261 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{ax} - 1) - (e^{bx} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{bx} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^a)^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^b)^x - 1}{x} \end{aligned}$$

y de acuerdo al ejercicio 259 se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^a)^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^b)^x - 1}{x} \\ &= \ln e^a - \ln e^b = a \ln e - b \ln e = a - b \end{aligned}$$

$$262 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}}$$

de acuerdo al ejercicio 258 se tiene: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x}}{e^x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{1}{e^0(1)} = 1$

263 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} hx}{x}$

Desarrollo

Se conoce que $\operatorname{sen} hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} hx}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{xe^x}$$

de acuerdo al ejercicio 259 se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} hx}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^2)^x - 1}{x} \left(\frac{1}{e^x} \right) = \frac{1}{2} \ln e^2 \left(\frac{1}{e^0} \right) = \frac{1}{2} (2 \ln e) = 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$

Desarrollo

Se conoce que $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2}$$

Introducción al Análisis

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2 e^x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{x^2 e^x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{e^x} \end{aligned}$$

de acuerdo al ejercicio 258 se tiene: $= \frac{1}{2} (1)^2 \frac{1}{e^0} = \frac{1}{2}$

HALLAR LOS SIGUIENTES LIMITES LATERALES.

264 a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + 0}} = -1$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1$$

265 a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tgh} x$

Desarrollo

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tgh} x$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

266 a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

267 a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x)^{\frac{1}{x}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}} \right] \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} [(1 + e^x)^{\frac{1}{e^x}}]^{\frac{e^x}{x}} \right) = \ln(e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}}) = \ln e^0 = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$

Desarrollo

Análogo al ejercicio (a) es decir:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x (1 + \frac{1}{e^x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x + \ln(1 + \frac{1}{e^x})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln e + \ln(1 + \frac{1}{e^x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln e + \ln(1 + \frac{1}{e^x})^{\frac{1}{x}} = 1 \end{aligned}$$

268 a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

269 a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x-1|}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} -1 = -1$$

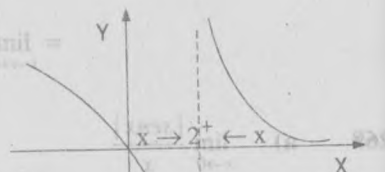
$$b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{|x-1|}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$$

$$270 \quad a) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2}$$

Desarrollo

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty$$

CONSTRUIR LA GRÁFICA DE LAS FUNCIONES

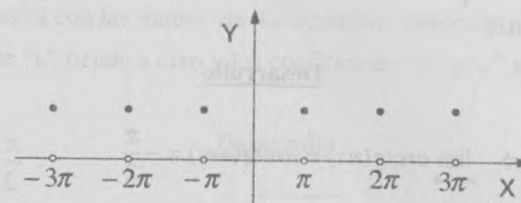
$$271 \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^{2n} x)$$

Desarrollo

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^{2n} x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^2 x)^n$$

$$\text{Si } x \neq \pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \cos^2 x < 1 \text{ entonces } y = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^2 x)^n = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{Si } x = k\pi, \cos^2 x = 1 \text{ entonces } y = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^2 x)^n = 1 \Rightarrow y = 1$$



$$272 \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^n}, (x > 0)$$

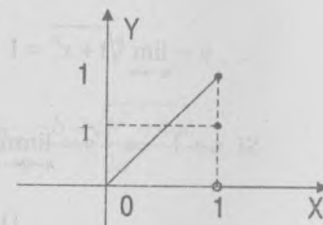
Desarrollo

$$\text{Si } 0 < x < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{ Luego: } y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^n} = \frac{x}{1+0} \Rightarrow y = x$$

$$\text{Cuando } x = 1 \Rightarrow y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cuando } x > 1 \Rightarrow y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{1/n}}{1+x} = \frac{0}{0+1} \Rightarrow y = 0$$

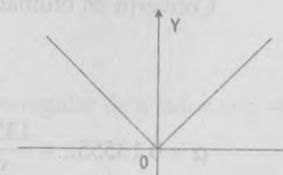
$$\text{Resumiendo } y = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



$$273 \quad y = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + \alpha^2}$$

Desarrollo

$$y = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + \alpha^2} = \sqrt{x^2 + 0} = |x| \Rightarrow y = |x|$$



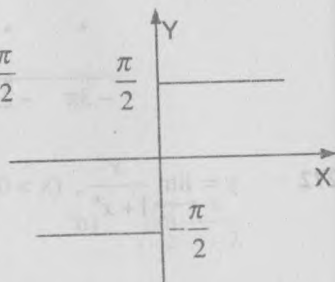
274 $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(nx)$

Desarrollo

Si $x < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(nx) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

Si $x = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(nx) = 0 \Rightarrow y = 0$

Si $x > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(nx) = \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$



275 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n}, (x > 0)$

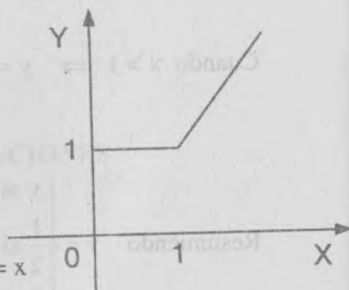
Desarrollo

Si $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+x^n \leq 2$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n}$

$\therefore y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} = 1 \Rightarrow y = 1$

Si $x > 1 \Rightarrow y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} = x \Rightarrow y = x$



Resumiendo: $y = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

276 Convertir en ordinaria la siguiente función periódica mixta: $\alpha = 0.13555\dots$

Desarrollo

$\alpha = 0.13555\dots = \frac{135-13}{900} = \frac{122}{900} = \frac{61}{450}$

277 ¿Qué ocurrirá con las raíces de la ecuación cuadrada $ax^2 + bx + c = 0$ cuando el coeficiente "a" tiende a cero y los coeficientes "b" y "c" son constantes, si $b \neq 0$?

Desarrollo

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Para $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} x_1 = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\lim_{a \rightarrow 0} x_1 = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{b^2 - 4ac - b^2}{2a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})}$

$= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2ac}{a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = -\frac{c}{b}$

Luego cuando $a \rightarrow 0$, $x_1 \rightarrow -\frac{c}{b}$

Para $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} x_2 = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\lim_{a \rightarrow 0} x_2 = -\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(b + \sqrt{b^2 - 4ac})(b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{4ac}{2a(b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = -\frac{c}{0} = -\infty$

Luego cuando $a \rightarrow 0$, $x_2 \rightarrow -\infty$

278 Hallar el límite del ángulo interno de un polígono regular de n lados si $n \rightarrow \infty$

Desarrollo

La suma de los ángulos internos de un polígono regular de n lados es:

$$S_i = \pi(n-2)$$

Como nos piden el límite de un ángulo interno cuando $n \rightarrow \infty$ es decir: $i = \frac{S_i}{n}$

$$\text{O sea: } i = \frac{\pi(n-2)}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n-2)}{n} = \pi$$

- 279 Hallar el límite de los perímetros de los polinomios regulares de n lados inscritos en una circunferencia de radio R y de los circunscritos a su alrededor, si $n \rightarrow \infty$.

Desarrollo

Para el caso de los polinomios inscritos se tiene: $2Rnsen\frac{\pi}{n}$.

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} 2Rnsen\frac{\pi}{n}$ para calcular este límite haremos $n = \frac{1}{x}$

Luego cuando $n \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$ tenemos:

$$\text{Entonces: } \lim_{n \rightarrow \infty} 2Rnsen\frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2R}{x} sen\pi x = 2R\pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sen\pi x}{\pi x} = 2R\pi$$

Para el caso de los polinomios circunscritos se tiene: $2Rntg\frac{\pi}{n}$

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} 2Rntg\frac{\pi}{n}$ haciendo $n = \frac{1}{x}$, $n \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2Rntg\frac{\pi}{n} = 2R \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} tg\pi x = 2R\pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg\pi x}{\pi x} = 2R\pi$$

- 280 Hallar el límite de la suma de las longitudes de las ordenadas de la $y = e^{-x} \cos \pi x$ trazadas en los puntos $x = 0, 1, 2, \dots, n$, si $n \rightarrow \infty$

Desarrollo

Para $x = 0, 1, 2, \dots, n$ los valores de $y = e^{-x} \cos \pi x$ son:

$$1, -\frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, -\frac{1}{e^3}, +\frac{1}{e^4}, -\frac{1}{e^5}, \dots$$

$$\text{Sea } S_n = 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e^4} - \frac{1}{e^5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{e^n} + \dots$$

es la suma de una progresión geométrica.

Además $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ donde "a" es el primer término y r es la razón.

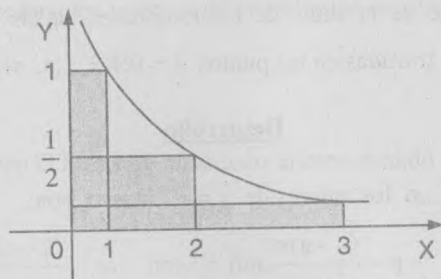
Luego: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ donde $r = \frac{1}{e}$

$$S_n = \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r} r^n \text{ reemplazando se tiene: } S_n = \frac{1}{1+\frac{1}{e}} - \frac{1}{1+\frac{1}{e}} \left(-\frac{1}{e}\right)^n$$

$$S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1+\frac{1}{e}} - 0 = \frac{e}{e+1} \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{e}{e+1}$$

- 281 Hallar el límite de las áreas de los cuadrados construidos sobre las ordenadas de la curva $y = 2^{1-x}$ como bases, donde $x = 1, 2, 3, \dots, n$, con la condición que $n \rightarrow \infty$.

Desarrollo



El área de cada uno de los cuadrados son:

$$1, 2 \cdot \frac{1}{2^2}, 3 \cdot \frac{1}{2^2}, 4 \cdot \frac{1}{2^3}, 5 \cdot \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{n}{2^n + 1}$$

$$S_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n - 1}$$

$$S_n = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{n}{2^n}\right) = 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \left(\frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}\right) = 4$$

- 282 Hallar el límite, cuando $n \rightarrow \infty$, del perímetro de la línea quebrada $M_0, M_1, \dots, M_n$ inscrita en la espiral logarítmica $r = e^{-\varphi}$ si los vértices de esta quebrada tienen, respectivamente, los ángulos polares. $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \dots$?

$$\varphi_n = \frac{n\pi}{2}$$

Desarrollo

Teniendo en cuenta la magnitud del ejercicio daremos algunas reflexiones iniciales:

Introducción al Análisis

- En la espiral $r = e^{-\varphi}$, r es un radio vector, $\forall$ valor de φ .
- La quebrada inscrita en la espiral significa que a cada vértice corresponde un vector.
- Cada segmento de la quebrada está obviamente entre 2 vértices consecutivos.
- Cada segmento es el lado de un triángulo cuyos otros dos lados son radios vectores correspondientes a estos vértices consecutivos. Entonces se aplica la fórmula: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$

- A cada vértice M_k le corresponde un radio vector

$$r_k = e^{-\varphi_k} \quad \text{donde} \quad \varphi_k = \frac{k\pi}{2} \quad \dots (1)$$

- El k -ésimo segmento de la quebrada S_k está comprendida entre radios vectores r_{k-1} y r_k , los cuales forman el k -ésimo: $(\varphi_k - \varphi_{k-1})$

- Calcularemos el k -ésimo segmento S_k :

$$S_k = \sqrt{r_{k-1}^2 + r_k^2 - 2r_{k-1}r_k \cos(\varphi_k - \varphi_{k-1})} \quad \dots (2)$$

Simplificando los exponentes y efectuando operaciones

$$S_k = \sqrt{e^{-k\pi} e^\pi + e^{-k\pi} - 2e^{-k\pi} e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2}}$$

$$S_k = \sqrt{e^{-k\pi} (e^\pi + 1)} \Rightarrow S_k = \sqrt{\frac{e^{k\pi} + 1}{e^{k\pi}}} \quad \dots (3)$$

h) Cálculo del perímetro de la quebrada finita: $M_0, M_1, \dots, M_n$

$$P_n = P_n(M_0, M_1, \dots, M_n) = \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{e^k}} + 1}{e^{\frac{\pi}{e^k}}}} \quad \dots (4)$$

$$P_n = \sum_{k=1}^n S_k = \sqrt{e^{\frac{\pi}{e^2}} + 1} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{e^2}} + \frac{1}{\frac{\pi}{e^2}} + \frac{1}{\frac{\pi}{e^2}} + \dots + \frac{1}{\frac{\pi}{e^2}} + \dots \right) \quad \dots (5)$$

$$P_n = \frac{\sqrt{e^{\frac{\pi}{e^2}} + 1}}{\frac{\pi}{e^2}} \left(1 + \frac{1}{\frac{\pi}{e^2}} + \frac{1}{\frac{\pi}{e^2}} + \dots + \frac{1}{\frac{\pi}{e^2}} + \dots \right)$$

Pero la suma de una progresión geométrica. $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$P_n = \frac{\sqrt{e^{\frac{\pi}{e^2}} + 1}}{\frac{\pi}{e^2}} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{\frac{\pi}{e^2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\frac{\pi}{e^2}}} \right) = \frac{\sqrt{e^{\frac{\pi}{e^2}} + 1}}{\frac{\pi}{e^2}} \left(\frac{1 - e^{-\frac{\pi n}{e^2}}}{\frac{\pi}{e^2} - 1} \right) = \frac{\sqrt{e^{\frac{\pi}{e^2}} + 1}}{\frac{\pi}{e^2} - 1} (1 - e^{-\frac{\pi n}{e^2}})$$

i) cálculo del perímetro llevando el límite para $n \rightarrow \infty$

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{e^{\frac{\pi}{e^2}} + 1}}{\frac{\pi}{e^2} - 1} (1 - e^{-\frac{\pi n}{e^2}}) = \frac{\sqrt{e^{\frac{\pi}{e^2}} + 1}}{\frac{\pi}{e^2} - 1} (1 - 0)$$

$$\therefore P = \frac{\sqrt{e^{\frac{\pi}{e^2}} + 1}}{\frac{\pi}{e^2} - 1}$$

1.4. INFINITÉSIMOS E INFINITOS.-

ii) **INFINITÉSIMOS.-** Si $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ es decir: Si $|\alpha(x)| < \epsilon$ cuando

$0 < |x - a| < \delta(\epsilon)$, la función $\alpha(x)$ se llama infinitésima

cuando $x \rightarrow a$, en forma similar se determina la función infinitésima $\alpha(x)$

cuando $x \rightarrow \infty$

OBSERVACIÓN.- La suma y el producto de un número limitado infinitésimo, cuando $x \rightarrow a$, es también un infinitésimo

cuando $x \rightarrow a$.

Si $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son infinitésimos, cuando $x \rightarrow a$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$ donde c es

número distinto a cero las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ reciben el nombre

infinitésimos de un mismo orden, si $c = 0$, se dice que la función $\alpha(x)$ es un

infinitésimo de orden superior respecto a $\beta(x)$. La función $\alpha(x)$ se denomina

infinitésimo de orden n respecto a la función $\beta(x)$, si: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = c$, donde

$0 < |c| < +\infty$; Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se llaman

equivalentes cuando $x \rightarrow a$: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

El límite de la razón de dos infinitésimos no se altera, si los términos de la misma se sustituyen por otros, cuyos valores respectivos sean equivalentes,

de acuerdo con este teorema, al hallar el límite de la fracción: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, donde

$\alpha(x) \rightarrow 0$ y $\beta(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow a$, el numerador y denominador de la fracción pueden restársele (o sumársele) infinitésimos de orden superior elegidos de tal forma, que las cantidades resultantes sean equivalentes a las anteriores.

- b) **INFINITOS.-** Si para un número cualquiera N , tan grande como se desee, existe tal $\delta(N)$ se verifica la desigualdad $|f(x)| > N$.

La función $f(x)$ recibe el nombre de infinito, cuando $x \rightarrow a$, análogamente $f(x)$ se determina como infinito cuando $x \rightarrow \infty$.

- 288 Demostrar que la función $f(x) = \frac{\text{sen} x}{x}$ en infinitamente pequeña, cuando $x \rightarrow \infty$. ¿Para qué valores de x se cumple la desigualdad $|f(x)| < \varepsilon$?

Si ε es un número arbitrario? Hacer los cálculos para

- a) $\varepsilon = 0.1$ b) $\varepsilon = 0.01$ c) $\varepsilon = 0.001$

Desarrollo

Por definición se tiene: Si $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ o $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$ $\alpha(x)$ se llama infinitésimo.

Es decir que debemos demostrar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen} x}{x} = 0$, pero se conoce que:

$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\text{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x} \text{ y además sabemos que:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen} x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen} x}{x} \leq 0 \text{ de donde:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen} x}{x} = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\text{sen} x}{x} \text{ es infinitamente pequeña. Veremos los valores}$$

$$\text{de } x \text{ para que } |f(x)| < \varepsilon \text{ como } f(x) = \frac{\text{sen} x}{x} \Rightarrow \left| \frac{\text{sen} x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \text{ de donde}$$

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

a) para $\varepsilon = 0.1 \Rightarrow |x| > 10$

b) para $\varepsilon = 0.01 \Rightarrow |x| > 100$

c) para $\varepsilon = 0.001 \Rightarrow |x| > 1000$

289

Demostrar que la función $f(x) = 1 - x^2$, es infinitamente pequeña cuando $x \rightarrow 1$, ¿Para qué valores de x se cumple la desigualdad $|f(x)| < \varepsilon$.

Si ε es un número positivo arbitrario?. Hacer los cálculos numéricos para:

a) $\varepsilon = 0.1$

b) $\varepsilon = 0.01$

c) $\varepsilon = 0.001$

Desarrollo

Para que $f(x)$ sea infinitamente pequeña cuando $x \rightarrow 1$ se debe de demostrar que: es decir

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) = 0 \Rightarrow f(x) \text{ es infinitamente pequeña}$$

determinaremos los valores de x para que se cumpla $|f(x)| < \varepsilon$

$$|f(x)| = |1 - x^2| = |1 - x||1 + x| < \varepsilon$$

$$|x-1||x+1| < \varepsilon \text{ pero } |x-1| < \frac{\varepsilon}{|x+1|} \text{ de donde } |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ puesto que } x \rightarrow 1$$

a) para $\varepsilon = 0.1 \Rightarrow |x-1| < 0.05$

b) para $\varepsilon = 0.01 \Rightarrow |x-1| < 0.005$

290

Demostrar que la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$ es infinitamente grande cuando $x \rightarrow 2$

¿En qué entorno $|x-2| < \delta$ se verifica la desigualdad $|f(x)| > N$.

Si N es un número positivo arbitrario?

Hallar δ , si

a) $N = 10$

b) $N = 100$

c) $N = 1000$

Desarrollo

Se procede en forma similar a los casos anteriores.

$$\text{Luego: } |f(x)| > N \Rightarrow \left| \frac{1}{x-2} \right| > N \Rightarrow |x-2| < \frac{1}{N} = \delta$$

a) Si $N = 10 \Rightarrow \delta = \frac{1}{10} = 0.1$

b) Si $N = 100 \Rightarrow \delta = \frac{1}{100} = 0.01$

c) Si $N = 1000 \Rightarrow \delta = \frac{1}{1000} = 0.001$

291 Determinar el orden infinitesimal:

- a) De la superficie de una esfera.
 b) Del volumen de la misma, si su radio r es un infinitésimo de la 1ra orden.
 ¿Cuál es el orden infinitesimal del radio y del volumen, respecto al área de esta esfera?

Desarrollo

Se conoce que: si y es infinitesimal de orden " n " se escribe $y = knx^n + \phi(x^n)$

de donde $\frac{y}{x^n} = kn$. Luego " n " es el orden infinitesimal.

- a) Superficie de la esfera $y = 4\pi r^2$, $x = r$

$$\frac{4\pi r^2}{r^n} = 4\pi \Rightarrow \frac{r^2}{r^n} = 1 \Rightarrow r^2 = r^n$$

Luego $n = 2$, la superficie es de segundo orden respecto al radio.

Introducción al Análisis

b) Volumen de la esfera: $\frac{4\pi r^3}{3r^n} = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow \frac{r^3}{r^n} = 1 \Rightarrow r^3 = r^n$

de donde $n = 3$, el volumen de la esfera es de tercer orden respecto al radio. Además tenemos que:

$$\frac{r}{(4\pi r^2)^n} = ((4\pi)^n)^{-1} \Rightarrow \frac{\sqrt[n]{r}}{\sqrt[n]{(4\pi r^2)^n}} = \sqrt[n]{((4\pi)^n)^{-1}}$$

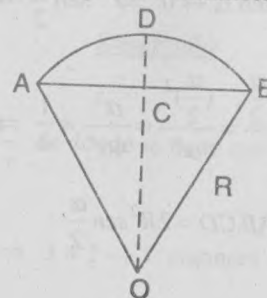
$$\frac{r^{\frac{1}{n}}}{4\pi r^2} = (4\pi)^{-1} \Rightarrow r^{\frac{1}{n}} = r^2 \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{4\pi}{3} r^3}{(4\pi r^2)^n} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{(4\pi)^n} \Rightarrow \frac{\sqrt[n]{r} \cdot \sqrt[n]{\frac{4}{3}\pi}}{\sqrt[n]{(4\pi r^2)^n}} = \frac{\sqrt[n]{\frac{4}{3}\pi}}{\sqrt[n]{(4\pi)^n}}$$

$$\frac{3}{r^n} = r^2 \text{ de donde } n = \frac{3}{2}$$

292 Sea α el ángulo central de un sector circular ABO cuyo radio R tiende a 0. Determinar el orden infinitesimal:

- a) De la cuerda AB
 b) De la flecha del arco CD
 c) Del área del $\triangle ABD$, respecto al infinitésimo α .



Desarrollo

- a) En la figura se observa que $AB = 2AC$ además $AC = R \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$

$$\frac{2R \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\alpha^n} = \frac{2R}{2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\alpha^n} = \frac{1}{2} \text{ cuando } \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \rightarrow 0 \text{ de donde}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha^n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \alpha^n \Rightarrow n = 1$$

- b) En la figura se observa que: $CD = R(1 - \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}})$ de donde

$$\frac{R(1 - \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}})}{\alpha^n} = R \left(\frac{1}{\alpha^n} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha^n}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)$$

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\alpha^n} = \frac{1}{\alpha^n} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha^n}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha^n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha^n}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha^n} = \frac{1}{4} \text{ pero } \operatorname{sen} \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \rightarrow 0 \text{ de donde } \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \approx \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Por lo tanto: } \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha^n} = \frac{\left(\frac{\alpha}{2} \right)^2}{\alpha^n} = \frac{\alpha^2}{4\alpha^n} = \frac{1}{4} \Rightarrow n = 2$$

c) Área del $\triangle ABC = AB \cdot CD = 2R^2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$

$$(1 - \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}) \text{ Entonces:}$$

$$\frac{2R^2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} (1 - \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}})}{\alpha^n} = \frac{2R^2}{8(1 + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}})}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} (1 - 1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2})}{\alpha^n} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^3 \frac{\alpha}{2}}{\alpha^n} = \frac{1}{8}$$

$$\text{además } \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \approx \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^3 \frac{\alpha}{2}}{\alpha^n} = \frac{\alpha^3}{8\alpha^n} = \frac{1}{8} \Rightarrow \alpha^3 = \alpha^n \Rightarrow n = 3$$

293

Determinar el orden infinitesimal respecto a x , cuando $x \rightarrow 0$, de las funciones siguientes:

a) $\frac{2x}{1+x}$

b) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$

c) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$

d) $1 - \cos x$

e) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x$

Desarrollo

a) Sea $f(x) = \frac{2x}{1+x}$ de donde se tiene que: $\frac{\frac{2x}{1+x}}{x^n} = \frac{2x}{(1+x)x^n} = 2$

$$\text{cuando } x \rightarrow 0 \Rightarrow x+1 \rightarrow 1 \text{ entonces } \frac{2x}{x^n} = 2 \Rightarrow x^n = x \Rightarrow n = 1$$

- b) Sea $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ de donde se tiene que:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{(x + \sqrt{x})^2}}}{x^n} = \frac{\sqrt[4]{x(x+1+2\sqrt{x})}}{x^n} = 1 \text{ cuando } x \rightarrow 0, \quad x+1+2\sqrt{x} \rightarrow 1$$

$$\text{entonces } \frac{\sqrt[4]{x}}{x^n} = 1 \Rightarrow x^n = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow n = \frac{1}{4}$$

- c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$ de donde se tiene que:

$$\frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{2}}}{x^n} = 1 \Rightarrow \frac{x^{\frac{2}{3}}(1 - x^{\frac{5}{6}})}{x^n} = 1$$

$$\text{cuando } x \rightarrow 0, \quad 1 - x^{\frac{5}{6}} \rightarrow 1 \text{ entonces } \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^n} = 1 \Rightarrow n = \frac{2}{3}$$

- d) $f(x) = 1 - \cos x$ de donde se tiene: $\frac{1 - \cos x}{x^n} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 x}}{x^n} = 1$

$$\text{además } \sqrt{1 - \sin^2 x} \approx 1 - \sin^2 x \Rightarrow \frac{1 - 1 + \sin^2 x}{x^n} = 1$$

$$\text{cuando } x \rightarrow 0 \text{ se tiene } \sin^2 x \rightarrow x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^n} = 1 \Rightarrow n = 2$$

- e) $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$ de donde se tiene:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^n} = \frac{\sin x}{\cos x} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 x}}{x^n} \right) = 1$$

$$\text{cuando } x \rightarrow 0 \Rightarrow \sqrt{1 - \sin^2 x} \approx 1 - \sin^2 x$$

$$\frac{\operatorname{tg} x(1 - 1 + \sin^2 x)}{x^n} = \frac{\operatorname{tg} x(\sin^2 x)}{x^n} = \frac{\sin^3 x}{x^n \cos x} = 1$$

$$\text{cuando } x \rightarrow 0, \quad \sin x \rightarrow x, \quad \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{x^3}{x^n} = 1 \Rightarrow n = 3$$

- 294 Demostrar que la longitud de un arco infinitesimal de una circunferencia de radio constante, es equivalente a la longitud de la cuerda que tensa.

Desarrollo

Se debe de considerar $\alpha(x)$ = longitud del arco infinitesimal y $\beta(x)$ = longitud de la cuerda tensa; para que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ sean equivalentes se debe probar

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \text{ y esto es inmediato.}$$

- 295 Son equivalentes un segmento infinitésimo y la semi circunferencia infinitesimal construida sobre el como diámetro?

Desarrollo

$$\text{Se conoce que } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \text{ entonces } \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\pi d}{2d} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Como } \frac{\pi}{2} \neq 1 \Rightarrow \text{no son equivalente.}$$

- 296 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x - x^3)^2}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x - x^3)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin 5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} \cdot \frac{5 \sin 5x}{5x} = 3(1)^5 \cdot 5(1) = 15$$

- 297 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\ln(1-x)}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-x\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} = -1$$

298 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}$ Como $\ln x \approx x$ y $1-x \approx -x$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{-x} = -1$$

299 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 - \cos x) + (1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + 1 + \cos x) = 3 \end{aligned}$$

300 Demostrar que cuando $x \rightarrow 0$, las magnitudes $\frac{x}{2}$ y $\sqrt{1+x}-1$ son equivalentes entre sí, empleando este resultado, mostrar que, cuando $|x|$ es pequeño, se verifica la igualdad aproximada $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ (1). Aplicando la fórmula (1) hallar aproximadamente:

a) $\sqrt{1.06}$ b) $\sqrt{0.97}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\sqrt{120}$

DesarrolloIntroducción al Análisis

Para que $\alpha(x) = \frac{x}{2}$ y $\beta(x) = \sqrt{1+x}-1$ sean equivalentes se debe de probar

que: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ es decir: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

Luego $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son equivalente es decir: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ de donde:

$$\frac{x}{2} \approx \sqrt{1+x}-1 \quad \text{y} \quad \frac{x}{2}+1 \approx \sqrt{1+x} \quad \text{es decir} \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

a) $\sqrt{1.06} = \sqrt{1+0.6} \approx 1 + \frac{0.6}{2} = 1+0.3 \Rightarrow \sqrt{1.06} \approx 1.3$

b) $\sqrt{0.97} = \sqrt{1-0.03} \approx 1 + \frac{-0.03}{2} \Rightarrow \sqrt{0.97} \approx 0.985$

c) $\sqrt{10} = \sqrt{1+9} \approx \sqrt{9(1+\frac{1}{9})} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}} \approx 3(1+0.556) = 3.167$

301 Demostrar que, cuando $x \rightarrow 0$, se verifican las igualdades aproximadas siguientes, con precisión hasta los términos de orden x^2 .

a) $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$

b) $\sqrt{a^2+x^2} \approx a + \frac{x^2}{2a}, (a > 0)$

c) $(1+x)^n \approx 1+nx$ (n , es un # natural)

d) $\log(1+x) \approx Mx$, donde $M = \log e = 0.4342944$ partiendo de estas fórmulas calcular aproximadamente.

1) $\frac{1}{1-0.2}$

2) $\frac{1}{0.97}$

3) $\frac{1}{105}$

4) $\sqrt{1.1}$

5) 1.04^3

6) 0.93

7) $\log(1.1)$

Desarrollo

Para demostrar que $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ se debe probar que: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{1-x} = 0$

$$\text{Luego: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x^2} = 1$$

En forma similar con los demás ejercicios.

302. Demostrar que, cuando $x \rightarrow \infty$, la función racional entera $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ ($a_0 \neq 0$) es una magnitud infinitésimo, equivalente al término superior a_0x^n .

Desarrollo

Para que sea equivalente se debe probar que: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{a_0x^n} = 1$, es decir:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n}{a_0x^n} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0x^n} \right) = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1 \end{aligned}$$

Luego $P(x)$ y a_0x^n son equivalentes.

303. Supongamos que $x \rightarrow \infty$ tomando a x como magnitud infinito de 1er orden, determinar el orden de crecimiento de las funciones:

a) $x^2 - 100x - 1000$ b) $\frac{x^5}{x+2}$ c) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$

d) $\sqrt[3]{x-2x^2}$

DesarrolloIntroducción al Análisis

De acuerdo al ejercicio 293 se tiene que:

- a) el orden de crecimiento 2. b) el orden de crecimiento 1.
c) el orden de crecimiento $\frac{1}{2}$ d) el orden de crecimiento 0.

1.5. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES.-

1era. **DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD.-** La función $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$ (o en el punto x_0) si:

- 1 Dicha función está determinada en el punto x_0 es decir que existe $f(x_0)$.
- 2 Existe y es finito el límite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- 3 Este límite es igual al valor de la función en el punto x_0 , es decir $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$... (1) haciendo la sustitución $x = x_0 + \Delta x_0$ donde $\Delta x_0 \rightarrow 0$, se puede escribir la condición (1) de la siguiente forma:

$$\lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)] = 0$$

Si la función es continua en cada uno de los puntos de un campo determinado, se dice que es continua en este campo.

2do. PUNTOS DE DISCONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN.-

Si dice que una función $f(x)$ es discontinua en punto x_0 , que pertenece al campo de existencia de la función $f(x)$ tiene finitos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$$

Pero los tres puntos $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$ y $f(x_0 + 0)$ son iguales entre sí, entonces x_0 recibe el nombre de discontinuidad de 1ra. Especie. En particular, si $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, x_0 se llama punto discontinuidad evitable para que la función $f(x)$ sea continua en el punto x_0 , es necesario y suficiente que:

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

- 304 Demostrar que la función $y = x^2$ es continua para cualquier valor del argumento x .

Desarrollo

$$y = f(x) = x^2$$

- i) $f(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$
- ii) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0^2$
- iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = x_0^2$ luego $f(x) = x^2$ es continua en todo valor del argumento x .

- 305 Demostrar que la función racional entera $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ es continua para cualquier valor de x .

Desarrollo

- i) $P(x)$ está definida $\forall x \in \mathbb{R}$
- ii) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$
- iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_n$

Luego $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ es continua para cualquier valor de x .

Introducción al Análisis

- 306 Demostrar que la función racional fraccionaria.

$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$. Es continua para todos los valores de x a excepción de aquellos que anulan el denominador.

Desarrollo

- i) $R(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, a excepción de aquellos valores que anulan a $b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m = 0$
- ii) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m} = \frac{a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x_0^m + b_1x_0^{m-1} + \dots + b_m}$
- iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = R(x_0) = \frac{a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x_0^m + b_1x_0^{m-1} + \dots + b_m}$

luego $R(x)$ es continua a excepción de aquellos valores de x que anulan el denominador.

- 307 Demostrar que la función $y = \sqrt{x}$ es continua para $x \geq 0$.

Desarrollo

- i) $y = f(x) = \sqrt{x}$ está definida para $x \geq 0$
- ii) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt{x_0}$ donde $x_0 \in [0, +\infty)$
- iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \sqrt{x_0} \Rightarrow y = f(x) = \sqrt{x}$ es continua $\forall x \in [0, +\infty)$

- 308 Demostrar que la función $f(x)$ es continua y no negativo en el intervalo (a, b) si la función $f(x) = \sqrt{f(x)}$ también es continua en este intervalo.

Desarrollo

i) $f(x) = \sqrt{f(x)}$ está definida que: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt{f(x_0)}$

iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \sqrt{f(x_0)} \Rightarrow f(x) = \sqrt{f(x)}$ es continua $\forall x \in (a, b)$

309 Demostrar que la función $y = \cos x$ es continua para cualquier valor de x .

Desarrollo

a) $f(x) = \cos x$ está definida para: $|\cos x| \leq 1, -\infty < x < \infty$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0) = \sqrt{f(x_0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) \Delta x = (-1) \operatorname{sen} x (0) = 0 \end{aligned}$$

Luego $y = \cos x$ es continua en $-\infty < x < \infty$

310 Para qué valores de x serán continuas las funciones:

a) $\operatorname{tg} x$

b) $\operatorname{ctg} x$

Desarrollo

a) $\operatorname{tg} x$ es discontinua en los puntos donde $\operatorname{tg} x = \infty$

$$\text{Como } \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \infty \text{ cuando } \cos x = 0$$

$$\text{Pero } \cos x = 0 \Rightarrow x = h\pi \pm \frac{\pi}{2} \text{ para } h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Introducción al Análisis

Cuando $x \neq h\pi \pm \frac{\pi}{2}, 0 \leq |\cos x| \leq 1$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \text{ donde } x \neq h\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cos x} = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{tg} x$ es continua en $x \neq h\pi \pm \frac{\pi}{2}$ donde $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

b) $\operatorname{ctg} x$ es discontinua en donde $\operatorname{ctg} x = \infty$

$$\text{como } \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \infty \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0$$

$$\text{pero } \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = h\pi, h \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta \operatorname{ctg} x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x) = 0$$

entonces $\operatorname{ctg} x$ es continua en donde $x \neq h\pi, h \in \mathbb{Z}$

311 Demostrar que la función $y = |x|$ es continua, construir la gráfica de función.

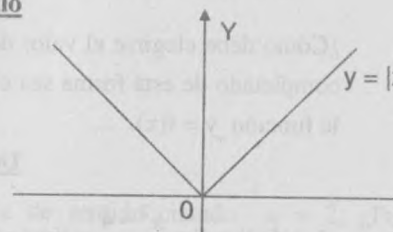
Desarrollo

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para que sea continua debe cumplirse:

i) $y = |x|$ está definida en $x = 0$

ii) $\exists \lim_{x \rightarrow 0} |x|$ para esto se tiene $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |x|$



$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = f(0) \Rightarrow 0 = 0$$

Por lo tanto es continua $\forall x \in \mathbb{R}$

- 312 Demostrar que la magnitud absoluta de una función continua es también una función continua.

Desarrollo

Sea $f(x) = |f(x)|$ está definida para todo $f(x)$ y por ser $f(x)$ continua, está también definida para todo x .

$$\Delta f(x) = |f(x) + \Delta f(x)| - |f(x)|$$

$$\Delta f(x) = \sqrt{(f(x) + \Delta f(x))^2} - \sqrt{f(x)^2}$$

$$\lim_{\Delta f(x) \rightarrow 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta f(x) \rightarrow 0} \sqrt{(f(x) + \Delta f(x))^2} - \sqrt{f(x)^2}$$

$$\lim_{\Delta f(x) \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)[2f(x) + \Delta f(x)]}{2f(x) + \Delta f(x)} = 0$$

- 313 Una función está dada por la fórmula $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{cuando } x \neq 2 \\ A, & \text{cuando } x = 2 \end{cases}$

¿Cómo debe elegirse el valor de la función $A = f(2)$, para que la función $f(x)$, completada de esta forma sea continua cuando $x = 2$? Construir la gráfica de la función $y = f(x)$.

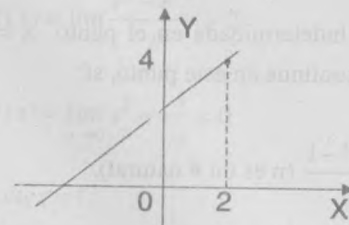
Desarrollo

$$A = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

Luego $A = f(2) = 4$ es como debe de elegirse para que sea continua.

$$\text{Luego } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases} \text{ de donde } f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

Su gráfico es:



- 314 El segundo de la igualdad $f(x) = 1 - x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ carece de sentido cuando $x \rightarrow 0$. ¿Cómo elegir el valor de $f(0)$ para que la función $f(x)$ sea continua en punto?

Desarrollo

Para esto tomamos el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow 0$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x \operatorname{sen} \frac{1}{x}) = 1 - 0 = 1$$

Luego elegiremos a $f(0)$ de la siguiente manera: $f(0) = 1$. Es decir:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

- 315 La función $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x - 2}$ carece de sentido cuando $x = 2$, ¿Puede elegirse el valor de $f(2)$ de tal forma que la función completada sea continua cuando $x = 2$?

Desarrollo

$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \arctg \frac{1}{x-2}$ $\nexists$; luego no se puede elegir $f(2)$ de tal manera que sea continua.

- 316 La función $f(x)$ es indeterminada en el punto $x = 0$. Determinar $f(0)$ de tal forma que $f(x)$ sea continua en este punto, sí:

a) $f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}$ (n es un $\#$ natural).

Desarrollo

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} \quad \text{sea } 1+x = \alpha, x = \alpha - 1, \text{ cuando } x \rightarrow 1; \alpha \rightarrow 1$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = n$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 1} (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \dots + 1) = 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

$$\text{Luego } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = n$$

b) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Desarrollo

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \left(\frac{1}{1 + \cos x} \right) = (1) \cdot \left(\frac{1}{1+1} \right) = \frac{1}{2}$$

En forma similar para:

c) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} = 2$

d) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$

e) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$

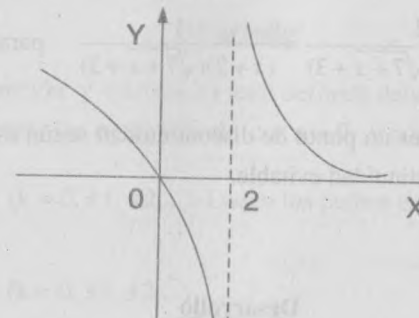
f) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x = 1$

AVERIGUAR SI SON CONTINUAS LAS SIGUIENTES FUNCIONES

317 $y = \frac{x^2}{x-2}$

Desarrollo

La función $y = \frac{x^2}{x-2}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, menos en $x = 2$, es decir que $x = 2$ es discontinua de 2da especie.



318

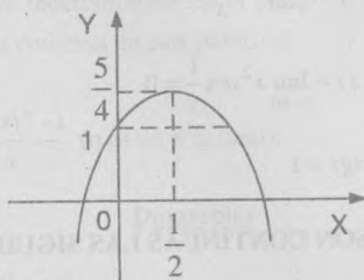
$$y = \frac{1+x^3}{1+x}$$

Desarrollo

$$y = \frac{1+x^3}{1+x} = \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x}, \text{ de donde para } x \neq -1$$

$y = 1 - x + x^2$, luego la función tiene una discontinuidad en $x = -1$ evitable.

Su gráfica es:



319

$$y = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$$

Desarrollo

$$y = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} = \frac{(\sqrt{7+x}-3)(\sqrt{7+x}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{7+x}+3)} = \frac{7+x-9}{(x^2-4)(\sqrt{7+x}+3)}$$

$$y = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} = \frac{1}{(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} \quad \text{para } x \neq \pm 2$$

Luego en $x = -2$ es un punto de discontinuidad según especie y en $x = 2$, es un punto de discontinuidad evitable.

320

$$y = \frac{x}{|x|}$$

Desarrollo

$$\text{Si } x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = 1$$

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = -1$$

Luego la función en el punto $x = 0$ tiene una discontinuidad de p especie.

321

$$y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

Desarrollo

La función $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ carece de sentido cuando $x = 0$, pero es

discontinuidad de 2da especie, puesto que $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \nexists$

322

$$y = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$$

Desarrollo

La función en $x = 0$ carece de sentido, pero es una discontinuidad evitable

puesto que: $y(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1$

Además en $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) son puntos discontinuidad infinita.

323

$$y = \ln(\cos x)$$

Desarrollo

Para que la función $y = \ln(\cos x)$ esté definida debe cumplirse que $\cos x > 0$. Luego quitaremos los puntos donde $\cos x = 0$, y además $\cos x < 0$, es de

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Luego los puntos de discontinuidad son:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

324

$$y = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$$

Desarrollo

En forma similar el ejercicio 323 se obtiene que los puntos de discontinuidad es $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) (infinita).

$$325 \quad y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

Desarrollo

La función $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ carece de sentido cuando $x = 0$, luego la función es discontinua en $x = 0$, de la especie.

$$326 \quad y = (1+x) \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1-x^2} \right)$$

Desarrollo

La función tiene en $x = -1$ un punto de discontinuidad evitable y en $x = 1$ es un punto de discontinuidad de segunda especie.

$$327 \quad y = e^{\frac{1}{x+1}}$$

Desarrollo

La función en $x = -1$ carece de sentido, luego en $x = -1$ es un punto de discontinuidad de segunda especie.

$$328 \quad y = e^{\frac{1}{x^2}}$$

Desarrollo

La función en $x = 0$ carece de sentido, luego la función en el punto $x = 0$ tiene una discontinuidad evitable.

$$329 \quad \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$$

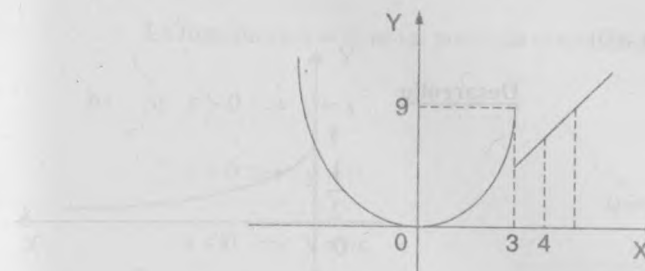
Desarrollo

Introducción al Análisis

La función en el punto $x = 1$ carece de sentido, en este caso es un punto de discontinuidad de primera especie, es decir que $f(x_0 - 0)$ y $f(x_0 + 0)$ son diferentes.

$$330 \quad y = \begin{cases} x^2, & x \leq 3 \\ 2x+1, & x > 3 \end{cases} \quad \text{Construir la gráfica de esta función}$$

Desarrollo



$$\text{Sí } x < 3 \Rightarrow y = x^2$$

$$x > 3 \Rightarrow y = 2x + 1$$

331 Demostrar que la función de Dirichlet $X(x)$, que es igual a cero si x es irracional e igual a 1 cuando x es racional, es discontinua para cada uno de los valores de x .

Desarrollo

$$X(x) = \begin{cases} 0, & x \in I \\ 1, & x \in Q \end{cases} \quad \text{Supongamos que es continua; luego}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\text{tomamos } x_1 \in I \text{ (Irracional), } x_1 \in (a - \delta, a + \delta)$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow |0 - L| < \varepsilon \Rightarrow |L| < \varepsilon \Rightarrow L = 0$$

además como $x_2 \in Q$ y $x_2 \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow |1 - L| < \varepsilon \Rightarrow 1 - L = 0$$

Luego $L = 1$. Llegamos a una contradicción.

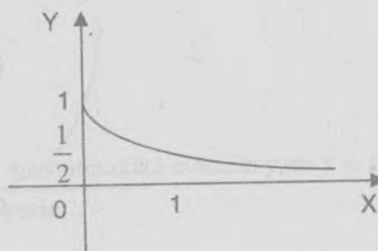
$\therefore$ es discontinua.

AVERIGUAR SI SON CONTINUAS Y CONSTRUIR LA GRAFICA DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES

332 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^n} \quad (x \geq 0)$

Desarrollo

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^n} = 0$



333 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x \arctg nx)$

Desarrollo

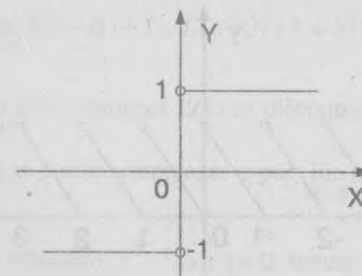
$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x \arctg nx) = x \arctg(\infty) = \frac{\pi x}{2}$$

Como $y = \frac{\pi x}{2}$ la función es continua en todo x .

334 a) $y = \text{sig}(x)$ b) $y = x \text{ Sig}(x)$ c) $y = \text{Sig}(\text{sen } x)$

donde la función $\text{Sig } x$ se determina por la formula:
$$\text{sig}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Desarrollo

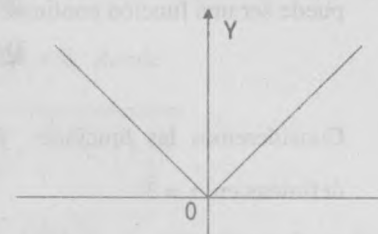


La función en $x = 0$ es un punto de discontinuidad de la primera especie.

b) Si $x > 0 \Rightarrow y = x$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x < 0 \Rightarrow y = -x$$



La función es continua en todo x .

335 a) $y = x - E(x)$

b) $y = x E(x)$, donde $E(x)$ es la parte entera del número x .

Desarrollo

$$\text{Si } x \in [0, 1) \Rightarrow E(x) = 0 \Rightarrow y = x$$

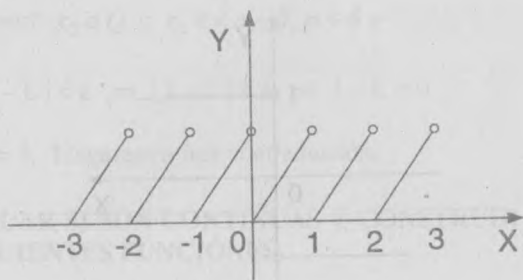
$$x \in [1, 2) \Rightarrow E(x) = 1 \Rightarrow y = x - 1$$

$$x \in [2, 3) \Rightarrow E(x) = 2 \Rightarrow y = x - 2$$

$$x \in [-1, 0) \Rightarrow E(x) = -1 \Rightarrow y = x + 1$$

$$x \in [-2, -1) \Rightarrow E(x) = -2 \Rightarrow y = x + 2$$

$E(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}$, son puntos de discontinuidad de la primera especie.



- 336 Dar un ejemplo que demuestre que la suma de dos funciones discontinuas puede ser una función continua.

Desarrollo

Consideremos las funciones $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ y $g(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ que están definidas en $x \neq 3$.

Pero si sumamos: $f(x) + g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} + \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

$$f(x) + g(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} + \frac{(x-1)(x-3)}{x-3} = (x-3) \left(\frac{x+3+x-1}{x-3} \right) = 2x+2$$

$\therefore f(x) + g(x) = 2x + 2$ está definida $\forall x$, por lo tanto $(f+g)(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

- 237 Sea α una fracción propia positiva que tiende a cero ($0 < \alpha < 1$) ¿se puede poner en la igualdad $E(1 + \alpha) = E(1 - \alpha) + 1$, que se verifica para todos los valores de α , el límite de la cantidad α ?

Desarrollo

$E(1 + \alpha) = E(1 - \alpha) + 1$ donde $E(1 + \alpha) = E(x)$ donde $x = 1$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha = 0$ entonces reemplazando: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha$, por el valor de α .

Introducción al Análisis

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} E(1 + \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} E(1 - \alpha) + 1 = E(1 - 0) + 1 = E(1) + 1 = 1 + 1 = 2$$

Luego $E(1) \neq \lim_{\alpha \rightarrow 0} E(1)$ entonces $E(x)$ es discontinua en $x = 1$ en el inter

$[1, 2]$ entonces no se puede reemplazar α por $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha$

- 338 Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tienen una raíz real en el intervalo $(1, 2)$. Calcular aproximadamente esta raíz.

Desarrollo

Por fórmula de Cardano se tiene: $X = A + B$, donde

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \quad y \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

además $x^3 + px + 1 = 0$ de donde $x^3 - 3x + 1 = 0$, reemplazando se tiene

$$A = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\left(-\frac{3}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}; \quad B = \sqrt[3]{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}$$

$$\text{Luego: } x = \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}} \in (1, 2)$$

- 339 Demostrar que cualquier polinomio $p(x)$ de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

Desarrollo

Si $n = 1 \Rightarrow p(x) = a_0 x + a_1 = 0$, $a_0 \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{a_1}{a_0}$ es raíz de $P(x)$

Si $n \geq 3$ $r_1 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ es una raíz de $p(x) \Rightarrow r_2 = iP$ también es raíz de $p(x)$. Luego por el teorema del factor se tiene.

$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)$, $R(x) = (x^2 - 2\alpha x + \beta^2 + \alpha^2)$ $R(x)$ donde grado de $R(x) = n - 2 \geq 1$ siendo $n - 2$ impar. Por ser n impar.

$\therefore$ si razonamos por inducir opinamos de que $R(x)$ tiene una raíz real y que también es raíz de $P(x)$.

340 Demostrar que la ecuación $\tan x = x$ tiene una infinidad de raíces reales.

Desarrollo

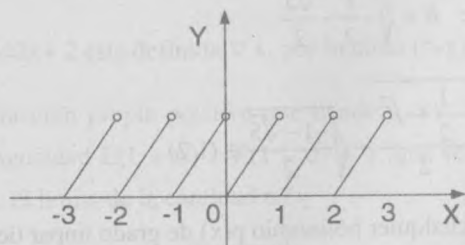
$$\text{Si: } x \in [0, 1] \Rightarrow E(x) = 0 \Rightarrow y = x$$

$$x \in [1, 2] \Rightarrow E(x) = 1 \Rightarrow y = x - 1$$

$$x \in [2, 3] \Rightarrow E(x) = 2 \Rightarrow y = x - 2$$

$$x \in [-1, 0] \Rightarrow E(x) = -1 \Rightarrow y = x + 1$$

$$x \in [-2, -1] \Rightarrow E(x) = -2 \Rightarrow y = x + 2$$



$E(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}$, son puntos de discontinuidad de primera especie.

CAPITULO II

DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES

2.1. CÁLCULO DIRECTO DE DERIVADAS.-

a) INCREMENTO DEL ARGUMENTO E INCREMENTO DE LA FUNCIÓN.-

Si x_1 y x_2 son valores de x , mientras que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$

los correspondientes valores de la función $y = f(x)$, $\Delta x = x_2 - x_1$

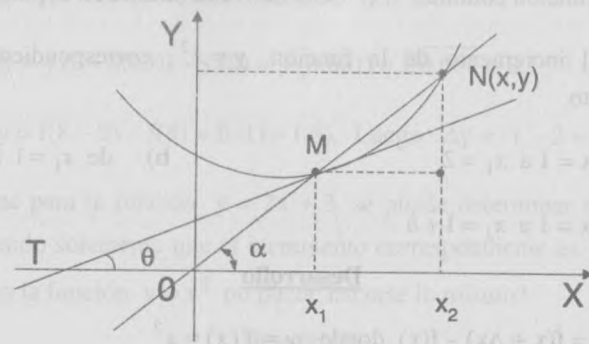
llama incremento del argumento x en el segmento $[x_1, x_2]$

$\Delta y = y_2 - y_1$ o sea $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

llama incremento de la función $y = f(x)$ en el mismo segmento

$[x_1, x_2]$. (En la figura donde $\Delta x = MA$ y $\Delta y = AN$) la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

representa el coeficiente angular de la secante MN de la gráfica de la función $y = f(x)$ y se llama velocidad media de la función y , en el segmento $[x_1, x_1 + \Delta x]$.



b) **DERIVADA.-** Derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ de la función $y = f(x)$ con respecto al argumento x se llama el límite de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$,

cuando Δx tiende a cero, es decir: $y' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ si dicho límite existe.

La derivada $y' = f'(x)$ representa la velocidad de variación de la función en el punto x .

c) **DERIVADAS LATERALES.-** Las expresiones

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{y} \quad f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se llama derivadas a la izquierda y derecha respectivamente de la función $f(x)$ en el punto x .

Para que exista $f'(x)$ es necesario y suficiente que $f'_-(x) = f'_+(x)$.

d) **DERIVADA INFINITA.-** Si en un punto determinado tenemos que $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty$, se dice que

la función continua $f(x)$ tiene derivada infinita en el punto x .

341 Hallar el incremento de la función $y = x^2$, correspondiente al paso del argumento.

a) de $x = 1$ a $x_1 = 2$

b) de $x_1 = 1$ a $x_2 = 1.1$

c) de $x = 1$ a $x_1 = 1 + h$

Desarrollo

a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ donde $y = f(x) = x^2$

Diferenciación de Funciones

además $\Delta x = x_1 - x = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \Delta x = 1$

$$f(x_1 + \Delta x) = f(x_1 + 1) = (x_1 + 1)^2$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2, \text{ reemplazando se tiene:}$$

$$f(1 + 1) = f(2) = 2^2 = 4 \quad \text{y} \quad f(1) = 1$$

$$\Delta y = f(1 + 1) - f(1) = f(2) - f(1) = 4 - 1 = 3. \quad \text{Luego } \Delta y = 3$$

b) $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ donde $\Delta x = 1.1 - 1 = 0.1$

$$\Delta y = f(1 + 0.1) - f(1) = f(1.1) - f(1)$$

$$\Delta y = (1.1)^2 - 1 = 1.21 - 1 = 0.21$$

342 Hallar Δy para la función $y = \sqrt[3]{x}$ si:

a) $x = 0, \Delta x = 0.001$

b) $x = 8, \Delta x = -9$

c) $x = a, \Delta x = h$

Desarrollo

a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$\Delta y = f(0 + 0.001) - f(0) = f(0.001) = \sqrt[3]{0.001} = 0.1. \quad \text{Luego } \Delta y = 0.1$$

b) $\Delta y = f(8 - 9) - f(8) = f(-1) - f(8). \quad \text{Luego } \Delta y = -1 - 2 = -3$

343 ¿Por qué para la función $y = 2x + 3$, se puede determinar el incremento conociendo solamente que el incremento correspondiente es $\Delta x = 5$, mientras que para la función $y = x^2$ no puede hacerse lo mismo?

Desarrollo

$$\Delta y = f(x+5) - f(x) \text{ donde } f(x) = 2x + 3$$

$$f(x+5) = 2(x+5) + 3 = 2x + 13 \text{ por lo tanto } f(x) = 2x + 3, \text{ luego:}$$

$$\Delta y = f(x+5) - f(x) = (2x + 13) - (2x + 3) = 10 \text{ y mientras que para la función } y = x^2 \text{ se tiene:}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \Rightarrow \Delta y = f(x+5) - f(x) = (x+5)^2 - x^2$$

$$\text{de donde se tiene: } \Delta y = -10x + 25$$

- 344 Hallar el incremento Δy y la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para las funciones:

a) $y = \frac{1}{(x^2 - 2)^2}$, cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0.4$

b) $y = \sqrt{x}$, cuando $x = 0$ y $\Delta x = 0.0001$

c) $y = \log x$, cuando $x = 100,000$ y $\Delta x = -90,000$

Desarrollo

a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \Rightarrow \Delta y = f(1 + 0.4) - f(1) = f(1.4) - f(1)$

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 - 2)^2} \Rightarrow f(1.4) = \frac{1}{[(1.4)^2 - 2]^2} = f(1.4) = \frac{1}{(-0.4)^2} = \frac{1}{0.16}$$

$$f(1) = \frac{1}{(1-2)^2} = 1, \text{ reemplazando y efectuando tenemos:}$$

$$y = f(1.4) - f(1) = \frac{1}{0.16} - 1 = \frac{4}{25} - 1 = -\frac{21}{25}$$

Diferenciación de Funciones

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{21}{25}}{0.4} = \frac{-\frac{21}{25}}{\frac{2}{5}} = -\frac{21}{10}, \text{ en forma similar para b) y c).}$$

- 345 Hallar Δy , $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, correspondiente a la variación del argumento desde x hasta $x + \Delta x$, para las siguientes funciones:

a) $y = ax + b$

b) $y = x^3$

c) $y = \frac{1}{x}$

d) $y = \sqrt{x}$

e) $y = 2^x$

f) $y = \ln x$

Desarrollo

a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$\text{Como } f(x) = ax + b \Rightarrow f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x) + b;$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = ax + a\Delta x + b - ax - b \Rightarrow \Delta y = a\Delta x,$$

$$\text{de donde se tiene: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \quad \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

en forma similar para las demás funciones.

- 346 Hallar el coeficiente angular de la secante a la parábola $y = 2x - x^2$. Si abscisas de los puntos de intersección son:

a) $x_1 = 1, x_2 = 2$

b) $x_1 = 1, x_2 = 0.9$

c) $x_1 = 1, x_2 = 1 +$

Hacia que el límite tiende el coeficiente angular de la secante en el último caso si $h \rightarrow 0$?

Desarrollo

$$\text{Coeficiente angular de la secante} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \text{ donde } \Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = f(1 + 1) - f(1) \text{ donde } \Delta x = 1 \text{ entonces: } \Delta y = f(2) - f(1)$$

$$\text{Como } f(x) = 2x - x^2 \Rightarrow f(2) = 4 - 4 = 0 \text{ y } f(1) = 2 - 1 = 1$$

$$\text{Luego } \Delta y = f(2) - f(1) = 0 - 1 = -1$$

$$\text{Coeficiente angular de la secante} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

en forma similar para los demás.

- 347 ¿Cual es la velocidad media de variación de la función $y = x^3$ en el segmento $1 \leq x \leq 4$?

Desarrollo

$$\text{La velocidad media de variación es} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x), \text{ donde } \Delta x = 4 - 1 = 3$$

$$\text{como } f(x) = x^3 \Rightarrow f(1 + 3) = f(4) = 64 \text{ y } f(1) = 1$$

$$\Delta y = f(4) - f(1) = 64 - 1 = 63 \text{ reemplazando se tiene: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{63}{3} = 21$$

- 348 La ley del movimiento de un punto es $S = 2t^2 + 3t + 5$ donde la distancia se da en centímetros y el tiempo t en segundos. ¿A que será igual la velocidad media de este punto durante el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 1$ y $t = 5$?

Desarrollo

Diferenciación de Funciones

$$\text{La velocidad media} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t) \text{ y } \Delta t = t_2 - t_1 \text{ es decir } \Delta t = 5 - 1 = 4 \Rightarrow \Delta t = 4$$

$$\Delta S = S(1 + 4) - S(1) = S(5) - S(1) = 70 - 10 = 60$$

$$\text{Luego: } \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{60}{4} = 15 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$

- 349 Hallar la pendiente de la curva $y = 2^x$ en el segmento $1 \leq x \leq 5$

Desarrollo

$$\text{Pendiente media de la curva} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x), \text{ donde } \Delta x = 5 - 1 = 4$$

$$\Delta y = f(1 + 4) - f(1) = f(5) - f(1) = 2^5 - 2 = 2(2^4 - 1)$$

$$\text{pendiente media de la curva} = \frac{2(2^4 - 1)}{4} = \frac{2^4 - 1}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

- 350 Hallar la pendiente media de la curva $y = f(x)$ en el segmento $[x, x + \Delta x]$

Desarrollo

$$\text{Pendiente media de la curva} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ donde } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\text{Luego pendiente media de la curva} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- 351 ¿Qué se entiende por pendiente de la curva $y = f(x)$ en un punto dado x ?

Desarrollo

Se entiende por pendiente de la curva $y = f(x)$ en un punto dado x al límite de la pendiente media de la curva $\Delta x \rightarrow 0$, el cual denotaremos por $f'(x)$, es

$$\text{decir: } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- 352 Definir: a) La velocidad media de rotación.
b) La velocidad instantánea de rotación.

Desarrollo

Sea $\phi(t)$ la magnitud del ángulo de rotación en el instante t .

- a) La velocidad media de rotación $\frac{\Delta\phi(t)}{\Delta t}$
b) La velocidad instantánea de rotación $= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi(t)}{\Delta t} = \frac{\partial\phi(t)}{\partial t}$

- 353 Un cuerpo calentado e introducido en un medio, cuya temperatura sea menor, se enfría. ¿Qué debe entenderse por:?

- a) Velocidad media de enfriamiento.
b) Velocidad de enfriamiento en un momento dado.

Desarrollo

Sea T = la temperatura en el instante t .

- a) Velocidad media de enfriamiento $= \frac{\Delta T}{\Delta t}$
b) Velocidad de enfriamiento en un momento dado $= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\partial T}{\partial t}$

Diferenciación de Funciones

- 354 ¿Qué debe entenderse por velocidad de reacción de una sustancia en una reacción química?

Desarrollo

Sea $\phi(t)$ = cantidad de sustancia en el instante t la velocidad de reacción de una sustancia en una reacción química es: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi(t)}{\Delta t}$

- 355 Sea $m = f(x)$ la masa de una barra heterogénea en el segmento $[0, x]$ que se entiende por:

- a) Densidad lineal media de la barra en el segmento: $[x, x + \Delta x]$
b) Densidad lineal de la barra en el punto x ?

Desarrollo

En forma similar al ejercicio anterior se tiene que:

- a) La densidad lineal media $= \frac{\Delta m}{\Delta x}$
b) La densidad lineal en el punto $x = \frac{dm}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$

- 356 Hallar la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, para la función $y = \frac{1}{x}$ en el punto $x = 2$:

- a) $\Delta x = 1$ b) $\Delta x = -1$ c) $\Delta x = 0.0$

¿A qué será igual la derivada y' cuando $x = 2$?

Desarrollo

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \Rightarrow \Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) \text{ donde } f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} = \frac{-\Delta x}{2(2 + \Delta x)}$$

$$a) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)} = -\frac{1}{2(2+\Delta x)} \quad \text{donde } \Delta x = 1 \text{ reemplazando tenemos:}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{6} = -0.166$$

$$b) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2(2+\Delta x)} \quad \text{donde } \Delta x = 0.1, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{5}{21} \approx -0.238$$

$$\text{además } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{1}{2(2+\Delta x)} = -\frac{1}{4}$$

357 Hallar la derivada de la función $y = \operatorname{tg} x$

Desarrollo

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{donde } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x \cos x \cdot \cos(x + \Delta x)}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos(x + \Delta x)} = 1 \left(\frac{1}{\cos x \cdot \cos x} \right) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

358 Hallar $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ para las funciones:

$$a) \quad y' = x^3 \quad b) \quad y = \frac{1}{x^2} \quad c) \quad y = \sqrt{x} \quad d) \quad \operatorname{ctg} x$$

Desarrollo

Diferenciación de Funciones

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x}, \quad \text{en forma similar para los demás}$$

359 Calcular $f'(8)$ si $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Desarrollo

$$f'(8) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(8 + \Delta x) - f(8)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + \Delta x} - 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{8 + \Delta x} - 2)(\sqrt[3]{(8 + \Delta x)^2} + 2\sqrt[3]{8 + \Delta x} + 4)}{\Delta x(\sqrt[3]{(8 + \Delta x)^2} + 2\sqrt[3]{8 + \Delta x} + 4)}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt[3]{(8 + \Delta x)^2} + 2\sqrt[3]{8 + \Delta x} + 4)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(8 + \Delta x)^2} + 2\sqrt[3]{8 + \Delta x} + 4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{64} + 2\sqrt[3]{8} + 4} = \frac{1}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{12}$$

360 Calcular $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ si $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$

Desarrollo

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(\Delta x - 1)^2(\Delta x - 2)^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x - 1)^2(\Delta x - 2)^2 = -8$$

361 En que puntos la derivada de la función $f(x) = x^3$ coincide numéricamente con el valor de la propia función es decir: $f(x) = f'(x)$

Desarrollo

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 = 3x^2$$

como $f(x) = f'(x)$ entonces $x^3 = 3x^2 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x=0, x=3$

Luego la función coincide numéricamente en los puntos $x=0.3, x=3$

- 362 La ley de movimiento de un punto es $S = 5t^2$, donde la distancia S viene dado en metros y el tiempo t , en segundos. Hallar la velocidad del movimiento en el instante $t = 3$.

Desarrollo

$$S'(t)V(t) = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5(t+\Delta t)^2 - 5t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5t^2 + 10t\Delta t + \Delta t^2 - 5t^2}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 10t + \Delta t = 10t \Rightarrow \boxed{V(3) = 30 \text{ m/seg}}$$

- 363 Hallar el coeficiente angular de la tangente a la curva $y = 0.1x^3$, trazada en el punto cuya abscisa es 2.

Desarrollo

$$\text{Coeficiente angular de la tangente es } = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'|_{x=2}$$

Diferenciación de Funciones

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0.1(2+\Delta x)^3 - (0.1)8}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1.2 + 0.6\Delta x + \Delta x^2 = 1.2$$

- 364 Hallar el coeficiente angular de la tangente a la curva $y = \sin x$ en los puntos $(\pi, 0)$.

Desarrollo

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \right]$$

$$y' = \sin x(0) + \cos x \Rightarrow y' = \cos x \text{ por lo tanto } y'|_{x=\pi} = \cos \pi = -1$$

- 365 Hallar el valor de la derivada de la función: $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$).

Desarrollo

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$= -\frac{1}{x_0(x_0+0)} = -\frac{1}{x_0^2}$$

- 366 A que son iguales los coeficientes angulares de las tangentes a las curvas $y = \frac{1}{x}$ y $y = x^2$, en el punto de intersección?. Hallar entre estas tangentes.

Desarrollo

Como $y = \frac{1}{x}$ e $y = x^2$, entonces el punto de intersección es: $\frac{1}{x} = x^2 \Rightarrow x = 1$

$$y'|_{x=1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{1}{1+\Delta x} = -1 = k_1 \quad y \quad y'|_{x=1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2 = k_2$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{-1 - 2}{1 - 2} = 3$$

367 Demostrar que las siguientes funciones no tienen derivadas finitas en los puntos que se indican:

a) $y = \sqrt[3]{x^2}$ en el punto $x = 0$

b) $y = \sqrt[5]{x-1}$ en el punto $x = 1$

c) $|\cos x|$ en los puntos $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$)

Desarrollo

a) $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(0+\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = \infty$

b) $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+\Delta x)-1} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[5]{\Delta x^4}} = \infty$

c) $f'_-(\frac{2k+1}{2}\pi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\cos(\frac{2k+1}{2}\pi + \Delta x)|}{\Delta x}$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\operatorname{sen} \Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = 1$

Diferenciación de Funciones

$$f'_-(\frac{2k+1}{2}\pi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\cos(\frac{2k+1}{2}\pi + \Delta x)|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\operatorname{sen} \Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = 1$$

Como $f'_-(\frac{2k+1}{2}\pi) \neq f'_+(\frac{2k+1}{2}\pi) \Rightarrow y = |\cos x|$ no tiene derivada en los puntos $x = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$

2.2. DERIVACION POR MEDIO DE TABLAS.-

a) REGLAS PRINCIPALES PARA HALLAR LA DERIVADA:

Sea k una constante, $u = f(x)$ y $v = g(x)$ dos funciones derivables entonces:

1) $(k)' = 0$

2) $(x)' = 1$

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

4) $(ku)' = ku'$

5) $(uv)' = uv' + vu'$

6) $(\frac{u}{v})' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

7) $(\frac{k}{v})' = -\frac{kv'}{v^2}$, $v \neq 0$

b) TABLA DE LAS DERIVADAS DE LAS FUNCIONES PRINCIPALES.-

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$

2) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

4) $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

$$5) \quad (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad 6) \quad (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$7) \quad (\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow |x| < 1$$

$$8) \quad (\operatorname{arc} \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow |x| < 1$$

$$9) \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$10) \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$11) \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$12) \quad (e^x)' = e^x$$

$$13) \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$14) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$$

$$15) \quad (\operatorname{sen} hx)' = \cosh x$$

$$16) \quad (\cosh x)' = -\operatorname{sen} hx$$

$$17) \quad (\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$18) \quad (\operatorname{ctgh} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen} h^2 x}$$

$$19) \quad (\operatorname{arcsen} hx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$20) \quad (\operatorname{arc} \cosh x)' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow |x| > 1$$

$$21) \quad (\operatorname{arctg} hx)' = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow |x| < 1$$

$$22) \quad (\operatorname{arcctg} hx)' = -\frac{1}{x^2-1} \Rightarrow |x| > 1$$

c) REGLA PARA CALCULAR LAS FUNCIONES COMPUESTAS.

Sea $y = f(u)$ donde $u = g(x)$, Es decir: $y = f(g(x))$ donde "y" y "u" derivables, entonces $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ en otras notaciones:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

esta regla puede aplicarse a cadenas de cualquier numero finito funciones.

1) FUNCIONES ALGEBRAICAS.-

$$368 \quad y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$$

Desarrollo

$$\frac{dy}{dx} = y' = 5x^4 - 12x^2 + 2$$

$$369 \quad y = \frac{1}{4} - \frac{x}{3} + x^2 - 0.5x^4$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$$

$$370 \quad y = ax^2 + bx + c$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2ax + b$$

$$371 \quad y = -\frac{5x^3}{a}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{15x^2}{a}$$

$$372 \quad y = at^m + bt^{m+n}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dt} = amt^{m-1} + (m+n)bt^{m+n-1}$$

$$373 \quad y = \frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{6ax^5}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$374 \quad y = \frac{\pi}{x} + \ln 2$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\pi}{x^2}$$

$$375 \quad y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-4}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x^{\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{3}{2}} - 4x^{-5}$$

$$376 \quad y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$$

Desarrollo

$$y = x^2 \sqrt[3]{x^2} = x^2 x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{8}{3}}, \text{ derivando tenemos: } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{8}{3} x^{\frac{5}{3}}$$

$$377 \quad y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$$

Desarrollo

$$y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{a}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{b}{x^{\frac{4}{3}}} \Rightarrow y = ax^{-\frac{2}{3}} - bx^{-\frac{4}{3}}, \text{ derivando tenemos:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3} ax^{-\frac{5}{3}} + \frac{4b}{3} x^{-\frac{7}{3}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2a}{3x^2 \sqrt[3]{x}} + \frac{4b}{3x^3 \sqrt[3]{x^2}}$$

$$378 \quad y = \frac{a+bx}{c+dx}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(c+dx)(a+bx)' - (a+bx)(c+dx)'}{(c+dx)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(c+dx)b - (a+bx)d}{(c+dx)^2} = \frac{bc - ad}{(c+dx)^2}$$

$$379 \quad y = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-5x+5)(2x+3)' - (2x+3)(x^2-5x+5)'}{(x^2-5x+5)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2(x^2-5x+5) - (2x+3)(2x-5)}{(x^2-5x+5)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2-10x+10) - (4x^2-4x-15)}{(x^2-5x+5)^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$$

$$380 \quad y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = -2 \frac{(2x-1)'}{(2x-1)^2} - \frac{-(x)'}{x^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{(2x-1)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-4x^2 + 4x^2 - 4x + 1}{x^2(2x-1)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$$

381

$$y = \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dz} = \frac{(1-\sqrt{z})(1+\sqrt{z})' - (1+\sqrt{z})(1-\sqrt{z})'}{(1-\sqrt{z})^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dz} = \frac{\frac{1-\sqrt{z}}{2\sqrt{z}} + \frac{1+\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}}{(1-\sqrt{z})^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dz} = \frac{1}{\sqrt{z}(1-\sqrt{z})^2}$$

2) FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y CIRCULARES INVERSAS.-

382

$$y = 5 \sin x + 3 \cos x$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 5 \cos x - 3 \sin x$$

383

$$y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{4}{(\sin 2x)^2}$$

384

$$y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)' - (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

385

$$y = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dt} = 2 \sin t + 2t \cos t - 2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = 2 \sin t^2 + t \sin t - 2 \sin t = t^2 \sin t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = t^2 \sin t$$

386

$$y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \Rightarrow y' = 0$$

387 $y = x \operatorname{ctg} x$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

388 $y = x \operatorname{arcsen} x$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{arcsen} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

389 $y = \frac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = x \operatorname{arctg} x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = x \operatorname{arctg} x$$

3) FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS.-

390 $y = x^7 e^x$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 7x^6 e^x + x^7 e^x = e^x x^6 (7+x) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = x^6 e^x (x+7)$$

391 $y = (x-1)e^x$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

392 $y = \frac{e^x}{x^2}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2(e^x)' - e^x(x^2)'}{x^4} = \frac{x^2 e^x - 2x e^x}{x^4} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

393 $y = \frac{x^5}{e^x}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{e^x(x^5)' - x^5(e^x)'}{e^{2x}} = \frac{5x^4 e^x - x^5 e^x}{e^{2x}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^4(5-x)}{e^x}$$

394 $f(x) = e^x \cos x$

Desarrollo

$$f'(x) = e^x(\cos x)' + (e^x)' \cos x = e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x, \text{ de donde se tiene:}$$

$$f'(x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

395 $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = (2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = x^2 e^x$$

396 $y = e^x \operatorname{arcsen} x$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^x \operatorname{arcsen} x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = e^x \left(\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

397 $y = \frac{x^2}{\ln x}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\ln x)2x - x}{(\ln x)^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$398 \quad y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 \ln x + x^2 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 \ln x$$

$$399 \quad y = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{x(\ln x)' - (\ln x)x'}{x^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$$

$$400 \quad y = \ln x \cdot \log x - \ln a \cdot \log_a x$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{x} + \frac{\ln x}{(\ln 10)x} - \frac{\ln a}{x \ln a} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2 \ln x}{x \ln 10} - \frac{1}{x}$$

4) FUNCIONES HIPERBÓLICAS E HIPERBÓLICAS INVERSAS.-

$$401 \quad y = x \sinh(x)$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sinh x + \cosh x$$

$$402 \quad y = \frac{x^2}{\cosh x}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2x \cosh x - x^2 \sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$403 \quad y = \operatorname{tgh} x - x$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh^2 x} - 1 = \frac{1 - \cosh^2 x}{\cosh^2 x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = -\operatorname{tgh}^2 x$$

$$404 \quad y = \frac{3 \operatorname{ctgh} x}{\ln x}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3 \ln x \cdot \left(-\frac{1}{\sinh^2 x}\right) - \frac{3 \operatorname{ctgh} x}{x}}{(\ln x)^2}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-3(x \ln x + \sinh x \cdot \cosh x)}{x \ln^2 x \cdot \sinh^2 x}$$

$$405 \quad y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctgh} x$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1-x^2} = \frac{(1-x^2) - (1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x^2}{1-x^4}$$

$$406 \quad y = (\arcsen x)(\operatorname{arcsenh} x)$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = (\arcsen x)' \operatorname{arcsenh} x + \arcsen x \cdot (\operatorname{arcsenh} x)', \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{arcsenh} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsen x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$407 \quad y = \frac{\arccos hx}{x}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \arccos hx}{x^2} = \frac{x - \sqrt{x^2-1} \cdot \arccos hx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x - \sqrt{x^2-1} \cdot \arccos hx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$$

$$408 \quad y = \frac{\operatorname{arctg} hx}{1-x^2}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1-x^2}{x^2-1} - (-2x)(\operatorname{arctg} hx)}{(1-x^2)^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1+2x \operatorname{arctg} hx}{(1-x^2)^2}$$

E) FUNCIONES COMPUESTAS.-

$$409 \quad y = (1+3x-5x^2)^{30}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 30(1+3x-5x^2)^{29} (1+3x-5x^2)'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 30(1+3x-5x^2)^{29} (3-10x)$$

$$410 \quad y = \left(\frac{ax+b}{c}\right)^3$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2 \left(\frac{ax+b}{c}\right)' \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3a}{c} \left(\frac{ax+b}{c}\right)^2$$

$$411 \quad f(y) = (2a+3by)^2$$

Desarrollo

$$f'(y) = 2(2a+3by)(2a+3by)' \Rightarrow f'(y) = 6b(2a+3by)$$

$$412 \quad y = (3+2x^2)^4$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4(3+2x^2)^3 (3+2x^2)' \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 16x(3+2x^2)^3$$

$$413 \quad y = \frac{3}{56(2x-1)^7} - \frac{1}{24(2x-1)^6} - \frac{1}{40(2x-1)^5}$$

Desarrollo

$$y = \frac{3}{56}(2x-1)^{-7} - \frac{1}{24}(2x-1)^{-6} - \frac{1}{40}(2x-1)^{-5}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(-7)(3)}{56}(2x-1)^{-8} \cdot 2 - \frac{1}{24}(-6)(2x-1)^{-7} \cdot 2 - \frac{1}{40}(-5)(2x-1)^{-6} \cdot 2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{4(2x-1)^8} + \frac{1}{2(2x-1)^7} + \frac{1}{4(2x-1)^6}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-3+2(2x-1)+(2x-1)^2}{4(2x-1)^8} = \frac{4x^2-4}{4(2x-1)^8} = \frac{x^2-1}{(2x-1)^8}$$

$$414 \quad y = \sqrt{1-x^2}$$

Desarrollo

$$y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ derivando tenemos:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)' \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ por lo tanto}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$415 \quad y = \sqrt[3]{a+bx^3}$$

Desarrollo

$$y = \sqrt[3]{a+bx^3} = (a+bx^3)^{\frac{1}{3}}, \text{ derivando tenemos:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}(a+bx^3)' \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3bx^2}{3(a+bx^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{bx^2}{\sqrt[3]{a+bx^3}}$$

$$416 \quad y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})' \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}$$

$$417 \quad y = (3-2\operatorname{sen}x)^5$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 5(3-2\operatorname{sen}x)^4(3-2\operatorname{sen}x)' \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -10\cos x(3-2\operatorname{sen}x)^4$$

$$418 \quad y = \operatorname{tg}x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2x} - \operatorname{tg}^2x(\operatorname{tg}x)' + \operatorname{tg}^4x(\operatorname{tg}x)'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2x} - \frac{\operatorname{tg}^2x}{\cos^2x} + \frac{\operatorname{tg}^4x}{\cos^2x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2x + \operatorname{tg}^4x}{\cos^2x}$$

$$419 \quad y = \sqrt{\operatorname{ctg}x} - \sqrt{\operatorname{ctg}x}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{ctg}x)'}{2\sqrt{\operatorname{ctg}x}} - 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}}{2\sqrt{\operatorname{ctg}x}} = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2x\sqrt{\operatorname{ctg}x}}$$

$$420 \quad y = 2x + 5\cos^3x$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2 + 15\cos^2x(\cos x)' \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2 - 15\cos^2x.\operatorname{sen}x$$

$$421 \quad x = \cos \operatorname{ec}^2t + \sec^2t$$

Desarrollo

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2\cos \operatorname{ect}.(\cos \operatorname{ect})' + 2\sec t.(\sec t)'$$

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = -2\cos \operatorname{ect}.\cos \operatorname{ect}.\operatorname{ctg}t + 2\sec t.\sec t.\operatorname{tg}t$$

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = -2\cos \operatorname{ec}^2t.\operatorname{ctg}t + 2\sec^2t.\operatorname{tg}t \Rightarrow x'(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\operatorname{ctg}t}{\operatorname{sen}^2t} + \frac{2\operatorname{tg}t}{\cos^2t}$$

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\operatorname{ctg} t}{\operatorname{sen}^2 t} + \frac{2\operatorname{tg} t}{\cos^2 t} \Rightarrow x'(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{2(\cos^4 t - \operatorname{sen}^4 t)}{\operatorname{sen}^3 t \cdot \cos^3 t}$$

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)}{\operatorname{sen}^3 t \cdot \cos^3 t}$$

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)}{\left(\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right)^3} = -\frac{16 \cos 2t}{\operatorname{sen}^3 2t}$$

$$422 \quad f(x) = -\frac{1}{6(1-3\cos x)^2}$$

Desarrollo

$$f(x) = -\frac{1}{6(1-3\cos x)^2} = \frac{(1-3\cos x)^{-2}}{6}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$f'(x) = \frac{2(1-3\cos x)^{-3}(1-2\cos x)'}{6}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$f'(x) = \frac{(1-3\cos x)^4(3\operatorname{sen} x)}{3} = \frac{\operatorname{sen} x}{(1-3\cos x)^3}$$

$$423 \quad y = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$$

Desarrollo

$$y = \frac{\cos^{-3} x}{3} - (\cos x)^{-1}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$y' = \frac{-3\cos^{-4} x(\cos x)'}{3} + \cos^{-2} x(\cos x)' \Rightarrow y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^4 x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}$$

$$424 \quad y = \sqrt{\frac{3\operatorname{sen} x - 2\cos x}{5}}$$

Desarrollo

$$y = \sqrt{\frac{3\operatorname{sen} x - 2\cos x}{5}} = \left(\frac{3\operatorname{sen} x - 2\cos x}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{3\operatorname{sen} x - 2\cos x}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3\operatorname{sen} x - 2\cos x}{5}\right)'$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{3\operatorname{sen} x - 2\cos x}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3\cos x + 2\operatorname{sen} x}{5}\right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{3\cos x + 2\operatorname{sen} x}{5}\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{3\operatorname{sen} x - 2\cos x}{5}}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3\cos x + 2\operatorname{sen} x}{2\sqrt{15\operatorname{sen} x - 10\cos x}}$$

$$425 \quad y = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{\cos^3 x}$$

Desarrollo

$$y = \operatorname{sen}^{\frac{2}{3}} x + \cos^{-3} x, \text{ derivando se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \operatorname{sen}^{-\frac{1}{3}} x (\operatorname{sen} x)' - 3\cos^{-4} x (\cos x)' \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}} + \frac{3\operatorname{sen} x}{\cos^5 x}$$

246 $y = \sqrt{1 + \arcsen x}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \arcsen x)'}{2\sqrt{1 + \arcsen x}}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{1 + \arcsen x}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1 + \arcsen x}}$$

427 $y = \sqrt{\arctg x} - (\arcsen x)^3$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\arctg x)'}{2\sqrt{\arctg x}} - 3(\arcsen x)^2 (\arcsen x)'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{2\sqrt{\arctg x}} - 3(\arcsen x)^2 (\arcsen x)'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\arctg x}} - \frac{3(\arcsen x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

428 $y = \frac{1}{\arctg x}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{(\arctg x)'}{(\arctg x)^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{1+x^2}}{(\arctg x)^2} = -\frac{1}{(1+x^2)(\arctg x)^2}$$

429 $y = \sqrt{xe^x + x}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(xe^x + x)'}{2\sqrt{xe^x + x}} = \frac{e^x + xe^x + 1}{2\sqrt{xe^x + x}}$$

430 $y = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5 x$

Desarrollo

$$y = (2e^x - 2^x + 1)^{\frac{1}{3}} + \ln^5 x, \text{ derivando se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(2e^x - 2^x + 1)^{-\frac{2}{3}}(2e^x - 2^x + 1)' + 5\ln^4 x (\ln x)'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2e^x - 2^x}{3\sqrt[3]{(2e^x - 2^x + 1)^2}} + \frac{5\ln^4 x}{x}$$

431 $y = \sen 3x + \cos \frac{x}{5} + \tg \sqrt{x}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos 3x (3x)' - \sen\left(\frac{x}{5}\right)\left(\frac{x}{5}\right)' + \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} (\sqrt{x})'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3\cos 3x - \frac{1}{5}\sen \frac{x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2 \sqrt{x}}$$

432 $y = \sen(x^2 - 5x + 1) + \tg \frac{a}{x}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos(x^2 - 5x + 1) \cdot (x^2 - 5x + 1)' + \frac{1}{\cos^2 \frac{a}{x}} \left(\frac{a}{x}\right)'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} (2x-5) \cos(x^2-5x+1) - \frac{a}{x^2 \cos^2 \frac{a}{x}}$$

433 $f(x) = \cos(\alpha x + \beta)$

Desarrollo

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(\alpha x + \beta) \cdot (\alpha x + \beta)' \Rightarrow f'(x) = -\alpha \operatorname{sen}(\alpha x + \beta)$$

434 $f(x) = \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen}(t + \varphi)$

Desarrollo

$$f'(t) = (\operatorname{sen} t)' \operatorname{sen}(t + \varphi) + \operatorname{sen} t \cdot [\operatorname{sen}(t + \varphi)]'$$

$$f'(t) = \cos t \cdot \operatorname{sen}(t + \varphi) + \operatorname{sen} t \cdot \cos(t + \varphi)$$

$$f'(t) = \frac{\operatorname{sen}(2t + \varphi)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t + \varphi)}{2} \Rightarrow f'(t) = \operatorname{sen}(2t + \varphi)$$

435 $y = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)' - (1 + \cos 2x)(1 - \cos 2x)'}{(1 - \cos 2x)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2\operatorname{sen} 2x(1 + \cos 2x) - (1 + \cos 2x)2\operatorname{sen} 2x}{(1 - \cos 2x)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-4\operatorname{sen} 2x}{(1 - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)^2} = \frac{-4\operatorname{sen} 2x}{4\operatorname{sen}^4 x}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^4 x} = \frac{-2\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}$$

436 $f(x) = a \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{a}\right)$

Desarrollo

$$f'(x) = a \cdot \left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{a}\right)}\right) \left(\frac{x}{a}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{a}\right)}$$

437 $y = -\frac{1}{20} \cos(5x^2) - \frac{1}{4} \cos x^2$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{20} \operatorname{sen}(5x^2)(5x^2)' + \frac{1}{4} \operatorname{sen} x^2 (x^2)'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{10x}{20} \operatorname{sen}(5x^2) + \frac{2x}{4} \operatorname{sen} x^2 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} \operatorname{sen} 5x^2 + \frac{x}{2} \operatorname{sen} x^2$$

438 $y = \operatorname{arcsen} 2x$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(2x)'}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

439 $y = \operatorname{arcsen} \frac{1}{x^2}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}} = \frac{-\frac{2}{x^3}}{\frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2}} = -\frac{2x^2}{x^3\sqrt{x^4-1}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

440 $f(x) = \arccos(\sqrt{x})$

Desarrollo

$$f'(x) = \frac{-(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$441 \quad y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$442 \quad y = \operatorname{arctg} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{\frac{(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{1 + \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2 + (1+x)^2} = \frac{2}{1-2x+x^2+1+2x+x^2}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$443 \quad y = 5e^{-x^2}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 5e^{-x^2}(-x^2)' = -10xe^{-x^2}$$

$$444 \quad y = \frac{1}{5^{x^2}}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(5^{x^2})'}{(5^{x^2})^2} = \frac{2x5^{x^2} \ln 5}{5^{2x^2}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2x \ln 5}{5^{x^2}} = 2x \cdot 5^{x^2} \ln 5$$

$$445 \quad y = x^2 10^{2x}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = (x^2)' 10^{2x} + x^2 (10^{2x})' \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2x \cdot 10^{2x} + x^2 10^{2x} 2 \ln 10$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x \cdot 10^{2x} (1 + x \ln 10)$$

$$446 \quad f(t) = t \operatorname{sen} 2^t$$

Desarrollo

$$f'(t) = \operatorname{sen} 2^t + t \operatorname{sen} 2^t (2^t)' \Rightarrow f'(t) = \operatorname{sen} 2^t + 2^t t \ln 2 \cdot \operatorname{sen} 2^t$$

$$447 \quad y = \operatorname{arcsene}^x$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$$448 \quad y = \ln(2x+7)$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(2x+7)'}{2x+7} = \frac{2}{2x+7}$$

$$449 \quad y = \log(\operatorname{sen} x)$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x} \log e = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \log e \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} x \cdot \log e$$

450 $y = \ln(1-x^2)$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(1-x^2)'}{1-x^2} = \frac{-2x}{1-x^2}$$

451 $y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2 \ln x (\ln x)' - \frac{(\ln x)'}{\ln x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2 \ln x}{x} - \frac{1}{x \ln x}$$

452 $y' = \ln(e^x + 5 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{arcsen} x)$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(e^x + 5 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{arcsen} x)'}{e^x + 5 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{arcsen} x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{e^x + 5 \cos x - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}}{e^x + 5 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{arcsen} x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(e^x + 5 \cos x) \sqrt{1-x^2} - 4}{\sqrt{1-x^2} (e^x + 5 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{arcsen} x)}$$

453 $y = \operatorname{arctag}(\ln x) + \ln(\operatorname{arctag} x)$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\ln x)'}{1+(\ln x)^2} + \frac{(\operatorname{arctg} x)'}{\operatorname{arctg} x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{1+(\ln x)^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(1+(\ln x)^2)} + \frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}$$

454 $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x+1})$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\ln x + 1)'}{\sqrt{2 \ln x + 1}} + \frac{1}{2(x+1)} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{2 \ln x + 1}} + \frac{1}{2(x+1)}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x + 1}} + \frac{1}{2(x+1)}$$

6) FUNCIONES DIVERSAS:

455 $y = \operatorname{sen}^3 5x \cdot \cos^2 \frac{x}{3}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3 \operatorname{sen}^2 5x (\operatorname{sen} 5x)' \cos^2 \frac{x}{3} + \operatorname{sen}^3 5x \cdot 2 \cos \frac{x}{3} (\cos \frac{x}{3})'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 15 \operatorname{sen}^2 5x \cdot \cos 5x \cdot \cos^2 (\frac{x}{3}) - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 5x \cdot 2 \cos \frac{x}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{3}$$

456 $y = -\frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{11}{2} \left(\frac{-(x-2)^2}{(x-2)^4} \right)' - 4 \left(\frac{(x-2)'}{(x-2)^2} \right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{11}{2} \left(\frac{2(x-2)}{(x-2)^4} \right) + \left(\frac{4}{(x-2)^2} \right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{11}{(x-2)^3} + \frac{4}{(x-2)^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{11+4(x-2)}{(x-2)^3} = \frac{4x+3}{(x-2)^3}$$

457

$$y = -\frac{15}{4(x-3)^4} - \frac{10}{3(x-3)^3} - \frac{1}{2(x-3)^2}$$

Desarrollo

$$y = -\frac{15}{4}(x-3)^{-4} - \frac{10}{3}(x-3)^{-3} - \frac{1}{2}(x-3)^{-2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 15(x-3)^{-5} + 10(x-3)^{-4} + (x-3)^{-3}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{15}{(x-3)^5} + \frac{10}{(x-3)^4} + \frac{1}{(x-3)^3}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{15+10(x-3)+(x-3)^2}{(x-3)^5} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+4x-6}{(x-3)^5}$$

458

$$y = \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{8} \frac{[(1-x^2)^4 \cdot 8x^7 - x^8 \cdot 4(1-x^2)^3(-2x)]}{(1-x^2)^8}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^7(1-x^2)+x^9}{(1-x^2)^5} = \frac{x^7}{(1-x^2)^5}$$

459

$$y = \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$$

Desarrollo

Diferenciación de Funciones

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x(\sqrt{2x^2-2x+1})' - \sqrt{2x^2-2x+1}}{x^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x(4x-2)}{2\sqrt{2x^2-2x+1}} - \sqrt{2x^2-2x+1}}{x^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x(2x-1) - (2x^2-2x+1)}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$$

460

$$y = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\sqrt{a^2+x^2} - x(\sqrt{a^2+x^2})'}{a^2+x^2} \right), \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\sqrt{a^2+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2} \right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}} \right) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$$

461

$$y = \frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{(1+x^2)^3} \cdot 3x^2 - x^3 \cdot \frac{3(1+x^2)^2 \cdot 2x}{2\sqrt{(1+x^2)^3}}}{(1+x^2)^3} \right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \left(\frac{3x^2(1+x^2)^3 - 3x^4(1+x^2)^2}{(1+x^2)^3 \sqrt{(1+x^2)^3}} \right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2(1+x^2) - x^4}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^3}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

462

$$y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{8}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{16}{3}x^2\sqrt[6]{x}$$

Desarrollo

$$y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{18}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{16}{13}x^{\frac{13}{6}}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{7}{6}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + 3x^{\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{7}{6}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1+3x^2+3x+x^2}{\frac{1}{x^3}}$$

463

$$y = \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$$

Desarrollo

$$y = \frac{1}{8}(1+x^3)^{\frac{8}{3}} - \frac{1}{5}(1+x^3)^{\frac{5}{3}}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(1+x^3)^{\frac{5}{3}} 3x^2 - \frac{1}{3}(1+x^3)^{\frac{2}{3}} 3x^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = (1+x^3)^{\frac{2}{3}} [(1+x^3)x^2 - x^2] \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}$$

464

$$y = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$$

Desarrollo

$$y = \frac{4}{3} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{\frac{1}{4}}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{(x+2) - (x-1)}{(x+2)^2} \right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+2} \right)^3 (x+2)^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3 (x+2)^5}}$$

465

$$y = x^4(a-2x^3)^2$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4x^3(a-2x^3)^2 + 2x^4(a-2x^3)(-6x^2)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4x^3(a-2x^3)(a-2x^3-3x^3) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 4x^3(a-2x^3)(a-5x^3)$$

466

$$y = \left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n} \right)^m$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = m \left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n} \right)^{m-1} \cdot \left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n} \right)'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = m \left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n} \right)^{m-1} \cdot \left(\frac{(a-bx^n)nbx^{n-1} - (a+bx^n)(-nbx^{n-1})}{(a-bx^n)^2} \right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = m \left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n} \right)^{m-1} \left(\frac{2anbx^{n-1}}{(a-bx^n)^2} \right) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2anmbx^{n-1} \frac{(a+bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m-1}}$$

$$467 \quad y = \frac{9}{5(x+2)^5} - \frac{3}{(x+2)^4} + \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{1}{2(x+2)^2}$$

Desarrollo

$$y = \frac{9}{5}(x+2)^{-5} - 3(x+2)^{-4} + 2(x+2)^{-3} - \frac{1}{2}(x+2)^{-2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -9(x+2)^{-6} + 12(x+2)^{-5} - 6(x+2)^{-4} + (x+2)^{-3}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{9}{(x+2)^6} + \frac{12}{(x+2)^5} - \frac{6}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+2)^3}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-9+12(x+2)-6(x+2)^2+(x+2)^3}{(x+2)^6}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-9+12x+24-6x^2-24x-24+x^3+2x^2+12+8}{(x+2)^6}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^3-1}{(x+2)^6}$$

$$468 \quad y = (a+x)\sqrt{a-x}$$

Desarrollo

$$y' = \sqrt{a-x} + \frac{(a+x)(-1)}{2\sqrt{a-x}}$$

$$y' = \sqrt{a-x} - \frac{a+x}{2\sqrt{a-x}} = \frac{2(a-x)-(a+x)}{2\sqrt{a-x}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$$

$$469 \quad y = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

Desarrollo

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$$

$$[(x+a)(x+b)(x+c)]' = 3x^2 + 2(a+b+c)x + ab+ac+bc$$

$$y = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{[(x+a)(x+b)(x+c)]'}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2(a+b+c)x + ab+ac+ba}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$$

$$470 \quad z = \sqrt[3]{y+\sqrt{y}}$$

Desarrollo

$$z = (y+\sqrt{y})^{\frac{1}{3}}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{3}(y+\sqrt{y})^{-\frac{2}{3}}(y+\sqrt{y})' \Rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{1}{3}(y+\sqrt{y})^{-\frac{2}{3}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2\sqrt{y}+1}{6\sqrt[3]{(y+\sqrt{y})^2\sqrt{y}}}$$

$$471 \quad f(t) = (2t+1)(3t+2)\sqrt[3]{3t+2}$$

Desarrollo

$$f(t) = (2t+1)(3t+2)^{\frac{4}{3}}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$f'(t) = 2(3t+2)^{\frac{4}{3}} + 4(2t+1)(3t+2)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(t) = 2(3t+2)(3t+2)^{\frac{1}{3}} + 4(2t+1)(3t+2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(t) = 2(7t+4)\sqrt[3]{3t+2}$$

$$472 \quad x = \frac{1}{\sqrt{2ay - y^2}}$$

Desarrollo

$$x = (2ay - y^2)^{-\frac{1}{2}}, \text{ derivando se tiene: } \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2}(2ay - y^2)^{-\frac{3}{2}}(2a - y)$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2}(2ay - y^2)^{-\frac{3}{2}}(2a - y) = \frac{y - a}{\sqrt{(2ay - y^2)^3}}$$

$$473 \quad y = \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1+e^x} + 1)$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{1+e^x} - 1)'}{\sqrt{1+e^x} - 1} - \frac{(\sqrt{1+e^x} + 1)'}{\sqrt{1+e^x} + 1}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{\sqrt{1+e^x} - 1} - \frac{\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{\sqrt{1+e^x} + 1}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{1+e^x} + 1} \right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} \left(\frac{\sqrt{1+e^x} + 1 - \sqrt{1+e^x} - 1}{(1+e^x) - 1} \right) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

$$474 \quad y = \frac{1}{15} \cos^3 x (3 \cos^2 x - 5)$$

Desarrollo

$$y = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos^4 x (\cos x)' - \cos^2 x (\cos x)' \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\cos^4 x \cdot \text{sen} x + \cos^2 x \cdot \text{sen} x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cdot \text{sen} x (1 - \cos^2 x) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cdot \text{sen} x (\text{sen}^2 x)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \text{sen}^3 x \cdot \cos^2 x$$

$$475 \quad y = \frac{(tg^2 x - 1)(tg^4 x + 10tg^2 x + 1)}{3tg^3 x}$$

Desarrollo

Efectuando el producto se tiene:

$$y = \frac{tg^6 x + 9tg^4 x - 9tg^2 x - 1}{3tg^3 x} = \frac{1}{3}tg^3 x + 3tg x - 3tg^{-1} x - \frac{1}{3}tg^{-3} x$$

$$y' = tg^2 x \cdot \sec^2 x + 3\sec^2 x + 3tg^{-2} x \cdot \sec^2 x + tg^{-4} x \cdot \sec^2 x$$

$$y' = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{3}{\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^4 x}$$

$$y' = \frac{\text{sen}^6 x + 3\text{sen}^4 x \cdot \cos^2 x + 3\text{sen}^2 x \cdot \cos^4 x + \cos^6 x}{\text{sen}^4 x \cdot \cos^4 x}$$

$$y' = \frac{(\sec^2 x + \cos^2 x)^3}{\sec^4 x \cdot \cos^4 x} = \frac{1}{\sec^4 x \cdot \cos^4 x}$$

476 $y = \tan^2 5x$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2 \tan 5x \cdot (\tan 5x)' = 2 \tan 5x \cdot \sec^2 5x (5) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 10 \tan 5x \cdot \sec^2 5x$$

477 $y = \frac{1}{2} \sec x^2$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cos x^2 (x^2)' = \frac{\cos x^2}{2} (2x) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = x \cos x^2$$

478 $y = \sec^2 t^3$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2 \sec^3 (t^3)' = 2 \sec^3 \cos^3 (t^3)'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 6t^2 \sec^3 \cos^3 = 3t^2 \sec 2t^3$$

479 $y = 3 \sec x \cdot \cos^2 x + \sec^3 x$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3 \cos^3 x + 3 \sec x \cdot 2 \cos(-\sec x) + 3 \sec^2 x \cdot \cos x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3 \cos^3 x - 6 \sec^2 x \cdot \cos x + 3 \sec^2 x \cdot \cos x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3 \cos^3 x - 3 \sec^2 x \cos x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3 \cos x (\cos^2 x - \sec^2 x) = 3 \cos x \cdot \cos 2x$$

480 $y = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan^2 x (\tan x)' - \frac{1}{\cos^2 x} + 1 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\tan^2 x - 1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\tan^2 x - \sec^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sec^2 x - \sec^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^4 x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{\sec^4 x}{\cos^4 x} = \tan^4 x$$

481 $y = -\frac{\cos x}{3 \sec^3 x} + \frac{4}{3} \tan x$

Desarrollo

$$y' = \frac{-1}{3} \left(\frac{\sec^3 x (\cos x)' - \cos x \cdot 3 \sec^2 x (\sec x)'}{\sec^6 x} - \frac{4}{3 \sec^2 x} \right)$$

$$y' = -\frac{1}{3} \left(\frac{-\sec^4 x - 3 \cos^2 x \cdot \sec^2 x}{\sec^5 x} \right) - \frac{4}{3 \sec^2 x}$$

$$y' = \frac{1}{3} \left(\frac{\sec^2 x + 3 \cos^2 x}{\sec^4 x} \right) - \frac{4}{3 \sec^2 x}$$

$$y' = \frac{1}{3} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x + 3 \cos^2 x - 4 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} \right) \Rightarrow y' = \frac{3 \cos^2 x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{3 \operatorname{sen}^4 x} = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^4 x}$$

$$482 \quad y = \sqrt{\alpha \operatorname{sen}^2 x + \beta \cos^2 x}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{(\alpha \operatorname{sen}^2 x + \beta \cos^2 x)'}{2\sqrt{\alpha \operatorname{sen}^2 x + \beta \cos^2 x}} = \frac{2\alpha \operatorname{sen} x \cos x - 2\beta \operatorname{sen} x \cos x}{2\sqrt{\alpha \operatorname{sen}^2 x + \beta \cos^2 x}}$$

$$y' = \frac{(\alpha - \beta) \operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{\alpha \operatorname{sen}^2 x + \beta \cos^2 x}}$$

$$483 \quad y = \operatorname{arcsen} x^2 + \arccos x^2$$

Desarrollo

$$y' = \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \Rightarrow y' = 0$$

$$484 \quad y = \frac{1}{2} (\operatorname{arcsen} x)^2 \arccos x$$

Desarrollo

$$y' = \operatorname{arcsen} x (\operatorname{arcsen} x)' \arccos x + \frac{1}{2} (\operatorname{arcsen} x)^2 (\arccos x)'$$

$$y' = \frac{\operatorname{arcsen} x \cdot \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{2\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x \left(\frac{2 \arccos x - \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$485 \quad y = \operatorname{arcsen} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)$$

Desarrollo

$$y' = \frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^2}} = \frac{2x^3 - (x^2-1)2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$486 \quad y = \operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{\frac{1+x^2 - x^2}{(1+x^2)^{3/2}}}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}} = \frac{\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$487$$

$$y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} (\arccos x)' - \arccos x (\sqrt{1-x^2})'}{(1-x^2)^2}$$

derivando se tiene:

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) - \arccos x \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)}{(1-x^2)^2} = \frac{-1 + \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arccos x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' = \frac{x \arccos x - \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$488 \quad y = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsen(x\sqrt{\frac{b}{a}})$$

Desarrollo

$$y' = \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{\sqrt{1-x^2 \frac{b}{a}}} = \frac{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{\sqrt{b} \frac{\sqrt{a-x^2b}}{\sqrt{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a-x^2b}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{a-x^2b}}$$

$$48 \quad y = \sqrt{a^2-x^2} + a \arcsen \frac{x}{a}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a(\frac{x}{a})'}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$y' = \frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\sqrt{a-x}\sqrt{a+x}}{(a-x)(a+x)} = \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}} = y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \text{ para } a > 0$$

$$49 \quad y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsen \frac{x}{a}$$

Desarrollo

$$y' = \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2(\frac{x}{a})'}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} \Rightarrow y' = \frac{a^2-x^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$y' = \frac{2a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\sqrt{a^2-x^2}; a > 0$$

$$491 \quad y = \arcsen(1-x) + \sqrt{2x-x^2}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(1-x)'}{\sqrt{1-(1-x)^2}} + \frac{(2x-x^2)'}{2\sqrt{2x-x^2}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} + \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$492 \quad y = (x-\frac{1}{2})\arcsen(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = (x-\frac{1}{2})'\arcsen\sqrt{x} + (x-\frac{1}{2})(\arcsen\sqrt{x})' + \frac{1}{2}(\frac{(x-x^2)'}{2\sqrt{x-x^2}})$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \arcsen\sqrt{x} + (x-\frac{1}{2})\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{4}\frac{(1-2x)}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \arcsen\sqrt{x} + \frac{2x-1}{4\sqrt{x-x^2}} + \frac{1-2x}{4\sqrt{x-x^2}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \arcsen\sqrt{x}$$

$$493 \quad y = \ln(\arcsen 5x)$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\arcsen 5x)'}{\arcsen 5x} = \frac{\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}}{\arcsen 5x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2} \arcsen 5x}$$

494 $y = \arcsen(\ln x)$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\ln x)'}{\sqrt{1 - (\ln x)^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 - (\ln x)^2}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{1 - (\ln x)^2}}$$

495 $y = \arctg\left(\frac{x \operatorname{sen} \alpha}{1 - x \cos \alpha}\right)$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{x \operatorname{sen} \alpha}{1 - x \cos \alpha}\right)'}{1 + \left(\frac{x \operatorname{sen} \alpha}{1 - x \cos \alpha}\right)^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(1 - x \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha - x \operatorname{sen} \alpha (-\cos \alpha)}{(1 - x \cos \alpha)^2 + x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} \alpha - x \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + x \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2 \cos^2 \alpha + x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$$

496 $y = \frac{2}{3} \arctg \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3}$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3}\right)'}{1 + \left(\frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3}\right)^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \frac{\frac{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{9 + (5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \frac{\frac{5(9)}{6 \cos^2 \frac{x}{2}}}{9 + 5 \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4\right)^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \left(\frac{15}{2 \cos^2 \frac{x}{2} (9 + (5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4)^2)} \right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{5}{\cos^2 \frac{x}{2} (9 + 25 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 40 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 16)}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{5}{\cos^2 \frac{x}{2} (25(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) + 40 \operatorname{tg} \frac{x}{2})}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{5}{\cos^2 \frac{x}{2} (25 \sec^2 \frac{x}{2} + 40 \operatorname{tg} \frac{x}{2})}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5 + 8 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5 + 4 \operatorname{sen} x}$$

497 $y = 3b^2 \arctg \sqrt{\frac{x}{b-x}} - (3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$

Desarrollo

$$y' = 3b^2 \frac{\left(\sqrt{\frac{x}{b-x}}\right)'}{1 + \left(\sqrt{\frac{x}{b-x}}\right)^2} - 2\sqrt{bx-x^2} - (3b+2x) \frac{(bx-x^2)'}{2\sqrt{bx-x^2}}$$

$$y' = 3b^2 \left(\frac{\frac{b}{2\sqrt{b-x}(b-x)\sqrt{x}}}{\frac{b-x+x}{b-x}} \right) - 2\sqrt{bx-x^2} - (3b+2x) \frac{(b-2x)}{2\sqrt{bx-x^2}}$$

$$y' = 3b^2 \left(\frac{b(b-x)}{2b\sqrt{b-x}(b-x)\sqrt{x}} \right) - 2\sqrt{bx-x^2} - \frac{(3b^2 + 2bx - 6bx - 4x^2)}{2\sqrt{bx-x^2}}$$

$$y' = \frac{3b^2}{3\sqrt{b-x}\sqrt{x}} - \frac{4(bx-x^2)+3b^2-4bx-4x^2}{2\sqrt{bx-x^2}}$$

$$y' = \frac{3b^2}{2\sqrt{b-x}\sqrt{x}} + \frac{8x^2-3b^2}{2\sqrt{bx-x^2}} \Rightarrow y' = \frac{3b^2+8x^2-3b^2}{2\sqrt{x}\sqrt{b-x}} = \frac{8x^2}{2\sqrt{bx-x^2}}$$

$$y = \frac{4x^2}{\sqrt{x}\sqrt{b-x}} = 4x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{b-x}} = 4x \sqrt{\frac{x}{b-x}}$$

$$498 \quad y = -\sqrt{2} \arccotg \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} - x$$

Desarrollo

$$y' = -\sqrt{2} \left(-\frac{\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)'}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)^2} \right) - 1 \Rightarrow y' = \sqrt{2} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2} \cos^2 x}}{\frac{2 + \operatorname{tg}^2 x}{2}} \right) - 1$$

$$y' = -\frac{2 \sec^2 x}{2 \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} - 1 = \frac{2}{1 + \cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos^2 x}$$

$$499 \quad y = \sqrt{e^{ax}}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{(e^{ax})'}{2\sqrt{e^{ax}}} = \frac{ae^{ax}}{2\sqrt{e^{ax}}} = \frac{a}{2} \sqrt{e^{ax}}$$

$$500 \quad y = e^{\operatorname{sen}^2 x}$$

Desarrollo

$$y' = e^{\operatorname{sen}^2 x} (\operatorname{sen}^2 x)' = 2 \operatorname{sen} x \cos x e^{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow y' = \operatorname{sen} 2x e^{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$501 \quad F(x) = (2ma^{mx} + b)^p$$

Desarrollo

$F'(x) = p(2ma^{mx} + b)^{p-1} (2ma^{mx} + b)'$, derivando se tiene:

$$F'(x) = p(2ma^{mx} + b)^{p-1} 2m^2 a^{mx} \ln a$$

$$F'(x) = 2m^2 p(2ma^{mx} + b)^{p-1} a^{mx} \ln a$$

$$502 \quad F(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$$

Desarrollo

$$F'(t) = \alpha e^{\alpha t} \cos \beta t - \beta e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \Rightarrow F'(t) = e^{\alpha t} (\alpha \cos \beta t - \beta \operatorname{sen} \beta t)$$

$$503 \quad y = \frac{(\alpha \operatorname{sen} \beta x - \beta \cos \beta x) e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{(\alpha \cos \beta x + b^2 \operatorname{sen} \beta x) e^{\alpha x} + \alpha e^{\alpha x} (\alpha \operatorname{sen} \beta x - \beta \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$y' = \frac{(\beta^2 + \alpha^2) \operatorname{sen} \beta x e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} = \operatorname{sen} \beta x e^{\alpha x}$$

$$504 \quad y = \frac{e^{-x}}{10} (3 \operatorname{sen} 3x - \cos 3x)$$

Desarrollo

$$y = \frac{e^{-x}}{10} (3 \operatorname{sen} 3x - \cos 3x) + \frac{e^{-x}}{10} (9 \cos 3x + 3 \operatorname{sen} 3x)$$

$$y' = \frac{e^{-x}}{10} (-3 \operatorname{sen} 3x + \cos 3x + 9 \cos 3x + 3 \operatorname{sen} 3x)$$

$$y' = \frac{e^{-x}}{10} (10 \cos 3x) = e^{-x} \cos 3x$$

505

$$y = x^n a^{-x^2}$$

Desarrollo

$$y' = nx^{n-1} a^{-x^2} + x^n a^{-x^2} (-2x) \ln a \Rightarrow y' = a^{-x^2} x^{n-1} (n - 2x^2 \ln a)$$

506

$$y = \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}} a^{\sqrt{\cos x}} + \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}} (\sqrt{\cos x})' \ln a$$

$$y' = -\frac{\sin x \cdot a^{\sqrt{\cos x}}}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{\sin x \cdot \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}} \ln a}{2\sqrt{\cos x}}$$

$$y' = -\frac{1}{2} \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}} \left[\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sqrt{\cos x} \ln a \right]$$

$$y' = -\frac{1}{2} \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}} (\tan x + \tan x \cdot \sqrt{\cos x} \ln a)$$

$$y' = -\frac{1}{2} \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}} \tan x (1 + \sqrt{\cos x} \ln a)$$

507

$$y = 3^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}}$$

Desarrollo

$$y' = 3^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}} \left(\operatorname{ctg} \frac{1}{x} \right)' \ln 3 = 3^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)' \ln 3 = 3^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} \right) \ln 3$$

$$y' = 3^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}} \frac{\ln 3}{x^2 \sin^2 \frac{1}{x}} = \frac{3^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}} \ln 3}{(x \sin \frac{1}{x})^2}$$

508

$$y = \ln(ax^2 + bx + c)$$

Desarrollo

$$y' = \frac{(ax^2 + bx + c)'}{ax^2 + bx + c} = \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$$

509

$$y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

Desarrollo

$$y' = \frac{(x + \sqrt{a^2 + x^2})'}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\sqrt{a^2 + x^2} (x + \sqrt{a^2 + x^2})} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

510

$$y = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1 + \sqrt{x})$$

Desarrollo

$$y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2(1 + \sqrt{x})'}{1 + \sqrt{x}} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}$$

$$y' = \frac{\sqrt{x} + x - (1 + \sqrt{x}) + 1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = \frac{x}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

511

$$y = \ln(a + x + \sqrt{2ax + x^2})$$

Desarrollo

$$y' = \frac{(a+x+\sqrt{2ax+x^2})'}{a+x\sqrt{2ax+x^2}}$$

$$y' = \frac{1 + \frac{a+x}{\sqrt{2ax+x^2}}}{a+x+\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{\sqrt{2ax+x^2} + x + a}{\sqrt{2ax+x^2}(a+x+\sqrt{2ax+x^2})} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$$

512

$$y = \frac{1}{\ln^2 x}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{1}{\ln^2 x} = (\ln x)^{-2} \Rightarrow y' = -2(\ln x)^{-3}(\ln x)', \text{ de donde se tiene}$$

$$y' = -2\ln^{-3} x \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{2}{x\ln^3 x}$$

513

$$y = \ln\left(\cos \frac{x-1}{x}\right)$$

Desarrollo

$$y' = \frac{\left[\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]'}{\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)}$$

$$y' = \operatorname{tg}\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)' = -\operatorname{tg}\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \operatorname{tg}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

514

$$y = \ln \frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$$

Desarrollo

$$y = \ln \frac{(x-2)^5}{(x+1)^3} = \ln(x-2)^5 - \ln(x+1)^3 \Rightarrow y = 5\ln(x-2) - 3\ln(x+1)$$

$$y' = \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+1} = \frac{2x+11}{x^2-x-2} \Rightarrow y' = \frac{2x+11}{x^2-x-2}$$

515

$$y = \ln \frac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}$$

Desarrollo

$$y = \ln \frac{(x-1)^3(x-2)}{x-3} = \ln(x-1)^3(x-2) - \ln(x-3)$$

$$y = \ln(x-1)^3 + \ln(x-2) - \ln(x-3) \Rightarrow y = 3\ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3)$$

$$y' = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} \Rightarrow y' = \frac{3x^2+16x+19}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

516

$$y = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + \ln(\operatorname{tg} x)$$

Desarrollo

$$y = -\frac{\operatorname{sen}^{-2} x}{2} + \ln(\operatorname{tg} x) \Rightarrow y' = \frac{2\operatorname{sen}^{-3} x (\operatorname{sen} x)'}{2} + \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg} x}$$

$$y' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{1}{\cos^2 x \operatorname{tg} x}$$

$$y' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} \Rightarrow y' = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x \cos x}$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x \cos x}$$

517

$$y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

Desarrollo

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right)$$

$$y' = \frac{x^2 - a^2 + x^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2}(x + \sqrt{x^2 - a^2})} \right)$$

$$y' = \frac{2x^2 - a^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{2x^2 - 2a^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow y' = \sqrt{x^2 - a^2}$$

518 $y = \ln(\ln(3 - 2x^3))$

Desarrollo

$$y' = \frac{[\ln(3 - 2x^3)]'}{\ln(3 - 2x^3)} = \frac{-\frac{6x^2}{3 - 2x^3}}{\ln(3 - 2x^3)} \Rightarrow y' = -\frac{6x^2}{(3 - 2x^3)\ln(3 - 2x^3)}$$

519 $y = 5\ln^3(ax + b)$

Desarrollo

$$y' = 15\ln^2(ax + b)[\ln(ax + b)]' \Rightarrow y' = 15\ln^2(ax + b) \cdot \frac{a}{ax + b}$$

$$y' = \frac{15a\ln^2(ax + b)}{ax + b}$$

520

$$y = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x}\right)$$

Desarrollo

$$y = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x}\right) = \ln(\sqrt{x^2 + a^2} + x) - \ln(\sqrt{x^2 + a^2} - x)$$

$$y' = \frac{(\sqrt{x^2 + a^2} + x)'}{\sqrt{x^2 + a^2} + x} - \frac{(\sqrt{x^2 + a^2} - x)'}{\sqrt{x^2 + a^2} - x}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$y' = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + 1}{\sqrt{x^2 + a^2} + x} - \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - 1}{\sqrt{x^2 + a^2} - x}$$

$$y' = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}(\sqrt{x^2 + a^2} + x)} - \frac{x - \sqrt{x^2 + a^2}}{(\sqrt{x^2 + a^2} - x)\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

521

$$y = \frac{m}{2} \ln(x^2 - a^2) + \frac{n}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{m}{2} \ln(x^2 - a^2) + \frac{n}{2a} [\ln(x-a) - \ln(x+a)]$$

$$y' = \frac{m}{2} \left(\frac{2x}{x^2 - a^2} \right) + \frac{n}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right), \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = \frac{mx}{x^2 - a^2} + \frac{n}{2a} \left(\frac{x+a-x+a}{x^2 - a^2} \right)$$

$$y' = \frac{mx}{x^2 - a^2} + \frac{n}{x^2 - a^2} \Rightarrow y' = \frac{mx+n}{x^2 - a^2}$$

522

$$y = x \cdot \text{sen}(\ln x - \frac{\pi}{4})$$

Desarrollo

$$y' = \operatorname{sen}(\ln x - \frac{\pi}{4}) + x \cos(\ln x - \frac{\pi}{4})(\ln x - \frac{\pi}{4})', \text{ derivando se tiene:}$$

$$y' = \operatorname{sen}(\ln x - \frac{\pi}{4}) + \cos(\ln x - \frac{\pi}{4})$$

$$y' = \operatorname{sen}(\ln x) \cos \frac{\pi}{4} - \cos(\ln x) \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \cos(\ln x) \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}(\ln x) \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$$

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}(\ln x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\ln x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\ln x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}(\ln x), \text{ por lo tanto}$$

$$y = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\ln x)$$

523

$$y = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg} \frac{x}{2}) - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{1}{2} \frac{(\operatorname{tg} \frac{x}{2})'}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 x (-\operatorname{sen} x) - \cos x \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^4 x}$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \frac{\operatorname{sen}^3 x + 2 \cos^2 x \operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen}^4 x}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \frac{2 \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{2 \operatorname{sen}^3 x}$$

$$y' = \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \frac{\cos^2 x + 1}{2 \operatorname{sen}^3 x} \Rightarrow y' = \frac{\sec \frac{x}{2}}{4 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} + \frac{\cos^2 x + 1}{2 \operatorname{sen}^3 x}$$

$$y' = \frac{1}{4 \cos \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}} + \frac{\cos^2 x + 1}{2 \operatorname{sen}^3 x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2 \operatorname{sen} x} + \frac{\cos^2 x + 1}{2 \operatorname{sen}^3 x}$$

$$y' = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 1}{2 \operatorname{sen}^3 x} = \frac{2}{2 \operatorname{sen}^3 x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}$$

524

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \ln \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

Desarrollo

Aplicando propiedad de logaritmo

 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \ln(1 + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln x$, aplicando la derivada se tiene:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}(1 + \sqrt{x^2 + 1})} + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(1 + \sqrt{x^2 + 1}) - x^2 + \sqrt{x^2 + 1}(1 + \sqrt{x^2 + 1})}{x\sqrt{x^2 + 1}(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(1 + \sqrt{x^2 + 1} - 1) + \sqrt{x^2 + 1}(1 + \sqrt{x^2 + 1})}{x\sqrt{x^2 + 1}(1 + \sqrt{x^2 + 1})}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}(1 + \sqrt{x^2 + 1})}{x\sqrt{x^2 + 1}(1 + \sqrt{x^2 + 1})}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1+\sqrt{x^2+1}}{x(1+\sqrt{x^2+1})} = \frac{\sqrt{x^2+1}(1+\sqrt{x^2+1})}{x(1+\sqrt{x^2+1})} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$525 \quad y = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}\right)$$

Desarrollo

$$y = \frac{1}{3} [\ln(x^2-2x+1) - \ln(x^2+x+1)], \text{ aplicando la derivada se tiene.}$$

$$y' = \frac{1}{3} \left[\frac{(x^2-2x+1)'}{x^2-2x+1} - \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} \right] \Rightarrow y' = \frac{1}{3} \left[\frac{2x-2}{x^2-2x+1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right]$$

$$y' = \frac{1}{3} \left[\frac{2(x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2-2x+1)}{(x^2-2x+1)(x^2+x+1)} \right]$$

$$y' = \frac{1}{3} \left[\frac{2(x^3-1) - (2x^3-3x^2+1)}{(x-1)(x^3-1)} \right]$$

$$y' = \frac{1}{3} \left[\frac{3x^2-3}{(x-1)(x^3-1)} \right] = \frac{x^2-1}{(x-1)(x^3-1)} = \frac{x+1}{x^3-1} \Rightarrow y' = \frac{x-1}{x^3-1}$$

$$526 \quad y = 2^{\arcsen 3x} + (1 - \arccos 3x)^2$$

Desarrollo

$$y' = 2^{\arcsen 3x} (\arcsen 3x)' \ln 2 + 2(1 - \arccos 3x)(1 - \arccos 3x)'$$

$$y' = 2^{\arcsen 3x} \frac{3 \ln 2}{\sqrt{1-9x^2}} + 2(1 - \arccos 3x) \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$y' = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} (2^{\arcsen 3x} \ln 2 + 2(1 - \arccos 3x))$$

$$527 \quad y = 3^{\frac{\sen ax}{\cos bx}} + \frac{1}{3} \frac{\sen^3 ax}{\cos^3 bx}$$

Desarrollo

$$y = 3^{\frac{\sen ax}{\cos bx}} + \frac{1}{3} \frac{\sen^3 ax}{\cos^3 bx}, \text{ aplicando la derivada se tiene:}$$

$$y' = 3^{\frac{\sen ax}{\cos bx}} \ln 3 \left(\frac{\sen ax}{\cos bx} \right)' + \left(\frac{\sen ax}{\cos bx} \right)^2 \left(\frac{\sen ax}{\cos bx} \right)'$$

$$y' = (3^{\frac{\sen ax}{\cos bx}} \ln 3 + \frac{\sen^2 ax}{\cos^2 bx}) \left(\frac{a \cos bx \cos ax + b \sen ax \sen bx}{\cos^2 bx} \right)$$

$$528 \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}} \right)$$

Desarrollo

$$y' = \frac{1}{\sqrt{3}} [\ln(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}) - \ln(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3})]$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3})'}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}} - \frac{(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3})'}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}} \right]$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}} - \frac{\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}} \right]$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}} - \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}} \right]$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\frac{\sec^2 \frac{x}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3} \right) - \sec^2 \frac{x}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3} \right)}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \right)^2 - 3} \right]$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\frac{2\sqrt{3} \sec^2 \frac{x}{2}}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \right)^2 - 3} \right] \Rightarrow y' = \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \right)^2 - 3} = \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 4\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4 - 3}$$

$$y' = \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 \right) + 4\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2} + 4\operatorname{tg} \frac{x}{2}}, \text{ por lo tanto:}$$

$$y' = \frac{1}{1 + 4\operatorname{sen} \frac{x}{2} + 4\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{1 + 2\operatorname{sen} x}$$

529 $y = \operatorname{arctg}(\ln x)$

Desarrollo

$$y' = \frac{(\ln x)'}{1 + \ln^2 x} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \ln^2 x} \Rightarrow y' = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$$

530 $y = \ln(\operatorname{arcsen} x) + \frac{1}{2} \ln^2 x + \operatorname{arcsen}(\ln x)$

Desarrollo

$$y' = \frac{(\operatorname{arcsen} x)'}{\operatorname{arcsen} x} + \ln x (\ln x)' + \frac{(\ln x)'}{\sqrt{1 - \ln^2 x}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2} \operatorname{arcsen} x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$$

531 $y = \operatorname{arctg}(\ln \frac{1}{x})$

Desarrollo

$$y' = \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)'}{1 + \left(\ln \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{(-\ln x)'}{1 + \ln^2 x} = -\frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$$

532 $y = \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \ln \frac{x-1}{x+1}$

Desarrollo

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{x^2}{2}} \right)' + \frac{1}{6} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right] \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2 + x^2} \right) + \frac{1}{6} \left[\frac{-2}{x^2 - 1} \right]$$

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{2}(2 + x^2)} \right) + \frac{1}{3(x^2 - 1)} \Rightarrow y' = \frac{2}{3(2 + x^2)} + \frac{1}{3(x^2 - 1)}$$

$$y' = \frac{1}{3} \left(\frac{2x^2 - 2 + 2 + x^2}{(x^2 + 2)(x^2 - 1)} \right) \Rightarrow y' = \frac{1}{3} \left(\frac{3x^2}{x^4 + x^2 - 2} \right) = \frac{x^2}{x^4 + x^2 - 2}$$

533 $y = \ln \frac{1 + \sqrt{\operatorname{sen} x}}{1 - \sqrt{\operatorname{sen} x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{sen} x}$

Desarrollo

$$y = \ln(1 + \sqrt{\operatorname{sen} x}) - \ln(1 - \sqrt{\operatorname{sen} x}) + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

$$y' = \frac{(1+\sqrt{\operatorname{sen} x})'}{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}} - \frac{(1-\sqrt{\operatorname{sen} x})'}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}} + \frac{2(\sqrt{\operatorname{sen} x})'}{1+\operatorname{sen} x}$$

$$y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} + \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \left(\frac{1}{2(1+\sqrt{\operatorname{sen} x})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{\operatorname{sen} x})} + \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} \right)$$

$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}+1+\sqrt{\operatorname{sen} x}}{1-\operatorname{sen} x} \right) + \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} \right]$$

$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \left[\frac{1}{1-\operatorname{sen} x} + \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} \right] \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \left[\frac{1+\operatorname{sen} x+1-\operatorname{sen} x}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)} \right]$$

$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \left[\frac{2}{1-\operatorname{sen}^2 x} \right] \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} \right) = \frac{2}{\sqrt{\operatorname{sen} x} \cos x}$$

$$534 \quad y = \frac{3}{4} \ln \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right) + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$$

Desarrollo

$$y = \frac{3}{4} [\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)] + \frac{1}{4} \ln(x-1) - \frac{1}{4} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$$

$$y' = \frac{3}{4} \left[\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2+1} \right)$$

$$y' = \frac{3}{4} \left[\frac{x^3-x-x^3-x}{x^4-1} \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{x+1-x+1}{x^2-1} \right) + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

$$y' = \frac{3}{2} \left(-\frac{2x}{x^4-1} \right) + \frac{1}{2(x^2-1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

Diferenciación de Funciones

$$y' = \frac{-3x}{x^4-1} + \frac{x^2+1+x^2-1}{2(x^4-1)} \Rightarrow y' = -\frac{3x}{x^4-1} + \frac{x^2}{x^4-1} = \frac{x^2-3x}{x^4-1}$$

$$535 \quad f(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)$$

Desarrollo

$$f'(x) = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)} + \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} \left[1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^2-x+1) - (2x-1)(x+1)}{6(x^3+1)} + \frac{2}{3 \left(\frac{3+4x^2-4x+1}{3} \right)}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2-3x+3-2x^2-x+1}{6(x^3+1)} + \frac{2}{4x^2-4x+4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x+4}{6(x^3+1)} + \frac{1}{2x^2-2x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2-4x+4}{6(x^3+1)} + \frac{1}{2(x^2-x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4x+4)(x+1)+3x+3}{6(x^3+1)} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^3-3x^2+4+3x+3}{6(x^3+1)}$$

$$f'(x) = \frac{x^3-3x^2+3x+7}{6(x^3+1)}$$

536

$$f(x) = \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}$$

Desarrollo

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}(\operatorname{arcsen} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}})}{1-x^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x + x}{1-x^2} + \frac{-x}{(1-x^2)}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x}{(1-x^2)} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x}{1-x^2}$$

537 $y = \sinh^3 2x$

Desarrollo

$$y' = 3\sinh^2 2x \cdot \cosh 2x(2) = 6\sinh^2 2x \cdot \cosh 2x$$

538 $y = e^{\alpha x} \cosh \beta x$

Desarrollo

$$y' = e^{\alpha x} \cosh \beta x + \beta e^{\alpha x} \sinh \beta x \Rightarrow y' = e^{\alpha x} (\alpha \cosh \beta x + \beta \sinh \beta x)$$

539 $y = \tanh^3 2x$

Desarrollo

$$y' = 3\tanh^2 2x \cdot \frac{2}{\cosh^2 2x} = 6\tanh^2 2x(1 - \tanh^2 2x)$$

540 $y = \ln(\sinh 2x)$

Desarrollo

$$y' = \frac{(\sinh 2x)'}{\sinh 2x} = \frac{2 \cosh 2x}{\sinh 2x} = 2 \coth 2x$$

541 $y = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)$

Desarrollo

$$y' = \frac{\frac{2x}{a^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2}} = \frac{2x}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^4}{a^4}}} = \frac{2x}{a^2 \sqrt{a^4 + x^4}}$$

542 $y = \operatorname{arccosh}(\ln x)$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\ln x)'}{\sqrt{(\ln x)^2 - 1}} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{(\ln x)^2 - 1}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{(\ln x)^2 - 1}}$$

543 $y = \operatorname{arctgh}(\tanh x)$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\tanh x)'}{1 - (\tanh x)^2} = \frac{\frac{1}{\cosh^2 x}}{1 - (\tanh x)^2} = \frac{1}{\cosh^2 x(1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x})}$$

$$y' = \frac{1}{\cosh^2 x - \sinh^2 x} = \frac{1}{\cosh 2x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\cosh 2x}$$

544 $y = \operatorname{arccth}(\sec x)$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\sec x)'}{\sec^2 x - 1} = \frac{\sec x \tanh x}{\tanh^2 x} = \frac{\sec x}{\tanh x} = \frac{1}{\sinh x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh x}$$

545 $y = \operatorname{arctgh}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'}{1 - \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{\frac{(1+x^2)2 - 2x(2x)}{(1+x^2)^2}}{\frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2+2x^2-4x^2}{1+2x^2+x^4-4x^2} = \frac{2-2x^2}{1-2x^2+x^4} \Rightarrow y' = \frac{2(1-x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{2}{1-x^2}$$

546

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)\operatorname{arctgh} x + \frac{x}{2}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{dy}{dx} = x \operatorname{arctgh} x + \left(\frac{x^2-1}{2}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = x \operatorname{arctgh} x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = x \operatorname{arctgh} x$$

547

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\right) \operatorname{arcsen} x - \frac{x\sqrt{1+x^2}}{4}$$

Desarrollo

$$y' = x \operatorname{arcsen} x + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{4} - \frac{x^2}{4\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = x \operatorname{arcsen} x + \left(\frac{2x^2+1}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1+x^2-x^2}{4\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = x \operatorname{arcsen} x + \left(\frac{2x^2+1}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x^2+1}{4\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y' = x \operatorname{arcsen} x$$

548

Hallar y' si:

a) $y = |x|$

Desarrollo

$$\text{Si } y = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ derivando } y' = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Luego $y' = 1$, cuando $x > 0$ y $y' = -1$ Cuando $x < 0$ y $y'(0)$ no existe

b) $y = x|x|$

Desarrollo

$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ derivando } y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = |2x|$$

549

Hallar y' si: $y = \ln|x|$, ($x \neq 0$)Desarrollo

$$y' = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

550

Hallar $f'(x)$ si: $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{cuando } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{cuando } x > 0 \end{cases}$ Desarrollo

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{cuando } x \leq 0 \\ -e^{-x} & \text{cuando } x > 0 \end{cases}$$

551

Calcular $f'(0)$ si: $f(x) = e^{-x} \cos 3x$ Desarrollo

$$f'(x) = e^{-x}(-3\operatorname{sen}3x) - e^{-x}\cos 3x \Rightarrow f'(x) = e^{-x}(3\operatorname{sen}3x + \cos 3x)$$

$$f'(0) = -e^0(3\operatorname{sen}0 + \cos 0) = -1 \Rightarrow f'(0) = -1$$

552 $f(x) = \ln(1+x) + \operatorname{arcsen} \frac{x}{2}$. Hallar $f'(1)$

Desarrollo

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

553 $y = tg^3 \frac{\pi x}{6}$. Hallar $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2}$

Desarrollo

$$y' = 3tg^2 \frac{\pi x}{6} \cdot \sec^2 \frac{\pi x}{6} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \left(tg \frac{\pi x}{6} \cdot \sec \frac{\pi x}{6} \right)^2$$

$$y'|_{x=2} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = \frac{\pi}{2} \left(tg \frac{\pi}{3} \cdot \sec \frac{\pi}{3} \right)^2 = \frac{\pi}{2} (\sqrt{3} \cdot 2)^2 = \frac{\pi}{2} (3)(4) = 6\pi$$

554 Hallar $f'_+(0)$ y $f'_-(0)$ para la función $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x^2}$

Desarrollo

Por definición $f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

Como $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x^2}$, $f(0) = 0$, $f(0+h) = \sqrt{\operatorname{sen} h^2}$

Luego: $f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\operatorname{sen} h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\operatorname{sen} h^2}}{h}$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{sen} h^2}{h^2}}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{\sqrt{\operatorname{sen} h^2}}{h}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{\frac{\sqrt{\operatorname{sen} h^2}}{h}}{\frac{-h}{-h}} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{sen} h^2}{h^2}}}{-1} = \frac{1}{-1} \Rightarrow f'_-(0) = -1$$

555 Dada la función $f(x) = e^{-x}$. Hallar $f(0) + x f'(0)$

Desarrollo

Como $f(x) = e^{-x}$ derivando se tiene $f'(x) = -e^{-x}$

$f'(0) = -1$ y $f(0) = 1$. Luego $f(0) + x f'(0) = 1 - x$

556 Dada la función $f(x) = \sqrt{1+x}$. Hallar: $f(3) + (x-3)f'(3)$

Desarrollo

Como $f(x) = \sqrt{1+x}$ derivando se tiene $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

Luego $f(3) = 2$ y $f'(3) = \frac{1}{4}$

$$f(3) + (x-3) \cdot f'(3) = 2 + \frac{x-3}{4} = \frac{x+5}{4}$$

- 557 Dadas las funciones $f(x) = \operatorname{tg} x$ y $\varphi(x) = \ln(1-x)$. Hallar $\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$

Desarrollo

$$f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$$

$$\varphi(x) = \ln(1-x) \Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x-1}$$

$$\begin{cases} f'(x) = \sec^2 x \\ \varphi'(x) = \frac{1}{x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ \varphi'(x) = -1 \end{cases} \text{ Luego: } \frac{f'(0)}{\varphi'(0)} = \frac{1}{-1} = -1$$

- 558 Dadas las funciones $f(x) = 1-x$ y $\varphi(x) = 1 - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Hallar $\frac{\varphi'(1)}{f'(1)}$

Desarrollo

$$f(x) = 1-x \Rightarrow f'(x) = -1 \Rightarrow f'(1) = -1$$

$$\varphi(x) = 1 - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Rightarrow \varphi'(1) = -\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\varphi'(1)}{f'(1)} = \frac{0}{-1} = 0$$

- 559 Demostrar que la derivada de una función par es una función impar y la de una función impar, es par.

Desarrollo

Sea $f(x)$ una función par, entonces: $f(-x) = f(x)$

$$f'(-x)(-x)' = f'(x) - f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f'(-x) = -f'(x).$$

Luego $f'(x)$ es impar.

Diferenciación de Funciones

Si $g(x)$ es impar $g(-x) = -g(x) \Rightarrow g'(-x)(-x)' = -g'(x) \Rightarrow -g'(x) = -g'(x)$

$g'(-x) = g'(x)$. Luego $g'(x)$ es par

- 560 La derivada de una función periódica es una función periódica.

Desarrollo

Sea $f(x)$ una función periódica cuyo periodo sea T , es decir $f(x+T) = f(x)$,

$$f'(x+T)(x+T)' = f'(x) \Rightarrow f'(x+T) = f'(x)$$

$f'(x)$ es periódica

- 561 Demostrar que la función $y = xe^{-x}$, satisface a la ecuación $xy' = (1-x)y$.

Desarrollo

$$\text{Como } y = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x}(1-x)$$

$$xy' = xe^{-x}(1-x) \Rightarrow xy' = (1-x)xe^{-x} = (1-x)y \Rightarrow xy' = (1-x)y$$

- 562 Demostrar que la función $y = \frac{e^{-x^2}}{2}$ satisface a la ecuación $xy' = (1-x^2)y$

Desarrollo

Como $y = \frac{e^{-x^2}}{2}$ derivando se tiene:

$$y' = \frac{e^{-x^2}}{2} - \frac{x^2 e^{-x^2}}{2} = \frac{e^{-x^2}}{2}(1-x^2)$$

$$xy' = x \frac{e^{-x^2}}{2}(1-x^2) = (1-x^2)x \frac{e^{-x^2}}{2} \Rightarrow xy' = (1-x^2)y$$

- 563 Demostrar que la función $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$ satisface a la ecuación $xy' = y(y \ln x - 1)$

Desarrollo

$$y = \frac{1}{1+x+\ln x} \Rightarrow y' = \frac{(1+x+\ln x)'}{(1+x+\ln x)^2}$$

$$y' = \frac{1 + \frac{1}{x}}{(1+x+\ln x)^2} = -\frac{x+1}{x(1+x+\ln x)^2} \Rightarrow y' = -\frac{x+1}{x} \cdot y^2$$

$$xy' = -(x+1)y^2 \quad \dots (1)$$

Como $y = \frac{1}{1+x+\ln x} \Rightarrow y(1+x) = 1 - y \ln x$, de donde se tiene:

$$y^2(1+x) = y(1 - y \ln x) \quad \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene: $xy' = -y(1 - y \ln x)$

$$\therefore xy' = y(y \ln x - 1)$$

7) DERIVADA LOGARITMICA.-

- 564 Sea $y = f(x)$. Entonces $(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Hallar y' , si:

$$y = \sqrt[3]{x^2} \frac{1-x}{1+x^2} \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x$$

Desarrollo

$$\ln y = \frac{2}{3} \ln x - \ln(1+x^2) + \ln(1-x) + 3 \ln \operatorname{sen} x + 2 \ln \cos x$$

Diferenciación de Funciones

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3x} + \frac{-1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{3 \cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$y' = y \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} x \right)$$

- 565 Hallar y' , si $y = (\operatorname{sen} x)^x$

Desarrollo

Tomando logaritmos se tiene: $\ln y = x \ln (\operatorname{sen} x)$

$$\frac{y'}{y} = \ln (\operatorname{sen} x) + \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow y' = y (\ln \operatorname{sen} x + x \operatorname{ctg} x)$$

$$y' = (\operatorname{sen} x)^x (\ln \operatorname{sen} x + x \operatorname{ctg} x)$$

- 566 $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)$

Desarrollo

$$\ln y = \ln (x+1) + \ln (2x+1) + \ln (3x+1)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{3x+1} \Rightarrow y' = y \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{3x+1} \right)$$

$$y' = (2x+1)(3x+1) + 2(x+1)(3x+1) + 3(x+1)(2x+1)$$

- 567

$$y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$$

Desarrollo

$$\ln y = 2 \ln (x+2) - 3 \ln (x+1) - 4 \ln (x+3)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x+3}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = y \left(\frac{2(x+1)(x+3) - 3(x+2)(x+3) - 4(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)(x+3)} \right)$$

$$y' = y \left[\frac{-5x^2 - 19x - 20}{(x+2)(x+1)(x+3)} \right] = -\frac{(x+2)^2}{(x+3)^4(x+1)^3} \left(\frac{5x^2 + 19x + 20}{(x+2)(x+1)(x+3)} \right)$$

$$y' = \frac{(x+2)(5x^2 + 19x + 20)}{(x+1)^4(x+3)^5}$$

568

$$y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$$

Desarrollo

$$\ln y = \frac{1}{2} [\ln x + \ln(x-1) - \ln(x-2)]$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right) \Rightarrow y' = \frac{y}{2} \left(\frac{(x-1)(x-2) + x(x-2) - x(x-1)}{x(x-1)(x-2)} \right)$$

$$y' = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 3x + 2 + x^2 - 2x - x^2 + x}{x(x-1)(x-2)} \right)$$

$$y' = \frac{\sqrt{x(x-1)}}{2\sqrt{x-2}} \left(\frac{x^2 - 4x + 2}{x(x-1)(x-2)} \right) \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 4x + 2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$$

569

$$y = x^3 \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$$

Desarrollo

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{2} [\ln x^2 - \ln(x^2+1)]$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2} - \frac{2x}{x^2+1} \right) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} \right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{2}{3x} - \frac{2x}{3(x^2+1)} \Rightarrow y' = y \left(\frac{5}{3x} - \frac{2x}{3(x^2+1)} \right) = y \left(\frac{5x^2 + 5 - 2x^2}{3x(x^2+1)} \right)$$

$$y' = y \left(\frac{3x^2 + 5}{3x(x^2+1)} \right) = x^3 \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \left(\frac{3x^2 + 5}{3x(x^2+1)} \right) \Rightarrow y' = \frac{3x^2 + 5}{3(x^2+1)} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$$

570

$$y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$$

Desarrollo

$$\ln y = 9 \ln(x-2) - \frac{1}{2} [5 \ln(x-1) + 11 \ln(x-3)]$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{9}{x-2} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{x-1} + \frac{11}{x-3} \right)$$

$$y' = y \left(\frac{18(x-1)(x-3) - 5(x-2)(x-3) - 11(x-2)(x-1)}{2(x-1)(x-2)(x-3)} \right)$$

$$y' = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}} \left(\frac{2x^2 - 14x + 2}{2(x-1)(x-2)(x-3)} \right)$$

$$y' = \frac{(x-2)^8(x^2 - 7x + 1)}{(x-1)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$$

570

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+2)^3}}$$

Desarrollo

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{2}{3} \ln(x+2) - \frac{3}{2} \ln(x+3)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x-2)} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x+3} \right)$$

$$y' = y \left(\frac{3(x+2)(x+3) - 4(x-1)(x+3) - 9(x-1)(x+2)}{6(x-1)(x+2)(x+3)} \right)$$

$$y' = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+2)^3}} \left(\frac{-5x^2 - x + 24}{3(x-1)(x+2)(x+3)} \right)$$

$$y' = \frac{5x^2 + x - 24}{3(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{5}{2}}}$$

572 $y = x^x$

Desarrollo

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x, \text{ derivando}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1) \Rightarrow y' = x^x (\ln x + 1)$$

573 $y = x^{x^2}$

Desarrollo

$$\ln y = \ln x^{x^2} = x^2 \ln x, \text{ derivando se tiene:}$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln x + x \Rightarrow y' = y(2x \ln x + x) = x^{x^2} (2x \ln x + x), \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = x^{x^2+1} (2 \ln x + 1)$$

574 $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

Desarrollo

Diferenciación de Funciones

$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln x}{x}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow y' = y \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) \Rightarrow y' = \sqrt[3]{x} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$$

575 $y = x^{\sqrt{x}}$

Desarrollo

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \Rightarrow y' = y \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \Rightarrow y' = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$y' = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \ln x \right)$$

576 $y = x^{x^x}$

Desarrollo

$$\ln y = \ln x^{x^x} = x^x \ln x, \text{ derivando se tiene:}$$

$$\frac{y'}{y} = x^x \left(\frac{1}{x} \right) + (x^x)' \ln x = (x^x)' = x^x (\ln x + 1)$$

$$\frac{y'}{y} = x^x \left(\frac{1}{x} \right) + x^x (\ln x + 1) \ln x \Rightarrow y' = y \left[x^x \left(\frac{1}{x} + \ln^2 x + \ln x \right) \right]$$

$$y' = x^{x^x} x^x \left(\frac{1}{x} + \ln^2 x + \ln x \right)$$

577 $y = x^{\sin x}$

Desarrollo

$\ln y = \ln x^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \cdot \ln x$, derivando se tiene:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \Rightarrow y' = y(\cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}), \text{ de donde se tiene:}$$

$$y' = x^{\operatorname{sen} x} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \cdot \ln x \right)$$

578. $y = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$

Desarrollo

$\ln y = \ln(\cos x)^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \cdot \ln(\cos x)$, derivando se tiene:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \Rightarrow y' = y[\cos x \cdot \ln(\cos x) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x]$$

$$y' = (\cos x)^{\operatorname{sen} x} (\cos x \cdot \ln(\cos x) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x)$$

579. $y = (1 + \frac{1}{x})^x$

Desarrollo

$\ln y = \ln(1 + \frac{1}{x})^x = x \ln(1 + \frac{1}{x})$, derivando se tiene:

$$\frac{y'}{y} = \ln(1 + \frac{1}{x}) + x \cdot \frac{(-\frac{1}{x^2})}{1 + \frac{1}{x}} \Rightarrow y' = y[\ln(1 + \frac{1}{x}) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}]$$

$$y' = y[\ln(1 + \frac{1}{x}) + x(-\frac{1}{x(x+1)})] \Rightarrow y' = (1 + \frac{1}{x})^x \ln[(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}]$$

580. $y = (\arctg x)^x$

Desarrollo

$\ln y = \ln(\arctg x)^x = x \ln(\arctg x)$, derivando se tiene:

$$\frac{y'}{y} = \ln(\arctg x) + x \frac{(\arctg x)'}{\arctg x} \Rightarrow y' = y[\ln(\arctg x) + x \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{\arctg x}]$$

$$y' = (\arctg x)^x [\ln(\arctg x) + \frac{x}{(1+x^2)\arctg x}]$$

2.3. DERIVADAS DE FUNCIONES QUE NO ESTÁN D. EXPLICITAMENTE.-

a) DERIVADAS DE LA FUNCIÓN INVERSA.-

Si la derivada de la función $y = f(x)$ es $y'_x \neq 0$, la derivada de la

inversa $x = f^{-1}(y)$ será. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, o sea $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

b) DERIVADAS DE FUNCIONES EN FORMA PARAMÉTRICA.

Si la dependencia entre la función Y y el argumento x viene dada

medio del parámetro t. $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

Se tiene $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ en otra notación es: $\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

c) DERIVADA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA:

Si la dependencia entre x e y viene dada de forma implícita $F(x, y) = 0$ para hallar la derivada $y'_x = y'$ en los casos mas simples, bastará:

- 1) Calcular la derivada con respecto a x del primer miembro de la ecuación (α) considerando a y como función de x .
- 2) Igualar esta derivada a cero, es decir, suponer que: $\frac{d}{dx} F(x, y) = 0$
- 3) Resolver la ecuación obtenida con respecto a y' .

581 Hallar la derivada x'_y , si:

a) $3x + x^3 = y$

Desarrollo

$$\frac{dy}{dx} = 3 + 3x^2 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3 + 3x^2} \Rightarrow x'_y = \frac{1}{3 + 3x^2}$$

b) $y = x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

Desarrollo

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{\cos x}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{2}{2 - \cos x}$$

c) $y = 0.1x + e^{\frac{x}{2}}$

Desarrollo

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = 0.1 + \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{0.2 + e^{\frac{x}{2}}}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{2}{0.2 + e^{\frac{x}{2}}}$$

$$x'_y = \frac{2}{0.2 + e^{\frac{x}{2}}} \Rightarrow x'_y = \frac{2}{\frac{1}{5} + e^{\frac{x}{2}}} = \frac{10}{1 + 5e^{\frac{x}{2}}} \Rightarrow x'_y = \frac{10}{1 + 5e^{\frac{x}{2}}}$$

CALCULAR LA DERIVADA $y' = \frac{dy}{dx}$ de las funciones siguientes dada la forma paramétrica.

582

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = 2 \\ y'_t = 3t^2 \end{cases}, \text{ derivando tenemos: } \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{2}$$

583

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + 1 \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + 1 \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -\frac{1}{(t+1)^2} \\ y'_t = \frac{2t}{(t+1)^3} \end{cases} \text{ derivando se tiene:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{2t}{(t+1)^3}}{-\frac{1}{(t+1)^2}} = -\frac{2t}{t+1}$$

584

$$\begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2} \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2} \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \\ y'_t = \frac{-4at}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{-4at}{(1+t^2)^2}}{\frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}} = -\frac{2t}{1-t^2} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2t}{1-t^2}$$

585

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = \frac{3at(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \\ y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}}{\frac{3at(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

586

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ y'_t = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \frac{2\sqrt{t}}{3\sqrt[3]{t^2}} = \frac{2}{3\sqrt[6]{t}} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$$

587

$$\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \\ y'_t = \frac{1+t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1+t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} = \frac{(1+t)\sqrt{t^2+1}}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1+t}{t(1+t^2)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{1+t}{t(1+t^2)}$$

588

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = a \cos t \\ y'_t = a \sin t \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \sin t}{a \cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t \quad \therefore \frac{dy}{dx} = y'_x = \operatorname{tg} t$$

589

$$\begin{cases} x = a \cos^2 t \\ y = b \sin^2 t \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = a \cos^2 t \\ y = b \sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -2a \sin t \cos t \\ y'_t = 2b \sin t \cos t \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2b \sin t \cos t}{-2a \sin t \cos t} = -\frac{b}{a} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = y'_x = -\frac{b}{a}$$

590

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = b \sin^3 t \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = b \sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -3a \cos^2 t \sin t \\ y'_t = 3b \sin^2 t \cos t \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3b \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} t \quad \therefore \frac{dy}{dx} = y'_x = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} t$$

591

$$\begin{cases} x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = \frac{\cos^4 t \sin t - 3 \cos^2 t \sin^3 t}{\cos 2t \sqrt{\cos 2t}} \\ y'_t = \frac{3 \cos^3 t \sin^2 t - \sin^4 t \cos t}{\cos 2t \sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$$

592

$$\begin{cases} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arcsen \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

Desarrollo

$$x'_t = \frac{t\sqrt{1+t^2}}{t(1+t^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$y = \arcsen \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow y'_t = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} = -1$$

593

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -e^{-t} \\ y'_t = 2e^{2t} \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2e^{2t}}{-e^{-t}} = -2e^{3t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y'_x = -2e^{3t}$$

$$594 \quad \begin{cases} x = a(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t - \operatorname{sent}) \\ y = a(\operatorname{sent} + \cos t) \end{cases}$$

Desarrollo

$$x = a(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t - \operatorname{sent})$$

$$x'_t = \frac{a - \cos \frac{t}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} - a \operatorname{sent} - a \cos t \Rightarrow x'_t = a(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \operatorname{sent} - \cos t)$$

$$y = a(\operatorname{sen} t + \cos t), \text{ derivando se tiene: } y'_t = a(\cos t - \operatorname{sent})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a(\cos t - \operatorname{sent})}{a(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \operatorname{sent} - \cos t)}$$

$$595 \quad \text{Calcular } \frac{dy}{dx} \text{ para } t = \frac{\pi}{2}, \text{ si: } \begin{cases} x = a(t - \operatorname{sent}) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sent}) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = a(1 - \cos t) \\ y'_t = a \operatorname{sent} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \operatorname{sent}}{a(1 - \cos t)} = \frac{\operatorname{sent}}{1 - \cos t} \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{1 - \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$596 \quad \text{Hallar } \frac{dy}{dx} \text{ para } t = 1, \text{ si: } \begin{cases} x = t \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases}$$

DesarrolloDiferenciación de Funciones

$$\begin{cases} x = t \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = \ln t + 1 \\ y'_t = \frac{1 - \ln t}{t^2} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1 - \ln t}{t^2}}{\frac{1 + \ln t}{t}} = \frac{1 - \ln t}{t^2(1 + \ln t)}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \frac{1 - \ln(1)}{1(1 + \ln(1))} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$597 \quad \text{Hallar } \frac{dy}{dx} \text{ para } t = \frac{\pi}{4}, \text{ si: } \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \operatorname{sent} \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \operatorname{sent} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = e^t \cos t - e^t \operatorname{sent} \\ y'_t = e^t \operatorname{sent} - e^t \cos t \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t (\operatorname{sent} - \cos t)}{e^t (\cos t - \operatorname{sent})} = \frac{\operatorname{sent} - \cos t}{\cos t - \operatorname{sent}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0} = \infty$$

$$598 \quad \text{Demostrar que la función } y, \text{ dada por las ecuaciones paramétricas } \begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases} \text{ satisfacen a la ecuación: } y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = 2 + 6t \\ y'_t = 2t + 6t^2 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t(1+3t)}{2(1+3t)} = t$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = t^2 + 2t^3 = y$$

- 599 Para $x = 2$ se cumple la igualdad $x^2 = 2x$, ¿se deduce de esto que $(x^2)' = (2x)'$ para $x = 2$.

Desarrollo

Si $(x^2)' = (2x)' \Rightarrow 2x = 2$, para $x = 2$, se tiene que $4 = 2$, es falso. Luego para $x = 2$ se tiene $x^2 = 2x$ no se cumple que $(x^2)' = (2x)'$ para $x = 2$.

- 600 Sea $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Se puede derivar miembro a miembro la desigualdad de $x^2 + y^2 = a^2$.

Desarrollo

$$\text{Como } x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow 2x + 2y' = 0 \text{ de donde } y' = -\frac{x}{y}$$

$$\text{Ahora como } y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ de donde } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Luego se cumple, puesto que es una identidad. Hallar la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones implícitas y.

- 601 $2x - 5y + 10 = 0$

Desarrollo

Diferenciación de Funciones

$$2x - 5y + 10 = 0 \Rightarrow 2 - 5y' = 0 \text{ de donde } y' = \frac{2}{5}$$

602 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Desarrollo

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y'}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{y}{b^2} y' = -\frac{x}{a^2} \Rightarrow y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

603 $x^3 + y^3 = a^3$

Desarrollo

$$x^3 + y^3 = a^3 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' = 0 \Rightarrow y^2 y' = -x^2 \Rightarrow y' = -\frac{x^2}{y^2}$$

604 $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$

Desarrollo

$$3x^2 + 2xy + x^2 y' + 2yy' = 0 \Rightarrow (x^2 + 2y)y' = -(3x^2 + 2xy)$$

$$y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}$$

605 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

Desarrollo

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y'}{\sqrt{y}} = 0$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

606 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$

Desarrollo

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{1}{3}}y' = 0 \Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}y' = 0$$

$$y^{\frac{1}{3}}y' = -x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt[3]{y}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

607 $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$

Desarrollo

$$3y^2y' = \frac{(x+y)(1-y') - (x-y)(1+y')}{(x+y)^2}$$

$$3y^2(x+y)^2y' = x+y - (x+y)y' - (x-y) - (x-y)y'$$

$$3y^2(x+y)^2y' = 2x - 2xy' \Rightarrow (3y(x+y)^2 + 2x)y' = 2y$$

$$y' = \frac{2y}{3y^2(x+y)^2 + 2x} \quad \text{como } y^3 = \frac{x-y}{x+y} \Rightarrow y^3(x+y) = x-y$$

$$\text{Luego } y' = \frac{2y}{3y^2(x+y)(x+y) + 2xy} = \frac{2y^2}{3(x-y)(x+y) + 2xy}$$

$$y' = \frac{2y^2}{3y^3(x+y) + 2xy} = \frac{2y^2}{3(x-y)(x+y) + 2xy}$$

$$y' = \frac{2y^2}{3(x^2 - y^2) + 2xy}$$

608 $y - 0.3 \sin y = x$

Desarrollo

$$y' - 0.3 \cos y \cdot y' = 1 \Rightarrow y'(1 - 0.3 \cos y) = 1$$

$$y' = \frac{1}{1 - 0.3 \cos y} = \frac{1}{1 - \frac{3}{10} \cos y} = \frac{10}{10 - 3 \cos y} \Rightarrow y' = \frac{10}{10 - 3 \cos y}$$

609 $a \cos^2(x+y) = b$

Desarrollo

$$2a \cos(x+y)[- \sin(x+y)(1+y')] = 0, \text{ de donde se tiene:}$$

$$-2a \cos(x+y) \sin(x+y)(1+y') = 0$$

$$-a \sin 2(x+y)(1+y') = 0 \Rightarrow 1+y' = 0 \Rightarrow y' = -1$$

610 $\operatorname{tg} y = xy$

Desarrollo

$$\sec^2 y \cdot y' = y + xy' \Rightarrow (\sec^2 y - x)y' = y$$

$$y' = \frac{y}{\sec^2 y - x} = \frac{y \cos^2 y}{1 - x \cos^2 y}$$

611 $xy = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$

Desarrollo

$$xy' + y = \frac{y - xy'}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \Rightarrow xy' + y = \frac{y - xy'}{x^2 + y^2}$$

$$xy' + \frac{xy'}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} - y \Rightarrow xy' \left(\frac{1 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right) = y \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

$$xy'(1 + x^2 + y^2) = y(1 - x^2 - y^2) \Rightarrow y' = \frac{y}{x} \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

612 $\arctg(x + y) = x$

Desarrollo

$$\frac{1 + y'}{1 + (x + y)^2} = 1 \Rightarrow 1 + y' = 1 + (x + y)^2 \Rightarrow y' = (x + y)^2$$

613 $e^y = x + y$

Desarrollo

$$e^y \cdot y' = 1 + y' \Rightarrow e^y \cdot y' - y' = 1 \Rightarrow y'(e^y - 1) = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{e^y - 1}$$

614 $\ln x + e^{\frac{y}{x}} = c$

Desarrollo

$$\frac{1}{x} + e^{\frac{y}{x}} \left(-\frac{xy' - y}{x^2} \right) = 0 \Rightarrow x + e^{\frac{y}{x}} (-xy' + y) = 0$$

$$e^{\frac{y}{x}} (-xy' + y) = -x \Rightarrow -xy' + y = -xe^{\frac{y}{x}} \Rightarrow xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$$

$$y' = \frac{xe^{\frac{y}{x}} + y}{x} \Rightarrow y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

615 $\ln y + \frac{x}{y} = c$

Desarrollo

$$\frac{y'}{y} + \frac{y - xy'}{y^2} = 0 \Rightarrow yy' + y - xy' = 0 \Rightarrow (y - x)y' + y = 0$$

$$(y - x)y' = -y \Rightarrow y' = -\frac{y}{y - x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x - y}$$

616 $\arctg \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$

Desarrollo

$$\frac{xy' - y}{x^2} = \frac{x + y \cdot y'}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{xy' - y}{x^2 + y^2} = \frac{x + y \cdot y'}{x^2 + y^2} \Rightarrow xy' - y = x + yy'$$

$$xy' - yy' = x + y \Rightarrow (x - y)y' = x + y \Rightarrow y' = \frac{x + y}{x - y}$$

617 $\sqrt{x^2 + y^2} = c \cdot \arctg \frac{y}{x}$

Desarrollo

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c \cdot \frac{xy' - y}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c \cdot \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}$$

$$x + yy' = c \cdot \frac{xy' - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow yy' - \frac{cxy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{cy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x$$

$$y' \left(\frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - cx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = -\left(\frac{cy + x\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$y'(y\sqrt{x^2 + y^2} - cx) = -(cy + x\sqrt{x^2 + y^2}) \Rightarrow y' = \frac{cy + x\sqrt{x^2 + y^2}}{cx - y\sqrt{x^2 + y^2}}$$

618 $x^y = y^x$

Desarrollo

$\ln x^y = \ln y^x$, derivando se tiene:

$$\frac{y}{x} + y' \ln x = \ln y + \frac{xy'}{y} \Rightarrow \frac{y + y'x \ln x}{x} = \frac{y \ln y + xy'}{x}$$

$$\frac{y}{x} + y' \ln x = \ln y + \frac{xy'}{y} \Rightarrow y' \ln x - \frac{x}{y} y' = \ln y - \frac{y}{x}$$

$$y' \left(\frac{y \ln x - x}{y} \right) = \frac{x \ln y - y}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} \left(\frac{x \ln y - y}{y \ln x - x} \right)$$

619 Hallar y' en el punto $M(1,1)$ si: $2y = 1 + xy^3$

Desarrollo

$$2y' = y^3 + 3xy^2 y' \Rightarrow 2y' - 3xy^2 y' = y^3 \Rightarrow (2 - 3xy^2) y' = y^3$$

$$y' = \frac{y^3}{2 - 3xy^2} \Rightarrow y'|_{M(1,1)} = \frac{1}{2-3} = -1 \Rightarrow y'|_{M(1,1)} = -1$$

620 Hallar las derivadas y' de las funciones y , que se dan a continuación en los puntos que se indican:

a) $(x+y)^3 = 27(x-y)$ cuando $x=2$ e $y=1$.

Desarrollo

$$3(x+y)^2(1+y') = 27(1-y') \Rightarrow 3(x+y)^2 + 3(x+y)^2 y' = 27 - 27y'$$

Diferenciación de Funciones

$$(3(x+y)^2 + 27)y' = 27 - 3(x+y)^2 \Rightarrow y' = \frac{27 - 3(x+y)^2}{3(x+y)^2 + 27}$$

$$y'|_{p(2,1)} = \frac{27 - 3(2+1)^2}{3(2+1)^2 + 27} = \frac{27 - 3(9)}{3(9) + 27} = \frac{0}{54} = 0 \Rightarrow y'|_{p(2,1)} = 0$$

b) $ye^y = e^{x+1}$, cuando $x=0$ e $y=1$

Desarrollo

$$y'e^y + ye^y y' = e^{x+1} \Rightarrow y' = \frac{e^{x+1}}{e^y + ye^y}$$

$$y'|_{p(0,1)} = \frac{e}{e+e} = \frac{e}{2e} = \frac{1}{2} \Rightarrow y'|_{p(0,1)} = \frac{1}{2}$$

c) $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$, cuando $x=1$ e $y=1$

Desarrollo

$$2yy' = 1 + \frac{xy' - y}{x} \Rightarrow 2yy' = 1 + \frac{xy' - y}{xy} \Rightarrow 2yy' = 1 + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$$

$$2yy' - \frac{y'}{y} = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow y' \left(\frac{2y^2 - 1}{y} \right) = \frac{x-1}{x} \Rightarrow y' = \frac{y(x-1)}{x(2y^2 - 1)}$$

$$y'|_{p(1,1)} = \frac{1(1-1)}{1(2-1)} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow y'|_{p(1,1)} = 0$$

2.4. APLICACIONES GEOMÉTRICAS MECÁNICAS DE LA DERIVADA.-

a) ECUACIÓN DE LA TANGENTE Y DE LA NORMAL.-

La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ ó $f(x,y) = 0$ en el punto

$M(x_0, y_0)$ es: $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$ donde y'_0 es el valor de la derivada y' en el punto $M(x_0, y_0)$.

La recta perpendicular a la tangente, que pasa por el punto de contacto de esta con la curva recibe el nombre de normal a dicha curva y su ecuación es:

$$x - x_0 + y'_0(y - y_0) = 0$$

b) ANGULO ENTRE CURVAS.-

El ángulo formado en las curvas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ en su punto común $M(x_0, y_0)$ está dada por la fórmula:

$$\operatorname{tg} w = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0) \cdot f'_2(x_0)}$$

c) SEGMENTOS, RELACIONADOS CON LA TANGENTE Y LA NORMAL, PARA EL CASO DE UN SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS.-

La tangente y la normal determinan los cuatro segmentos siguientes (En la figura).

$t = TM$, llamado segmento tangente

$S_t = TK$, sub tangente

$m = NM$, segmento normal

$S_n = KN$, subnormal

Como $K_m = |y_0|$ y $\operatorname{tg} \varphi = y'_0$ se tiene: $t = TM = \left| \frac{y_0}{y'_0} \sqrt{1 + (y'_0)^2} \right|$

$$M = NM = |y_0 \sqrt{1 + (y'_0)^2}|$$

$$S_t = TK \left| \frac{y_0}{y'_0} \right| ; S_n = |y_0 y'_0|$$

d) SEGMENTOS RELACIONADOS CON LA TANGENTE Y LA NORMAL PARA EL CASO DE UN SISTEMA DE COORDENADAS POLARES:

Si la curva está dado en coordenadas polares por la ecuación $r = f(\varphi)$ ángulo μ , formado por la tangente MT y el radio polar $r = OM$ (fi

14) se determina por la fórmula $\operatorname{tg} \mu = r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'}$.

La tangente MT y la normal MN en el punto M , junto con el radio polar del punto de contacto y la perpendicular a dicho radio trazado por el O , determinan los cuatro segmentos siguientes:

$t = MN$, segmento de la tangente polar

$m = MN$, segmento de la normal polar

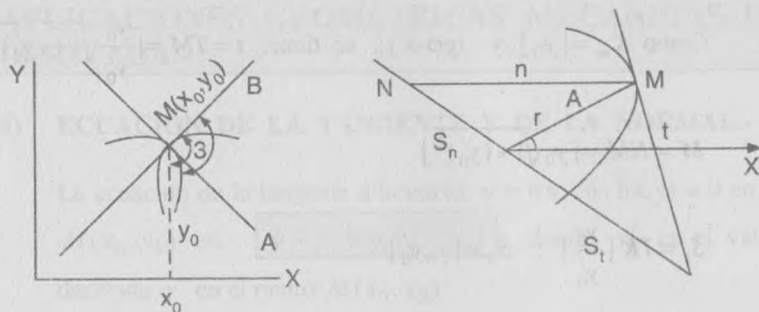
$S_t = OT$, subtangente polar

$S_n = ON$, subnormal polar; do

$$m = MN = \sqrt{r^2 + (r')^2}, S_n = MN = r'$$

$$t = MT = \frac{r}{|r'|} \sqrt{r^2 + (r')^2}$$

$$S_t = OT = \frac{r^2}{|r'|}$$



- 621 ¿Qué ángulos φ forman con el eje OX las tangentes a la curva $y = x - x^2$ en los puntos abscisas son:

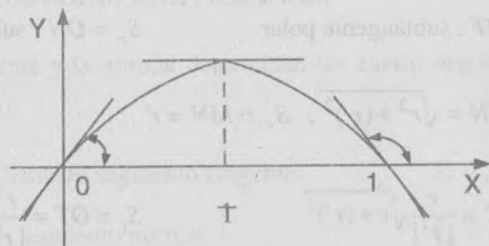
a) $x = 0$, b) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = 1$

Desarrollo

a) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = (1 - 2x) \Big|_{x=0} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$

b) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = (1 - 2x) \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0^\circ$

c) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = (1 - 2x) \Big|_{x=1} = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = -1 \Rightarrow \varphi = 135^\circ$



Diferenciación de Funciones

- 622 ¿Qué ángulos forman con el eje de abscisas, al cortarse con este en el origen las sinusoides $y = \sin x$ e $y = \sin 2x$?

Desarrollo

Sea $y = f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

$y = g(x) = \sin 2x \Rightarrow g'(x) = 2 \cos 2x \Rightarrow g'(0) = 2$

Luego $\operatorname{tg} \varphi = f'(0) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$

$\operatorname{tg} \varphi = g'(0) = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 2 \Rightarrow \varphi = \arctg 2 \Rightarrow \varphi \approx 63^\circ 26'$

- 623 ¿Qué ángulos forma con el eje de abscisas, al cortarse con este en el origen las tangentes a la curva $y = \operatorname{tg} x$?

Desarrollo

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \sec^2 x \Big|_{x=0} = \sec^2 0 = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$

- 624 ¿Qué ángulos forma la curva $y = e^{0.5x}$ con la recta $x = 2$, al cortarse con esta?

Desarrollo

Sea $\operatorname{tg} \varphi = y \Big|_{x=2} = 0.5e^{0.5x} \Big|_{x=2} = 0.5e = \frac{e}{2}$

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{e}{2} \Rightarrow \varphi = \arctg \frac{e}{2} \approx 36^\circ 21'$

- 625 Hallar los puntos en que las tangentes a la curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ sean paralelas al eje de abscisas.

Desarrollo

Sean L_t la recta tangente y L el eje de abscisas

Como $L_t \parallel L \Rightarrow mL_t = mL$; pero $mL_t = 12x^3 + 12x^2 - 24xy \Rightarrow mL = 0$

Como $mL_t = mL_t \Rightarrow 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0$

$$12x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow 12x(x+2)(x-1) = 0.$$

Luego: Para $x_1 = 0, y_1 = 20 \Rightarrow P_1(0, 20)$

Para $x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 4 \Rightarrow P_2(-2, 4)$

Para $x_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 15 \Rightarrow P_3(1, 15)$

- 626 ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + 7y - 3 = 0$?

Desarrollo

Sea $L_t = ?$ y $L: 5x + y - 3 = 0$, tal que $L_t \parallel L$

$$mL_t = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{P(x_0, y_0)} = (2x - 7)|_{P(x_0, y_0)} = 2x_0 - 7$$

$mL = -5$, luego como: $L_t \parallel L \Rightarrow mL_t = mL \Rightarrow 2x_0 - 7 = -5$

como $2x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = 1, y_0 = -3$

Luego $P(1, -3)$ es el punto pedido.

- 627 Hallar la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $x = y$ en el punto $(1, 1)$.

Desarrollo

$$L_t: x = y \Rightarrow mL_t = 1$$

$$mL_t|_{P(1,1)} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{P(1,1)} = (2x + b)|_{x=1} = 2 + b = 1 \Rightarrow b = -1$$

Luego $y = x^2 - x + c$, pero como es tangente en el punto $(1, 1)$ es decir:

$$1 = 1 - 1 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\therefore y = x^2 - x + 1$$

- 628 Determinar el coeficiente angular de la tangente a la curva $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$, en el punto $(1, 2)$.

Desarrollo

Coeficiente angular de la tangente. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,2)}$

Como $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$, entonces:

$$3x^2 + 3y^2 y' - y - xy' = 0 \Rightarrow (3y^2 - x)y' = y - 3x^2$$

$$y' = \frac{y - 3x^2}{3y^2 - x} \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,2)} = \frac{2 - 3}{12 - 1} = -\frac{1}{11}$$

- 629 ¿En qué punto de la curva $y^2 = 2x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$?

Desarrollo

$$\text{Sea } L: 4x - 3y + 2 = 0 \Rightarrow mL = \frac{4}{3}$$

$$\text{Como } y^2 = 2x^3 \Rightarrow 2y \cdot y' = 6x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{y}$$

$$\text{Sea } L_t \text{ la recta tangente } mL_t = y' = \frac{3x^2}{y}$$

$$\text{Como } L_t \perp L \Rightarrow mL_t = -\frac{1}{mL} \Rightarrow \frac{3x^2}{y} = -\frac{1}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{3x^2}{y} = -\frac{3}{4} \Rightarrow y = 4x^2$$

$$\text{Como } y^2 = 2x^3 \Rightarrow (-4x^2)^2 = 2x^3 \Rightarrow 16x^4 = 2x^3$$

$$2x^3(8x-1)=0, \text{ de donde: } x_1=0, x_2=\frac{1}{8}$$

$$\text{Para: } x_1=0, y_1=0 \Rightarrow P_1(0,0)$$

$$x_2=\frac{1}{8}, y_2=-\frac{1}{16} \Rightarrow P_2\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$$

- 630 Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $y = \sqrt{x}$ en el punto cuya abscisa es $x = 4$.

Desarrollo

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow mL_t = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=4} = \frac{1}{4}$$

$$L_t: y - y_0 = mL_t(x - x_0) \text{ como } x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 2$$

$$\text{Luego } L_t: y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow L_t: x - 4y + 4 = 0$$

$$\text{Como } mL_t = \frac{1}{4} \Rightarrow mL_N = -4$$

$$L_N: y - x = -4(x - 4) \Rightarrow L_N: 4x + y - 18 = 0$$

- 631 Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, en el punto $(-2, 5)$.

Desarrollo

Diferenciación de Funciones

$$y' = 3x^2 + 4x - 4 \Rightarrow mL_t = \frac{dy}{dx}\bigg|_{(-2,5)} = 3(-2)^2 + 4(-2) - 4 = 0 \Rightarrow mL_t = 0$$

$$\text{Luego: } L_t: y - y_0 = mL_t(x - x_0)$$

$$L_t: y - 5 = 0(x + 2) \Rightarrow L_t: y - 5 = 0$$

$$\text{Como } mL_t = 0 \Rightarrow mL_N = \infty$$

$$L_N: y - 5 = mL_N(x + 2) \Rightarrow L_N: \frac{y - 5}{x + 2} = \infty \Rightarrow L_N: x + 2 = 0$$

- 632 Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto $(1, 0)$.

Desarrollo

$$y = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x-1}} \text{ como } mL_t = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} = \infty \text{ entonces}$$

$$L_t: y - y_0 = mL_t(x - x_0)$$

$$L_t: y - 0 = \infty(x - 1) \Rightarrow L_t: \frac{y}{x-1} = \infty \Rightarrow L_t: x - 1 = 0$$

- 633 Hallar las ecuaciones de las tangentes y de las normales a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y = \tan 2x$ en el origen de coordenadas.

b) $y = \arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right)$ en el punto de intersección con el eje OX.

c) $y = \arccos 3x$ en el punto de intersección con el eje OY.

d) $y = \ln x$ en el punto de intersección con el eje X.

- e) $y = e^{1-x^2}$ en los puntos de intersección con la recta $y = 1$.

Desarrollo

a) $y = \operatorname{tg} 2x \Rightarrow y' = 2 \sec^2 2x \Rightarrow mL_t = y'|_{x=0} = 2$

$$L_t: y - y_0 = mL_t(x - x_0) \Rightarrow L_t: y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow L_t: 2x - y = 0$$

b) $y = \arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2 + 3}}$

para $y = 0 \Rightarrow \arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow x = 1$

$$mL_t = y'|_{x=1} = \frac{1}{2} \Rightarrow mL_t = \frac{1}{2}$$

$$L_t: y - y_0 = mL_t(x - x_0) \Rightarrow L_t: y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1), \text{ de donde}$$

$$L_t: x - 2y - 1 = 0 \quad y \quad L_N: 2x + y - 2 = 0$$

634. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva.

$$\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t} \end{cases} \text{ en el punto } (2, 2).$$

Desarrollo

Para $x = 2 \Rightarrow t = 1$

$$y = 2 \Rightarrow t = 1$$

Diferenciación de Funciones

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ de donde } \begin{cases} y'_t = \frac{-3-2t}{t^4} \\ x'_t = \frac{-6-t}{2t^3} \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2(3+2t)}{t(6+t)} \Rightarrow y'_x|_{x=2} = \frac{y'_t}{x'_t}|_{t=1} = \frac{10}{7} = mL_t$$

$$L_t: y - y_0 = mL_t(x - x_0) \Rightarrow L_t: y - 2 = \frac{10}{7}(x - 2)$$

$$L_t: 7x - 10y + 6 = 0 \quad y \quad L_N: 7y + 10x - 35 = 0$$

635. Escribir la ecuación de la tangente a la curva $x = t \cos t$, $y = t \sin t$ en el origen de coordenadas y en el punto $t = \frac{\pi}{4}$.

Desarrollo

$$y'_t = \sin t + t \cos t, \quad x'_t = \cos t - t \sin t$$

$$mL_t = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t + t \cos t}{\cos t - t \sin t} \Big|_{t=0} = 0. \text{ reemplazando se tiene:}$$

$$L_t: y - 0 = 0(x - 0) \Rightarrow L_t: y = 0$$

$$mL_t = \frac{\sin t + t \cos t}{\cos t - t \sin t} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{4+\pi}{4-\pi}$$

para $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}, y = \frac{\pi}{8}$ reemplazando se tiene:

$$L_t: y - \frac{\pi}{8} = \frac{4+\pi}{4-\pi} \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$

- 636 Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^3 + y^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ en el punto cuyas ordenadas es $y = 3$.

Desarrollo

Para $y = 3 \Rightarrow x^3 + 2x + 3 = 0$, de donde $x_1 = -1$

Luego el punto de tangencia es $P(-1, 3)$.

Como $mL_t = \frac{dy}{dx}\bigg|_{P(-1,3)}$ entonces: $3x^2 + 2y \cdot y' + 2 = 0 \Rightarrow y' = \frac{2-3x^2}{2y}$

$$mL_t = \frac{dy}{dx}\bigg|_{P(-1,3)} = \frac{-2-3}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$L_t: y - y_0 = mL_t(x - x_0) \Rightarrow L_t: y - 3 = -\frac{5}{6}(x + 1) \text{ de donde se tiene:}$$

$$L_t: 5x + 6y - 13 = 0$$

$$\text{Si } mL_t = -\frac{5}{6} \Rightarrow mL_N = \frac{6}{5}$$

$$\text{Luego: } L_N: y - y_0 = mL_N(x - x_0)$$

$$L_N: y - 3 = \frac{6}{5}(x + 1) \Rightarrow L_N: 6x - 5y + 21 = 0$$

- 63) Escribir la ecuación de la tangente a la curva $x^5 + y^5 - 2xy = 0$, en el punto $(1, 1)$.

Desarrollo

$$\text{Como } x^5 + y^5 - 2xy = 0 \Rightarrow 5x^4 + 5y^4 y' - 2y - 2xy' = 0$$

$$\text{De donde } y' = \frac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}, \text{ además:}$$

Diferenciación de Funciones

$$mL_t = \frac{dy}{dx}\bigg|_{P(1,1)} = \frac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}\bigg|_{P(1,1)} = \frac{2-5}{5-2} = -1$$

$$\text{Luego } L_t: y - y_0 = mL_t(x - x_0)$$

$$L_t: y - 1 = -(x - 1) \Rightarrow L_t: x + y - 2 = 0$$

- 638 Escribir las ecuaciones de las tangentes y de las normales a la curva $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ en sus puntos de intersección con el eje abscisas.

Desarrollo

Hallaremos los puntos de intersección con el eje X es de para $y = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$, de donde: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Luego se tiene los puntos $P_1(1, 0)$, $P_2(2, 0)$, $P_3(3, 0)$.

$$y = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \Rightarrow y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 11 \text{ y además } mL_t = y'|_{x=1} = 2 \Rightarrow mL_t = 2$$

$$L_t: y - y_0 = mL_t(x - x_0)$$

$$L_t: y - 0 = 2(x - 1) \Rightarrow L_t: 2x - y - 2 = 0$$

$$\text{Como } mL_t = 2 \Rightarrow mL_N = -\frac{1}{2} \text{ y } L_N: y - y_0 = mL_N(x - x_0)$$

$$L_N: y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow L_N: x + 2y - 1 = 0$$

en forma similar para los demás puntos.

- 639 Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y^4 = 4x^4 + 6xy$ en el punto (1,2).

Desarrollo

$$y^4 = 4x^4 + 6xy \Rightarrow 4y^3 y' = 16x^3 + 6y + 6xy'$$

$$(4y^3 - 6x)y' = 16x^3 + 6y \Rightarrow y' = \frac{8x^3 + 3y}{2y^3 - 3x}$$

$$mL_t = y'|_{(1,2)} = \frac{8x^3 + 3y}{2y^3 - 3x} \Big|_{(1,2)} = \frac{14}{13} \quad y \quad L_t: y - y_0 = mL_t(x - x_0)$$

$$L_t: y - 2 = \frac{14}{13}(x - 1) \Rightarrow L_t: 14x - 13y + 12 = 0$$

$$\text{Como } mL_t = \frac{14}{13} \Rightarrow mL_N = -\frac{13}{14} \quad y \quad L_N: y - y_0 = mL_N(x - x_0)$$

$$L_N: y - 2 = -\frac{13}{14}(x - 1) \Rightarrow L_N: 13x + 14y - 41 = 0$$

- 640 Demostrar que el segmento de tangente a la hipérbola $xy = a^2$, comprendido entre los ejes de coordenadas, esta dividido en dos partes por el punto de contacto.

Desarrollo

Por demostrar que p es punto medio de A y B para esto hallaremos los puntos A y B, primeramente encontraremos la recta tangente.

$$\text{Como } xy = a^2 \Rightarrow y' = -\frac{a^2}{x^2} \Rightarrow mL_t = y'|_{p(x_0, y_0)} = -\frac{a^2}{x_0^2}$$

$$L_t: y - y_0 = mL_t(x - x_0) \text{ reemplazando se tiene}$$

Diferenciación de Funciones

$$L_t: y - y_0 = -\frac{a^2}{x_0^2}(x - x_0)$$

Hallaremos el punto A para esto $y = 0 \Rightarrow x = 2x_0 \Rightarrow A(2x_0, 0)$

Para $x = 0 \Rightarrow y = 2y_0 \Rightarrow B(0, 2y_0)$

$$p(x_0, y_0) = \frac{A(x, 0) + B(0, y)}{2} = \frac{A(2x_0, 0) + B(0, 2y_0)}{2}$$

$$= \frac{(2x_0 + 0, 0 + 2y_0)}{2} = (x_0, y_0) \Rightarrow p(x_0, y_0) \text{ es punto medio}$$

- 641 Demostrar que el astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ el segmento tangente, comprendido entre los ejes de coordenadas, tiene magnitud constante e igual a: a.

Desarrollo

Por demostrar que $d(A, B) = a$

Para esto hallaremos la recta tangente. Como $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ entonces:

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0 \Rightarrow y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

$$mL_t = y'|_{p(x_0, y_0)} = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}} \quad y \quad L_t: y - y_0 = mL_t(x - x_0)$$

$$L_t: y - y_0 = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x - x_0)$$

Determinaremos el punto A para esto $y = 0$ se tiene:

$$x = x_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}}) = x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow A(x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}, 0)$$

Ahora determinaremos el punto B para esto $x = 0$

$$y = y_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}}) = y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow B(0, y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}})$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}})^2 + (y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}})^2} = \sqrt{x_0^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}}}$$

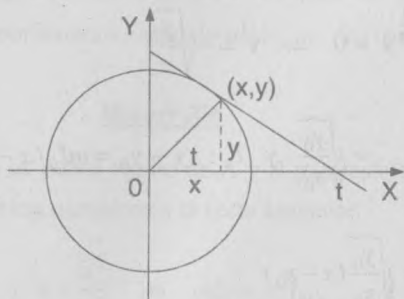
$$= \sqrt{(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})a^{\frac{4}{3}}} = \sqrt{a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{a^2} = a$$

- 642 Demostrar que las normales a la envolvente de la circunferencia $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

Desarrollo

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$y' = -\operatorname{ctg} t \Rightarrow mL_t = -\operatorname{ctg} t \quad \dots (1)$$



Ahora calcularemos la pendiente de las normales a la envolvente de la circunferencia:

Diferenciación de Funciones

$$x = a(\cos t + t \sin t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t$$

$$y = a(\sin t - t \cos t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t$$

$$mL_N = -\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = -\frac{at \cos t}{at \sin t} = -\operatorname{ctg} t. \text{ Luego } \boxed{mL_N = -\operatorname{ctg} t} \quad \dots (2)$$

De (1) y (2) queda demostrado que las normales a:

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

son tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$

- 643 Hallar el ángulo de intersección de las parábolas $y = (x-2)^2$ y $y = -4 + 6x - x^2$.

Desarrollo

Hallaremos los puntos de intersección como:

$$y = (x-2)^2 \text{ e } y = -4 + 6x - x^2, \text{ completando cuadrados}$$

$$(x-2)^2 = -4 + 6x - x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\text{de donde } \begin{cases} x_1 = 1, & y_1 = 1 \\ x_2 = 4, & y_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p_1(1,1) \\ p_2(4,4) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y'_1 = 6 - 2x \\ y'_2 = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y'_1(1) = 4 \\ y'_2(1) = -2 \end{matrix}$$

$$\text{Luego } \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2'(1) - y_1'(1)}{1 + y_1'(1) \cdot y_2'(1)} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{-2-4}{1-8} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{7} \Rightarrow \alpha = \arctg\left(\frac{6}{7}\right) = 40^\circ 36'$$

644 ¿Qué ángulo forma entre si las parábolas $y = x^2$ e $y = x^3$ al cortarse?

Desarrollo

Encontraremos los puntos de intersección como:

$$y = x^2 \text{ e } y = x^3 \Rightarrow x^2 = x^3 \Rightarrow x^2(x-1) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, y_1 = 0 \\ x_2 = 1, y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p_1(0,0) \\ p_2(1,1) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y_1'(x) = 2x \\ y_2'(x) = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'(0) = 0 \\ y_2'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2'(0) - y_1'(0)}{1 + y_1'(0) \cdot y_2'(0)} = \frac{0-0}{1+0} = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ$$

esto quiere decir que son tangentes entre si, ahora para el punto $p_2(1,1)$

$$\begin{cases} y_1'(x) = 2x \\ y_2'(x) = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'(1) = 2 \\ y_2'(1) = 3 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_2'(1) - y_1'(1)}{1 + y_1'(1) \cdot y_2'(1)} = \frac{3-2}{1+6} = \frac{1}{7} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{7} \Rightarrow \beta = \arctg \frac{1}{7} \approx 8^\circ 8'$$

645 Demostrar que las curvas $y = 4x^2 + 2x - 8$ e $y = x^3 - x + 10$ son tangentes entre si en el punto $(3,34)$. Ocurrirá lo mismo en $(-2,4)$?

Desarrollo

Diferenciación de Funciones

Para que sean tangentes entre sí debe ocurrir que $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

$$\text{Como } y_1 = 4x^2 + 2x - 8 \Rightarrow y_1' = 8x + 2 \Rightarrow y_1'|_{x=3} = 26$$

$$y_2 = x^3 - x + 10 \Rightarrow y_2' = 3x^2 - 1 \Rightarrow y_2'|_{x=3} = 27 - 1 = 26$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2'(3) - y_1'(3)}{1 + y_1'(3) \cdot y_2'(3)} = \frac{26-26}{1+26^2} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0$$

Luego son tangentes entre sí. En el punto $(-2,4)$ no son tangentes sí, por que $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$

646 Demostrar que las hipérbolas $xy = a^2$ y $x^2 - y^2 = b^2$ se cortan en formando un ángulo recto.

Desarrollo

Para que las curvas que se cortan forman un ángulo recto sus tangentes ser perpendiculares. Es decir:

Si L'_i y L_i son las rectas tangentes. Luego $L'_i \perp L_i \Rightarrow m_{L'_i} \cdot m_{L_i} = -1$ demostrar

$$\text{Como } xy = a^2 \Rightarrow m_{L'_i} = -\frac{a^2}{x^2} = y'$$

$$x^2 - y^2 = b^2 \Rightarrow m_{L_i} = y' = \frac{x^2}{a^2}$$

$$\text{donde } y' = \frac{x}{y} \text{ pero } xy = a^2 \Rightarrow y = \frac{a^2}{x} \Rightarrow y' = \frac{x}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} = m_{L_i}$$

$$L'_i \cdot m_{L_i} = \left(-\frac{a^2}{x^2}\right) \left(\frac{x^2}{a^2}\right) = -1 \Rightarrow L'_i \perp L_i \Rightarrow \text{forma un ángulo recto.}$$

- 647 Sea la parábola $y^2 = 4x$, calcular la longitud de los segmentos: tangentes, normal, subtangente y subnormal en el punto (1,2).

Desarrollo

$$\text{Longitud de la tangente} = t = \left| \frac{y_0}{y'_0} \sqrt{1 + (y'_0)^2} \right|$$

$$\text{Como } y^2 = 4x \Rightarrow 2yy' = 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{y} \Rightarrow y'|_{(1,2)} = 1$$

$$\text{Reemplazando en la longitud de la tangente se tiene: } t = \left| \frac{2}{1} \sqrt{1+1} \right| = 2\sqrt{2}$$

$$n = \text{longitud de la normal} = |y_0 \sqrt{1 + (y'_0)^2}| \Rightarrow n = |2 \sqrt{1+1}| = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Longitud de la subtangente } S_t = \left| \frac{y_0}{y'_0} \right| \Rightarrow S_t = \left| \frac{2}{1} \right| = 2$$

$$\text{Longitud de la subnormal} = S_n = |y_0 \cdot y'_0| \Rightarrow S_n = |2(1)| = 2$$

- 648 Hallar la longitud del segmento subtangente de la curva $y = 2^x$ en cualquier punto de la misma.

Desarrollo

$$S_t = \text{Subtangente } t = \left| \frac{y_0}{y'_0} \right| \text{ como } y = 2^x \Rightarrow y' = 2^x \ln 2 \Rightarrow y'_0 = 2^{x_0} \ln 2$$

$$S_t = \left| \frac{2^{x_0}}{2^{x_0} \ln 2} \right| = \frac{1}{\ln 2}$$

- 649 Demostrar que la longitud del segmento normal de cualquier punto de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ es igual al radio de dicho punto.

Desarrollo

Diferenciación de Funciones

$$n = \text{longitud de la normal} = |y_0 \sqrt{1 + (y'_0)^2}|$$

$$\text{Como } x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$$

$$n = |y_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2}| = y_0 \cdot \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{y_0} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Luego la longitud del segmento normal es igual al radio polar de dicho punto.

- 650 Demostrar que la longitud del segmento subnormal de la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$, en un punto cualquiera de la misma, es igual a la abscisa de dicho punto.

Desarrollo

$$S_n = \text{longitud de la subnormal} = |y_0 \cdot y'_0|$$

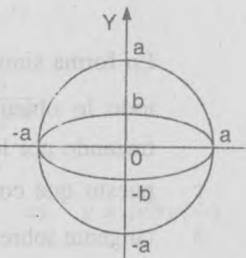
$$\text{Como } x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow y' = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_0 = \frac{x_0}{y_0}$$

$$S_n = |y_0 \left(\frac{x_0}{y_0}\right)| = x_0$$

- 651 Demostrar que los segmentos subtangente de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en los puntos de abscisas iguales, son iguales entre sí. ¿Qué procedimiento de construcción de la tangente a la elipse desprende de lo ante dicho?

Desarrollo

Los puntos de abscisas iguales tanto para la elipse como para la circunferencia son $p_1(a,0)$ y $p_2(-a,0)$. Por lo tanto se tiene que:



- a) de la ecuación de la elipse se tiene: $y_{p_0} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}$

$$\text{además } y'_{p_0} = \frac{-bx_0}{a^2 \sqrt{a^2 - x_0^2}}, \quad p_0(x_0, y_0)$$

- b) De la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ se tiene:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y'_{p_0} = \frac{-x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$$

El segmento subtangente de la elipse es:

$$S_t = \left| \frac{y_{p_0}}{y'_{p_0}} \right| = - \left| \frac{(a^2 - x_0^2)}{ax_0} \right| = \left| \frac{a^2 - x_0^2}{ax_0^2} \right|$$

$$\text{Sea } p_0(x_0, y_0) = p_1(a, 0) \Rightarrow S_t = 0$$

El segmento de la subtangente de la circunferencia

$$S'_t = \left| \frac{y_{p_0}}{y'_{p_0}} \right| = - \left| \frac{(a^2 - x_0^2)}{x_0} \right| = \left| \frac{a^2 - x_0^2}{x_0} \right|$$

$$\text{Sea } p_0(x_0, y_0) = p_1(a, 0) \Rightarrow S'_t = 0$$

En forma similar se hace para $p_2(-a, 0)$, concluyendo que $S_t = S'_t$. De todo lo obtenido se concluye que la tangente a la elipse se obtiene, trazando por los puntos de abscisas iguales una recta paralela al eje Y y puesto que como $S_t = 0$, esto nos indica que no hay proyección de la tangente sobre el eje X; por lo tanto la tangente es vertical.

- 652 Hallar la longitud de los segmentos tangente, normal, subtangente y subnormal a la cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, en un punto cualquiera $t = t_0$

Desarrollo

$$x = a(t - \sin t) \Rightarrow \begin{cases} x'_t = a - \cos t \\ y'_t = a - a \cos t_0 \end{cases}; \quad y = a(1 - \cos t) \Rightarrow \begin{cases} y'_t = a \sin t \\ y'_{t_0} = a \sin t_0 \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_{t_0}}{x'_{t_0}} = \frac{a(1 - \cos t_0)}{a \sin t_0} = \frac{1 - \cos t_0}{\sin t_0}$$

$$t = \left| \frac{y_0}{x_0} \sqrt{1 + (y'_0)^2} \right| = \left| \frac{a(1 - \cos t_0)}{a(t_0 - \sin t_0)} \sqrt{1 + \left(\frac{1 - \cos t_0}{\sin t_0} \right)^2} \right|$$

$$t = \left| \frac{1 - \cos t_0}{t_0 - \sin t_0} \sqrt{2 - 2 \cos t_0} \right| \Rightarrow t = 2 \frac{(1 - \cos t_0)^{3/2}}{t_0 - \sin t_0}$$

- 653 Hallar el ángulo que forman entre sí la tangente a la espiral logarítmica $r = ae^{k\varphi}$ y el radio polar del punto de contacto.

Desarrollo

El ángulo formado entre la tangente y el radio polar está dado por:

$$tgu = r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'} \quad \text{como } r = ae^{k\varphi} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dr}{d\varphi} = ake^{k\varphi} \\ \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{ake^{k\varphi}} \end{cases}$$

$$tgu = r \frac{d\varphi}{dr} = r \left(\frac{1}{ake^{k\varphi}} \right) = \frac{ae^{k\varphi}}{kae^{k\varphi}} = \frac{1}{k} \Rightarrow tgu = \frac{1}{k} \Rightarrow y = \arctg\left(\frac{1}{k}\right)$$

- 654 Hallar el ángulo entre la tangente y el radio polar del punto de contacto para la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Desarrollo

Como $\operatorname{tgu} = r \frac{d\varphi}{dr}$ y como $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ derivando se tiene:

$$2r \frac{dr}{d\varphi} = -2a^2 \sin 2\varphi \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a^2 \sin 2\varphi}{r} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{r}{a^2 \sin 2\varphi}$$

$$\operatorname{tgu} = r \frac{d\varphi}{dr} = r \left(-\frac{r}{a^2 \sin 2\varphi} \right) = -\frac{r^2}{a^2 \sin 2\varphi}$$

$$\operatorname{tgu} = -\frac{a^2 \cos 2\varphi}{a^2 \sin 2\varphi} = -\operatorname{ctg} 2\varphi \Rightarrow \operatorname{tg} u = -\operatorname{ctg} 2\varphi \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} + 2\varphi$$

- 655 Hallar las longitudes de los segmentos polares: tangente, normal, subtangente, subnormal y el ángulo que forma entre sí la tangente y el radio polar del punto de contacto para la espiral de Arquímedes $r = a\varphi$ en el punto de ángulo polar $\varphi = 2\pi$.

Desarrollo

$$\text{Longitud de la tangente} = t = \frac{r}{|r'|} \sqrt{r^2 + (r')^2}$$

Como $r = a\varphi \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = a$ reemplazando se tiene:

$$t = \frac{a\varphi}{a} \sqrt{a^2 \varphi^2 + a^2} = \varphi a \sqrt{\varphi^2 + 1} \Rightarrow t = 2\pi a \sqrt{4\pi^2 + 1} \text{ para } \varphi = 2\pi$$

$$\text{Longitud de subtangentes } S_t = \left| \frac{r^2}{r'} \right|$$

$$S_t = \frac{r^2}{|r'|} = \frac{a^2 \varphi^2}{a} = a\varphi^2 \text{ para } \varphi = 2\pi \text{ reemplazando se tiene: } S_t = 4a\pi^2$$

$$\text{Longitud de la normal} = n = \sqrt{r^2 + (r')^2} \Rightarrow n = \sqrt{a^2 \varphi^2 + a^2} = a\sqrt{4\pi^2 + 1}$$

Longitud de la subnormal $S_n = |r'|$ de donde $S_n = a$ para $r' = a$

$$\operatorname{tgu} = r \frac{d\varphi}{dr} \text{ pero } r = a\varphi \text{ y } \frac{dr}{d\varphi} = a \Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{a}$$

$$\text{reemplazando se tiene: } \operatorname{tgu} = (a\varphi) \left(\frac{1}{a} \right) = \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} u = \varphi ; \operatorname{tg} u = 2\pi$$

- 656 Hallar las longitudes de los segmentos polares, subtangentes, subnormal, tangente y normal; y el ángulo que forman entre sí la tangente y el radio po

para la espiral hiperbólica $r = \frac{a}{\varphi}$ en un punto arbitrario $\varphi = \varphi_0$; $r = r_0$.

Desarrollo

$$r = \frac{a}{\varphi} \Rightarrow r' = -\frac{a}{\varphi^2} \Rightarrow r'_0 = -\frac{a}{\varphi_0^2}$$

Como $r = \frac{a}{\varphi}$ para $\varphi = \varphi_0$ se tiene $r_0 = \frac{a}{\varphi_0}$

$$S_t = \frac{r^2}{r'} = \frac{\frac{a^2}{\varphi_0^2}}{-\frac{a}{\varphi_0^2}} = -a \Rightarrow S_t = a \Rightarrow S_n = |r'| = \frac{a}{\varphi_0^2}$$

$$\begin{cases} t = \frac{r}{|r'|} \sqrt{r^2 + (r')^2} \\ n = \sqrt{r^2 + (r')^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{a\sqrt{1+\varphi_0^2}}{\varphi_0} \\ n = \frac{a\sqrt{1+\varphi_0^2}}{\varphi_0^2} \end{cases}$$

$$\text{además } \operatorname{tg} \theta = \frac{r}{r'} = -\varphi_0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = -\varphi_0 \text{ de donde } \theta = \operatorname{arctg}(-\varphi_0)$$

- 657 La ley del movimiento de un punto sobre el eje OX es $x = 3t - t^3$. Hallar la velocidad del movimiento de dicho punto para los instantes $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ y $t_2 = 2$ (x se da en centímetros y, t en segundos).

Desarrollo

$$V(x) = \frac{dx}{dt} = 3 - 3t^2$$

$$V(t_0) = V(0) = 3 \frac{\text{cm}}{\text{seg}} \quad ; \quad V(t_1) = V(1) = 3 - 3 = 0$$

$$V(t_2) = V(2) = 3 - 3(4) = -9 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$

- 658 Por el eje OX se mueve dos puntos que tienen respectivamente las leyes del movimiento $x = 100 + 5t$ y $x = \frac{t^2}{2}$ donde $t \geq 0$. ¿Con qué velocidad se alejarán estos puntos, el uno del otro, en el momento de su encuentro (x se da en centímetros y t en segundos)?

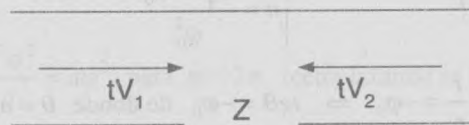
Desarrollo

Para el tiempo del encuentro se tiene que $V_1 = V_2$

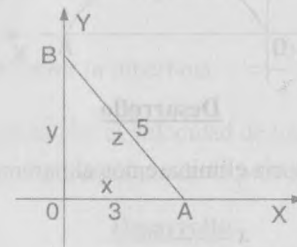
$$\text{Donde: } V_1 = \frac{dx}{dt} = 5 \Rightarrow V_2 = \frac{dx}{dt} = t, \text{ de donde } t = 5 \text{ seg.}$$

$$Z = tV_1 + tV_2 = 5t + t^2$$

$$\text{velocidad con que se aleja} = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=5} = (5 + 2t)|_{t=5} = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=5} = 5 + 10 = 15 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$



- 659 Los extremos de un segmento $AB = 5$ m. Se deslizan por las rectas perpendiculares entre sí OX y OY (ver figura). La velocidad de desplazamiento del extremo A es igual a 2 cm/seg. ¿Cuál será la velocidad de desplazamiento del extremo B en el instante en que el extremo A se encuentre a una distancia $OA = 3$ m del origen de coordenadas.



Desarrollo

Por pitágoras en el $\triangle OBA$ se tiene:

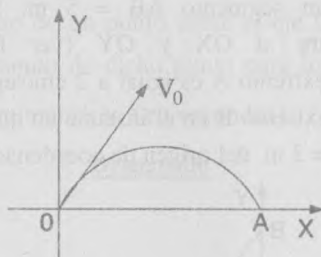
$$z^2 = x^2 + y^2, \text{ de donde para } x = 3, z = 5, \text{ entonces } y = 4.$$

Como $z^2 = x^2 + y^2$, derivando se tiene:

$$2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \Rightarrow y \frac{dy}{dt} = -x \frac{dx}{dt} \Rightarrow 4 \frac{dy}{dt} = -3(2)$$

$$\text{por lo tanto } \frac{dy}{dt} = -\frac{3 \text{ cm}}{2 \text{ seg}}$$

- 660 La ley del movimiento de un punto material, lanzado en el plano vertical OY (ver figura), formando un ángulo α respecto al horizonte, con una velocidad inicial V_0 viene dada por las formulas (sin tomar en consideración la resistencia del aire). $x = V_0 t \cos \alpha$, $y = V_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2}$, donde t es el tiempo y la aceleración de la fuerza de gravedad. Hallar la trayectoria del movimiento y su alcance, determinar también la magnitud de la velocidad del movimiento en su dirección.

**Desarrollo**

Para calcular la trayectoria eliminaremos el parámetro t de las ecuaciones.

$$x = V_0 t \cos \alpha \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$$

$$y = V_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 \Rightarrow y = V_0 \sin \alpha \left(\frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right) - \frac{g}{2} \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$y = (tg \alpha)x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

Su alcance es el punto A y para esto se tiene $y = 0$:

$$(tg \alpha)x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 = 0 \Rightarrow \frac{(2V_0^2 \cos^2 \alpha tg \alpha)x - gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} = 0$$

$$2V_0^2 \cos^2 \alpha tg \alpha - gx = 0 \Rightarrow 2V_0^2 \cos \alpha \sin \alpha - gx = 0$$

$$V_0^2 \sin 2\alpha - gx = 0 \Rightarrow x = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Ahora veremos las proyecciones de las velocidades sobre los ejes, es decir $\frac{dx}{dt}$

y $\frac{dy}{dt}$, de donde: $\frac{dx}{dt} = V_0 \cos \alpha$, $\frac{dy}{dt} = V_0 \sin \alpha - gt$

Diferenciación de Funciones

Calcularemos la magnitud de la velocidad, es decir:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{V_0^2 \cos^2 \alpha + V_0^2 \sin^2 \alpha + y^2 t^2 - 2V_0 \sin \alpha} \\ &= \sqrt{V_0^2 + g^2 t^2 - 2V_0 \sin \alpha} \end{aligned}$$

- 661 Un punto se mueve sobre la hipérbola $y = \frac{10}{x}$ de tal modo, que su abscisa aumenta uniformemente con la velocidad de una unidad por segundo. ¿Con qué velocidad variará su ordenada, cuando el punto pase por la posición (5,2)?

Desarrollo

Por dato se tiene $\frac{dx}{dt} = 1$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{10}{x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right) \text{ para } x = 5, \text{ se tiene: } \frac{dy}{dt} = -\frac{10}{25} (1) = -\frac{2}{5} = -0.4$$

Luego decrece a una velocidad de 0.4 por segundo.

- 662 ¿En qué punto de la parábola $y^2 = 18x$ la ordenada decrece dos veces más rápido que la abscisa?

Desarrollo

Debe cumplirse que: $\frac{dy}{dt} = 2 \frac{dx}{dt}$ de donde $y = 3\sqrt{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{3}{\sqrt{2x}} \frac{dx}{dt}$

$$\text{Como } \frac{dy}{dt} = 2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{2x}} \frac{dx}{dt} = 2 \frac{dx}{dt}$$

$$3 = 3\sqrt{2x} \Rightarrow 9 = 8x \Rightarrow x = \frac{9}{8} \text{ entonces } y = \frac{9}{2}$$

el punto que cumple las condiciones del problema es: $\left(\frac{9}{8}, \frac{9}{2}\right)$

- 663 Uno de los lados de un rectángulo tiene una magnitud constante $a = 10$ cm mientras que el otro b , es variable y aumenta a la velocidad constante de 4 cm/seg. ¿A qué velocidad crecerán la diagonal del rectángulo y su área en el instante en que $b = 30$ cm?

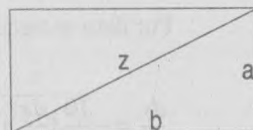
Desarrollo

Z = diagonal del rectángulo

$$Z = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow z = \sqrt{100 + b^2}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{b}{\sqrt{100 + b^2}} \frac{db}{dt} \Rightarrow \frac{dZ}{dt} = \frac{30}{\sqrt{100 + 900}} (4) = \frac{120}{10\sqrt{10}}$$

de donde se tiene: $\frac{dZ}{dt} = \frac{12}{\sqrt{10}} \approx 3.8 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$



la diagonal crece a una velocidad de 3.8 cm/seg.

$$A = ab \Rightarrow \frac{dA}{dt} = a \frac{db}{dt} = 10(4) = 40 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 40 \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}}$$

El área crece a una velocidad de $40 \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}}$

- 664 El radio de una esfera crece uniformemente con una velocidad de 5 cm/seg. ¿A qué velocidad crecerán el área de la superficie de la esfera y el volumen de la misma, cuando el radio sea igual a 50 cm?

Desarrollo

$$\text{Área de la esfera} = A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\pi(5)(50) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2000\pi \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}}$$

Diferenciación de Funciones

Volumen de la esfera $= V = \frac{4}{3}\pi r^3$, derivando se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi(50)^2(5) = 6000\pi \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$$

- 665 Un punto se mueve sobre la espiral de Arquímedes $r = a\phi$ ($a = 10$ cm) modo que la velocidad angular de rotación de su radio polar es constante igual a 6° por segundo. Determinar la velocidad con que se alarga el radio polar r en el instante que $r = 25$ cm.

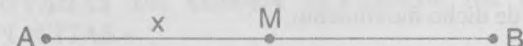
Desarrollo

$$\frac{dr}{dt} = a \frac{d\phi}{dt} \text{ donde } \frac{d\phi}{dt} = \frac{6^\circ}{\text{seg}} = \frac{\pi}{30} / \text{seg}$$

$$\frac{dr}{dt} = 10 \left(\frac{\pi}{30} \right) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{\pi}{3} \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$

- 666 Una barra heterogénea AB tiene 12 cm de longitud. La masa de la parte de la misma crece proporcionalmente al cuadrado de la distancia del punto móvil respecto al extremo A y es igual a 10 g, cuando $AM = 2$ cm. Hallar la masa de toda la barra AB y la densidad lineal en cualquier punto M de la misma. ¿A qué es igual la densidad lineal de la barra en los puntos A y B?

Desarrollo



Condición del problema $m = kx^2$, donde m es la masa y k el factor de proporcionalidad.

$$\text{Cuando } AM = x = 2 \text{ cm, } m = 10 \text{ gr. De donde } 10 = k(2)^2 \Rightarrow k = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Luego } m(x) = kx^2 \Rightarrow m(x) = \frac{5}{2}x^2$$

La masa de la barra AB es cuando $x = 12$ y $m = 360$ gr. y la densidad en cualquier punto de M es: $\frac{dm}{dx} = 5x \frac{\text{gr}}{\text{cm}}$

Ahora veremos la densidad en los puntos A y B

$$\text{para el punto A: } x = 0 \Rightarrow \frac{dm}{dx} = 0$$

$$\text{para el punto B: } x = 12 \Rightarrow \frac{dm}{dx} = 60 \frac{\text{gr}}{\text{cm}}$$

2.5. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.-

PRIMERO: DEFINICION DE LAS DERIVADAS DE ORDENES SUPERIORES.-

A la derivada de la derivada se llama derivada de segundo orden o derivada segunda de una función. $y = f(x)$, es decir $y'' = (y')'$

La derivada segundo se designa así: y'' o $\frac{d^2y}{dx^2}$, o $f''(x)$

Si $x = f(t)$ es la ley del movimiento rectilíneo de un punto $\frac{d^2x}{dt^2}$ es la aceleración de dicho movimiento.

En general, la derivada de orden enésimo de la función $y = f(x)$ es la derivada de la derivada de orden $(n-1)$, la derivada enésima se designa por:

$$y^{(n)}, \text{ o } \frac{d^ny}{dx^n}, f^{(n)}(x)$$

SEGUNDO: FÓRMULA DE LEIBNIZ.-

Si las funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$ tienen derivadas hasta de orden enésimo inclusive, para calcular la enésima derivada del producto de estas funciones pueden emplear la fórmula de Leibniz:

$$(uv)^n = u^n v' + nu^{n-1} v'' + \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} u^{n-2} v''' + \dots + u^{(n)}$$

TERCERO: DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR DE FUNCIONES DADAS EN FORMA PARAMÉTRICA.-

Si $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ sus derivadas

$y'_x = \frac{dy}{dx}$, $y''_x = \frac{d^2y}{dx^2}$, ..., puede calcularse sucesivamente por las fórmulas

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, y''_{xx} = (y'_x)' = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \text{ etc.}$$

Para la derivada de segundo orden se cumple la fórmula:

$$y''_x = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}$$

a) DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR DE LAS FUNCIONES EXPLICITAS.-

Hallar las derivadas de segundo orden de las funciones siguientes:

$$667 \quad y = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$$

Desarrollo

$y = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$, derivando se tiene:

$$y' = 8x^7 + 42x^5 - 5 \Rightarrow y'' = 56x^6 + 210x^4$$

668

$$y = e^{x^2}$$

Desarrollo

$$y = e^{x^2} \Rightarrow y' = 2xe^{x^2}$$

$$y'' = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} \Rightarrow y'' = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$$

669

$$y = \sin^2 x$$

Desarrollo

$y = \sin^2 x$, derivando se tiene:

$$y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow y'' = 2\cos 2x$$

670

$$y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$$

Desarrollo

$$y = \ln \sqrt[3]{1+x^2} = \ln(1+x^2)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \ln(1+x^2)$$

$$y' = \frac{2x}{3(1+x^2)} \Rightarrow y'' = \frac{2}{3} \left(\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \right) \Rightarrow y'' = \frac{2(1-x^2)}{3(1+x^2)^2}$$

671

$$y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

Desarrollo

$$y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}), \text{ derivando se tiene:}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow y'' = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}$$

672

$$f(x) = (1+x^2)\arctg x$$

Desarrollo

$$f(x) = (1+x^2)\arctg x \Rightarrow f'(x) = 2x\arctg x + \frac{1+x^2}{1+x^2}$$

$$f'(x) = 2x\arctg x + 1 \Rightarrow f''(x) = 2\arctg x + \frac{2x}{1+x^2}$$

673

$$y = (\arcsen x)^2$$

Desarrollo

$$y = (\arcsen x)^2 \Rightarrow y' = 2\arcsen x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$y' = \frac{2\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y'' = \frac{2 + \frac{2x\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2\sqrt{1-x^2} + 2a\arcsen x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

674

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

Desarrollo

$y = a \cosh \frac{x}{a}$, derivando se tiene:

$$y' = \sinh \frac{x}{a} \Rightarrow y'' = \frac{1}{a} \cosh \left(\frac{x}{a} \right)$$

675

Demostrar que la función $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2}$ satisface a la ecuación diferen

$$1 + y'^2 = 2yy''$$

Desarrollo

$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2} \Rightarrow y' = x + 1 \Rightarrow y'' = 1$$

$$y + y'^2 = 1 + (x+1)^2 = (x^2 + 2x + 2) = 2y' y'' \quad \therefore 1 + y'^2 = 2y' y''$$

- 676 Demostrar que la función $y = \frac{x^2}{2} e^x$ satisface a la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = e^x$.

Desarrollo

$$y = \frac{x^2}{2} e^x \Rightarrow y' = x e^x + \frac{x^2}{2} e^x$$

$$y'' = e^x + x e^x + x e^x + \frac{x^2}{2} e^x \Rightarrow y'' = e^x + 2x e^x + \frac{x^2}{2} e^x$$

$$y'' - 2y' + y = e^x + 2x e^x + \frac{x^2}{2} e^x - 2x e^x - x^2 e^x + \frac{x^2}{2} e^x = e^x$$

$$\therefore y'' - 2y' + y = e^x$$

- 677 Demostrar que la función $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$ para cualquier valor de las constantes c_1 y c_2 satisface a la ecuación $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Desarrollo

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \Rightarrow y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} \Rightarrow y'' = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{-2x}$$

$$y'' + 3y' + 2y = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{-2x} - 3c_1 e^{-x} - 6c_2 e^{-2x} + 2c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{-2x}$$

$$= 3c_1 e^{-x} - 3c_1 e^{-x} + 6c_2 e^{-2x} - 6c_2 e^{-2x} = 0 + 0$$

$$\therefore y'' + 3y' + 2y = 0$$

Diferenciación de Funciones

- 678 Demostrar que la función $y = e^{2x} \sin 5x$, satisface la ecuación $y'' - 4y' + 29y = 0$.

Desarrollo

$$y = e^{2x} \sin 5x \Rightarrow y' = 2e^{2x} \sin 5x + 5e^{2x} \cos 5x$$

$$y'' = 4e^{2x} \sin 5x + 10e^{2x} \cos 5x + 10e^{2x} \cos 5x - 25e^{2x} \sin 5x$$

$$y'' = 20e^{2x} \cos 5x - 21e^{2x} \sin 5x$$

$$y'' - 4y' + 29y = 20e^{2x} \cos 5x - 21e^{2x} \sin 5x - 8e^{2x} \sin 5x - 20e^{2x} \cos 5x + 20e^{2x} \sin 5x$$

$$y'' - 4y' + 29y = 20e^{2x} \cos 5x - 20e^{2x} \cos 5x - 29e^{2x} \sin 5x + 29e^{2x} \sin 5x = 0$$

$$\therefore y'' - 4y' + 29y = 0$$

- 679 Hallar y''' , si $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$

Desarrollo

$$y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 10x + 7$$

$$y'' = 6x - 10 \Rightarrow y''' = 6$$

- 680 Hallar $f'''(3)$ si $f(x) = (2x - 3)^5$

Desarrollo

$$f(x) = (2x - 3)^5 \Rightarrow f'(x) = 5(2x - 3)^4 (2)$$

$$f''(x) = 80(2x - 3)^3 \Rightarrow f'''(x) = 480(2x - 3)^2$$

$$f'''(3) = 480(6 - 3)^2 = 480(4) \Rightarrow f'''(3) = 4320$$

- 681 Hallar
- y^v
- para la función
- $y = \ln(1+x)$

Desarrollo

$$y = \ln(1+x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y^{iv} = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow y^v = \frac{24}{(1+x)^5}$$

- 682 Hallar
- y^v
- para la función
- $y = \sin 2x$

Desarrollo

$$y = \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} y' = 2 \cos 2x & y'' = -4 \sin 2x \\ y''' = -8 \cos 2x & y^{iv} = 16 \sin 2x \\ y^v = 32 \cos 2x & y^v = -64 \sin 2x \end{cases}$$

- 683 Demostrar que la función
- $y = e^{-x} \cos x$
- , satisface a la ecuación diferencial
- $y^{iv} + 4y = 0$
- .

Desarrollo

$$y = e^{-x} \cos x \Rightarrow y' = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$$

$$y'' = e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x + e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x \Rightarrow y'' = 2e^{-x} \sin x$$

$$y''' = -2e^{-x} \sin x + 2e^{-x} \cos x$$

$$y^{iv} = -(-2e^{-x} \sin x + 2e^{-x} \cos x) - 2e^{-x} \cos x - 2e^{-x} \sin x$$

$$y^{iv} = 2e^{-x} \sin x - 2e^{-x} \cos x - 2e^{-x} \cos x - 2e^{-x} \sin x \Rightarrow y^{iv} = -4e^{-x} \cos x$$

$$y^{iv} + 4y = -4e^{-x} \cos x + 4e^{-x} \cos x = 0 \Rightarrow y^{iv} + 4y = 0$$

Diferenciación de Funciones

- 684 Hallar
- $f(0)$
- ,
- $f'(0)$
- ,
- $f''(0)$
- ,
- $f'''(0)$
- , si
- $f(x) = e^x \sin x$

Desarrollo

$$f(x) = e^x \sin x \Rightarrow f(0) = e^0(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x$$

$$f''(x) = 2e^x \cos x \Rightarrow f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x \Rightarrow f'''(0) = 2$$

- 685 La ecuación del movimiento de un punto sobre el eje OX
- $\ddot{x} = 100 + 5t - 0.001t^3$
- . Hallar la velocidad y la aceleración de dicho punto los instantes
- $t_0 = 0$
- ,
- $t_1 = 1$
- ,
- $t_2 = 10$
- .

Desarrollo

$$V(t_0) = \frac{dx}{dt} = 5 - 0.003t^2 \Rightarrow V(t_0) = V(0) = 5$$

$$V(t_1) = V(1) = 5 - 0.003 = 4.997$$

$$V(t_2) = V(10) = 5 - (0.003)(10)^2 = 5 - 0.3 = 4.7$$

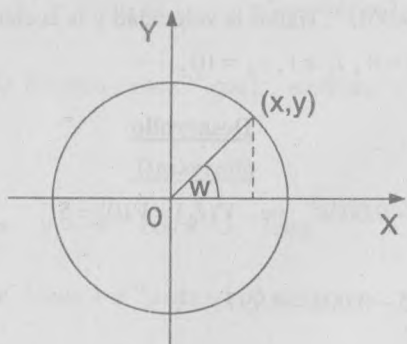
$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -0.006t \Rightarrow a(t_0) = a(0) = 0$$

$$a(t_1) = a(1) = -0.006 \Rightarrow a(t_2) = a(10) = -0.006(10) = -0.06$$

- 686 Por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ se mueve un punto M con una velocidad angular constante W. Hallar la ley del movimiento de su proyección M_1 sobre el eje OX, si en el momento $t = 0$, el punto ocupa la posición $M_0(a, 0)$ (según figura). Hallar la velocidad y la aceleración del movimiento del punto M_1 .
 ¿A que es igual la velocidad y la aceleración del punto M_1 en el momento inicial, y en el momento en que pasa por el origen de coordenadas?
 ¿Cuáles son los valores absolutos máximos de la velocidad y de la aceleración del punto M_1 ?

Desarrollo

En el $\triangle OM_1M$ se tiene $\cos(wt) = \frac{x}{a}$, de donde $x = a \cos wt$, $V = \frac{dx}{dt} = -aw$ es la velocidad en el momento t.



$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -aw^2 \cos wt$ es la aceleración en el momento t.

$V|_{t=0} = 0$, velocidad inicial

$a|_{t=0} = -aw^2$, la aceleración inicial.

- 687 Hallar la derivada de orden n-esimo de la función $y = (ax + b)^n$, donde n es numero entero.

Desarrollo

$$y = (ax + b)^n \Rightarrow y' = na(ax + b)^{n-1}$$

$$y'' = (n-1)na^2(ax + b)^{n-2}$$

$$y''' = (n-2)(n-1)na^3(ax + b)^{n-3}$$

$$y^{(n)} = 1.2.3....(n-2)(n-1)na^n(ax + b)^0 \Rightarrow y^{(n)} = n!a^n$$

- 688 Hallar las derivadas de orden n-esimo de las funciones:

a) $y = \frac{1}{1-x}$

b) $y = \sqrt{x}$

Desarrollo

a) $y = \frac{1}{1-x} \Rightarrow y' = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$y''' = \frac{2.3}{(1-x)^4}$$

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n-1}}$$

689 Hallar la derivada n-esima de las funciones:

a) $y = \sin x$

b) $y = \cos 2x$

c) $y = e^{-3x}$

d) $y = \ln(1+x)$

e) $y = \frac{1}{1+x}$

f) $y = \frac{1+x}{1-x}$

g) $y = \sin^2 x$

h) $y = \ln(ax+b)$

Desarrollo

a) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + \pi)$$

$$y''' = -\cos x = \sin(x + \frac{3\pi}{2})$$

$$y^{iv} = \sin x = \sin(x + \frac{4\pi}{2})$$

...

$$y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

b) $y = \cos 2x \Rightarrow y' = -2\sin 2x = 2\cos(2x + \frac{\pi}{2})$

$$y'' = -2^2 \cos 2x = 2^2 (\cos(2x + 2(\frac{\pi}{2})))$$

$$y''' = 2^3 \sin 2x = 2^3 \cos(2x + \frac{3\pi}{2})$$

...

$$y^{(n)} = 2^n \cos(2x + \frac{n\pi}{2})$$

en forma similar para los demás casos.

Diferenciación de Funciones

690 Empleando la formula de Leibniz. Hallar $y^{(n)}$ si:

a) $y = xe^x$

b) $y = x^2 e^{-2x}$

c) $y = (1-x^2) \cos x$

d) $y = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$

e) $y = x^3 \ln x$

Desarrollo

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}$$

a) $y^{(n)} = (e^x x)^{(n)} = (e^x)^{(n)} x + n(e^x)^{(n-1)}(x)' \Rightarrow y^{(n)} = xe^x + ne^x$

b) $y^{(n)} = (e^{-2x} x^2)^{(n)} = (e^{-2x})^{(n)} x^2 + n(e^{-2x})^{(n-1)} 2x + \frac{n(n-1)}{1.2} (e^{-2x})^{(n-2)} 2$

$$y^{(n)} = (e^{-2x} x^2)^{(n)} = (-1)^n 2^n e^{-2x} x^2 + (-1)^n n 2^n e^{-2x} x + (-1)^n n(n-1) 2^{n-2} e^{-2x}$$

$$= 2^{n-1} e^{-2x} [2(-1)^n x^2 + 2x(-1)^n + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^n]$$

En forma similar para los demás ejercicios.

691 Hallar $f^{(n)}(0)$, si $f(x) = \ln(\frac{1}{1-x})$

Desarrollo

$$f(x) = \ln(\frac{1}{1-x}) \Rightarrow f(x) = -\ln(1-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

Luego $f^{(n)}(0) = (n-1)!$

b) **DERIVADAS DE ORDENES SUPERIORES, DE FUNCIONES DADAS EN FORMA PARAMETRICA Y DE FUNCIONES IMPLICITAS.-**

692 Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ para las funciones siguientes:

a) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \operatorname{arcsen} t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

Desarrollo

a) $\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = \frac{1}{t} \\ y'_t = 3t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''_{tt} = -\frac{1}{t^2} \\ y''_{tt} = 6t \end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{\frac{1}{t} \cdot 6t - (-\frac{1}{t^2}) \cdot 3t^2}{(\frac{1}{t})^3} = t^3(6+3) = 9t^2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 9t^3$$

b) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = \frac{1}{1+t^2} \\ y'_t = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''_{tt} = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \\ y''_{tt} = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} \end{cases}$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{\frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} - (-\frac{2t}{(1+t^2)^2}) \cdot (\frac{2t}{1+t^2})}{(\frac{1}{1+t^2})^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^3} + \frac{4t^2}{(1+t^2)^3}}{\frac{1}{(1+t^2)^3}} = 2-2t^2+4t^2 = 2t^2+2$$

en forma similar para la c).

693 a) $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = a(\operatorname{sen} t - t \cos t) \\ y = a(\cos t + t \operatorname{sen} t) \end{cases}$

Desarrollo

$$a) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -a \sin t \\ y'_t = a \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''_t = -a \cos t \\ y''_t = -a \sin t \end{cases}$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{-a \sin t (-a \sin t) - (-a \cos t) a \cos t}{(-a \sin t)^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}{-a^3 \sin^3 t} = -\frac{1}{a \sin^3 t}$$

$$b) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -3a \cos^2 t \sin t \\ y'_t = 3a \sin^2 t \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''_t = 6a \cos t \sin^2 t - 2a \cos^3 t \\ y''_t = 6a \sin t \cos^2 t - 3a \sin^3 t \end{cases}$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{-3a \cos^2 t \sin t (6a \sin t \cos^2 t - 3a \sin^3 t)}{(-3a \cos^2 t \sin t)^3}$$

$$\frac{3a \sin^2 t \cos t (6a \cos t \sin^2 t - 3a \cos^3 t)}{(-3a \cos^2 t \sin t)^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{-18a^2 \sin^2 t \cos^4 t + 9a^2 \cos^2 t \sin^4 t}{-27a^3 \cos^6 t \sin^3 t}$$

$$\frac{18a^2 \sin^4 t \cos^2 t - 9a^2 \sin^2 t \cos^4 t}{-27a^3 \cos^6 t \sin^3 t}$$

$$y''_{xx} = \frac{-9a^2 \sin^2 t \cos^4 t - 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t}{-27a^3 \cos^6 t \sin^3 t}$$

$$y''_{xx} = \frac{-9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)}{-27a^3 \cos^6 t \sin^3 t} = \frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}$$

$$c) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = a - a \cos t \\ y'_t = a \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''_t = a \sin t \\ y''_t = a \cos t \end{cases}$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{(a - a \cos t) a \cos t - a \sin t \cdot a \sin t}{(a(1 - \cos t))^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{a^2 \cos t - a^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t}{a^3 (1 - \cos t)^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{a^2 \cos t - a^2}{a^3 (1 - \cos t)^3} = \frac{(1 - \cos t)}{a(1 - \cos t)^3} = \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2}$$

$$y''_{xx} = \frac{-1}{a(\sin^2 \frac{t}{2})^2} = \frac{-1}{a \sin^4 \frac{t}{2}}$$

En forma similar para el siguiente ejercicio:

$$d) y''_{xx} = -\frac{1}{at \sin^3 t}$$

694

$$a) \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = e^{-at} \\ y = e^{at} \end{cases}$$

Desarrollo

$$a) \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -2 \sin 2t \\ y'_t = \sin 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''_t = -4 \cos 2t \\ y''_t = 2 \cos 2t \end{cases}$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{(-2 \sin 2t) \cdot 2 \cos 2t - (-4 \cos 2t) \cdot \sin 2t}{(-2 \sin 2t)^3} = 0$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = e^{-at} \\ y = e^{at} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -ae^{-at} \\ y'_t = ae^{at} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''_t = a^2 e^{-at} \\ y''_t = a^2 e^{at} \end{cases}$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{(-ae^{-at})a^2 e^{at} - a^2 e^{-at} \cdot ae^{at}}{(-ae^{-at})^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{-a^3 - a^3}{a^3 e^{-3at}} = -\frac{2}{e^{-3at}} \Rightarrow y''_{xx} = \frac{2}{e^{-3at}}$$

695

$$\text{a) } \begin{cases} x = \arctg t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{1-t} \end{cases}$$

Desarrollo

$$\text{a) } \begin{cases} x = \arctg t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \arctg t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \\ y'_t = 1 \end{cases}$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{\frac{1}{1+t^2} + \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^3} = \frac{1+t^2+2t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{1+3t^2}{(1+t^2)^3}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{1-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = \frac{1}{t} \\ y'_t = \frac{1}{(1-t)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''_t = -\frac{1}{t^2} \\ y''_t = \frac{2}{(1-t)^3} \end{cases}$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{\frac{1}{t} \cdot \frac{2}{(1-t)^3} - \left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-t}\right)^2}{\left(\frac{1}{t}\right)^3} = \frac{\frac{2t + (1-t)}{t^2(1-t)^3}}{\frac{1}{t^3}} = \frac{t(1+t)}{(1-t)^3}$$

$$696 \quad \text{Hallar } \frac{d^2 x}{dy^2} \text{ si } \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

Desarrollo

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{y'_t x''_t - y''_t x'_t}{(y'_t)^3} \text{ de donde se tiene:}$$

$$x = e^t \cos t \Rightarrow x'_t = e^t \cos t - e^t \sin t \Rightarrow x''_t = -2e^t \sin t$$

$$y = e^t \sin t \Rightarrow y'_t = e^t \sin t + e^t \cos t \Rightarrow y''_t = 2e^t \cos t$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{(e^t \sin t + e^t \cos t) \cdot (-2e^t \sin t) - 2e^t \cos t (e^t \cos t - e^t \sin t)}{(e^t \cos t + e^t \sin t)^3}$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{-2e^{2t} (\sin^2 t + \sin t \cos t + \cos^2 t - \sin t \cos t)}{e^{3t} (\cos t + \sin t)^3}$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{-2e^{2t}}{e^{3t} (\cos t + \sin t)^3} = \frac{-2}{e^t (\cos t + \sin t)^3}$$

$$697 \quad \text{Hallar } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ para } t=0, \text{ si } \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = \frac{2t}{1+t^2} \\ y'_t = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''_t = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} \\ y''_t = 2 \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{y'_t \cdot x''_t - y''_t \cdot x'_t}{(y'_t)^3} = \frac{4t}{1+t^2} - \frac{2t(2-2t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{[4t(2+t^2) - 4t(1-t^2)](1+t^2)}{8t^3} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 1+t^2 \Rightarrow \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = 1$$

698 Demostrar que y , determinada como función de x por las ecuaciones $x = \sec t$ e $y = ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}$ satisface la ecuación diferencial

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 2y, \text{ cualquiera que sean las constantes } a \text{ y } b.$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = \sec t \\ y = ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = \cos t \\ y'_t = \sqrt{2}ae^{t\sqrt{2}} - b\sqrt{2}e^{-t\sqrt{2}} \end{cases}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$x''_t = -\sec t$$

$$y''_t = 2ae^{t\sqrt{2}} + 2be^{-t\sqrt{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = y_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sqrt{2}ae^{t\sqrt{2}} - b\sqrt{2}e^{-t\sqrt{2}}}{\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'_t \cdot y''_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{\cos t(2ae^{t\sqrt{2}} + 2be^{-t\sqrt{2}}) + \sec t(\sqrt{2}ae^{t\sqrt{2}} - \sqrt{2}be^{-t\sqrt{2}})}{\cos^3 t}$$

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 2y$$

Diferenciación de Funciones

$$(1-\sec^2 t) \frac{\cos t(2ae^{t\sqrt{2}} + 2be^{-t\sqrt{2}}) + \sec t(2ae^{t\sqrt{2}} - 2be^{-t\sqrt{2}})}{\cos^3 t} - \frac{\sec t(\sqrt{2}ae^{t\sqrt{2}} - b\sqrt{2}e^{-t\sqrt{2}})}{\cos t} = 2ae^{t\sqrt{2}}$$

$$\frac{\cos t(2ae^{t\sqrt{2}} + 2be^{-t\sqrt{2}}) + \sec t(\sqrt{2}ae^{t\sqrt{2}} - \sqrt{2}be^{-t\sqrt{2}})}{\cos t} - \frac{\sec t(\sqrt{2}ae^{t\sqrt{2}} - b\sqrt{2}e^{-t\sqrt{2}})}{\cos t} = 2ae^{t\sqrt{2}} + 2be^{-t\sqrt{2}} = 2(ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}) = 2y$$

$$\therefore (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 2y$$

699 Hallar $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ para las siguientes funciones: $\begin{cases} x = \sec t \\ y = \tan t \end{cases}$

Desarrollo

$$y'''_{xx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ donde } y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y'''_t - x''_t \cdot y''_t}{(x'_t)^3}$$

$$(y''_{xx})'_t = \frac{(x'_t)^3 [x''_t \cdot y'''_t + x'_t \cdot y'''_t - x'''_t \cdot y'_t - x''_t \cdot y'_t] + [-(x'_t \cdot y''_t - x''_t \cdot y'_t) 3(x'_t)^2 \cdot x''_t]}{(x'_t)^6}$$

$$(y''_{xx})'_t = \frac{(x'_t)^3 (x'_t \cdot y'''_t - x''_t \cdot y'_t) - 3(x'_t)^2 (x'_t \cdot y''_t - x''_t \cdot y'_t)}{(x'_t)^6}$$

$$(y''_{xx})'_t = \frac{x'_t \cdot y'''_t - x''_t \cdot y'_t - 3x'_t \cdot x''_t \cdot y''_t + 3(x''_t)^2 \cdot y'_t}{(x'_t)^4}$$

$$(y''_{xx})'_t = \frac{(x'_t)^2 y'''_t - x'_t \cdot x'''_t \cdot y'_t - 3x'_t \cdot x''_t \cdot y''_t + 3(x''_t)^2 \cdot y'_t}{(x'_t)^4}$$

$$y'''_{xxx} = \frac{(x'_t)^2 y'''_{ttt} - x'_t x'''_{ttt} \cdot y'_t - 3x'_t x''_{tt} \cdot y''_{tt} + 3(x''_{tt})^2 y'_t}{(x'_t)^5}$$

$$x = \sec t \Rightarrow x'_t = \sec t \cdot \operatorname{tg} t \Rightarrow x''_{tt} = \sec^3 t + \sec^2 t \cdot \operatorname{tg} t$$

$$x''_{tt} = \sec^2 t (1 + \operatorname{tg} t) \Rightarrow x'''_{ttt} = \sec^4 t + 2 \sec^2 t \cdot \operatorname{tg} t (1 + \operatorname{tg} t)$$

$$y = \operatorname{tg} t \Rightarrow y'_t = \sec^2 t \Rightarrow y''_{tt} = 2 \sec^2 t \cdot \operatorname{tg} t$$

$$y'''_{ttt} = 4 \sec^2 t \cdot \operatorname{tg} t + 2 \sec^4 t \Rightarrow y'''_{ttt} = 2 \sec^2 t (2 \operatorname{tg} t + \sec^2 t)$$

$$y'''_{xxx} = \frac{x'_t (x'_t \cdot y'''_{ttt} - x'''_{ttt} \cdot y'_t) - 3x''_{tt} (x'_t \cdot y''_{tt} - x''_{tt} \cdot y'_t)}{(x'_t)^5}$$

de donde al simplificar: $y'''_{xxx} = \frac{3 \operatorname{ctg}^4 t}{\sec t}$

700

$$\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \operatorname{sent} \end{cases}$$

Desarrollo

$$x = e^{-t} \cos t \Rightarrow x'_t = -e^{-t} \cos t - e^{-t} \operatorname{sent}$$

$$x'_t = -e^{-t} (\cos t + \operatorname{sent}) \Rightarrow x''_{tt} = 2e^{-t} \operatorname{sent}$$

$$y = e^{-t} \operatorname{sent} \Rightarrow y'_t = -e^{-t} \operatorname{sent} + e^{-t} \cos t$$

$$y'_t = e^{-t} (\cos t - \operatorname{sent}) \Rightarrow y''_{tt} = -2e^{-t} \cos t$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

$$= \frac{-e^{-t} (\operatorname{sent} + \cos t) (-2e^{-t} \cos t) - 2e^{-t} \operatorname{sent} \cdot e^{-t} (\cos t - \operatorname{sent})}{-e^{-3t} (\operatorname{sent} + \cos t)}$$

$$y''_{xx} = \frac{2e^{-2t} [(\operatorname{sent} \cos t + \cos^2 t) - \operatorname{sent} \cos t + \operatorname{sent}^2 t]}{-e^{-3t} (\operatorname{sent} + \cos t)^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{2}{e^{-t} (\operatorname{sent} + \cos t)^3} = \frac{-2e^t}{(\operatorname{sent} + \cos t)^3}$$

$$(y''_{xx})'_t = -2 \left[\frac{e^t (\operatorname{sent} + \cos t)^3 - 3(\operatorname{sent} + \cos t)^2 (\cos t - \operatorname{sent}) e^t}{(\operatorname{sent} + \cos t)^6} \right]$$

$$(y''_{xx})'_t = \frac{-2e^t (\operatorname{sent} + \cos t - 3 \cos t + 3 \operatorname{sent})}{(\operatorname{sent} + \cos t)^4}$$

$$(y''_{xx})'_t = \frac{-2e^t (4 \operatorname{sent} - 2 \cos t)}{(\operatorname{sent} + \cos t)^4} \Rightarrow (y''_{xx})'_t = \frac{-4e^t (2 \operatorname{sent} - \cos t)}{(\operatorname{sent} + \cos t)^4}$$

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{-4e^t (2 \operatorname{sent} - \cos t)}{-e^{-t} (\operatorname{sent} + \cos t)^5} \Rightarrow y'''_{xxx} = \frac{4e^{2t} (2 \operatorname{sent} - \cos t)}{(\operatorname{sent} + \cos t)^5}$$

701

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t^3 \end{cases}$$

Desarrollo

$$x = e^{-t} \Rightarrow x'_t = -e^{-t} \Rightarrow x''_{tt} = e^{-t}$$

$$y = t^3 \Rightarrow y'_t = 3t^2 \Rightarrow y''_{tt} = 6t$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{-e^{-t} \cdot 6t - e^{-t} \cdot 3t}{-e^{-3t}} = \frac{3t^2 + 6t}{e^{-2t}} = (3t^2 + 6t)e^{2t}$$

$$(y''_{xx})'_t = (6t+6)e^{2t} + 2(3t^2+6t)e^{2t} = e^{2t}(6t^2+18t+6)$$

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{e^{2t}(6t^2+18t+6)}{-e^{-t}} = -e^{3t}(6t^2+18t+6)$$

$$y'''_{xxx} = -6e^{3t}(t^2+3t+1)$$

702 Hallar $\frac{d^n y}{dx^n}$ si $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^m \end{cases}$

Desarrollo

Como $x = \ln t \Rightarrow t = e^x$; $y = t^m \Rightarrow y = e^{mx}$

$$y'_x = me^{mx} \Rightarrow y''_{xx} = m^2 e^{mx} \Rightarrow y'''_{xxx} = m^3 e^{mx}$$

$$y^{(n)} = m^n e^{mx} \Rightarrow y^{(n)}_{(x)} = m^n (e^x)^m \Rightarrow y^{(n)}_{(t)} = m^n t^m$$

703 Conociendo la función $y = f(x)$, hallar las derivadas de x'' y x''' de la función inversa $x = f^{-1}(y)$

Desarrollo

$$y = f(x) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{-f''(x) dx}{[f'(x)]^2 dy} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

$$\frac{d^3 x}{dy^3} = \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 x}{dy^2} \right) = \frac{d}{dy} \left(-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \right)$$

$$= -\frac{[(f'(x))^3 f'''(x) - f''(x) \cdot 3(f'(x))^2 \cdot f'(x)]}{[f'(x)]^6} \cdot \frac{dx}{dy}$$

Diferenciación de Funciones

$$= -\frac{[f'(x)^2 (f''(x)f'''(x) - 3f''(x)^2)]}{[f'(x)]^6} \cdot \frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{d^3 x}{dy^3} = \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x) \cdot f'''(x)}{[f'(x)]^5}$$

704 Hallar y'' si $x^2 + y^2 = 1$

Desarrollo

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \text{ derivando se tiene } y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = \frac{\sqrt{1-x^2}(-1) - (-x) \cdot \frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$y'' = \frac{x^2 - 1 - x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{y^3}$$

DETERMINAR LAS DERIVADAS y'' DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES $y = f(x)$ DADAS DE FORMA IMPLICITA.-

705 $y^2 = 2px$

Desarrollo

$$2yy' = 2p \Rightarrow y' = \frac{p}{y}$$

$$y'' = \frac{-py'}{y^2} = -\frac{p^2}{y^3} \Rightarrow y'' = -\frac{p^2}{y^3}$$

706 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Desarrollo

$$\frac{2a}{a^2} + \frac{2y}{b^2} y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2 x}{ya^2}$$

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{y - xy'}{y^2} \right) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(y - x(-\frac{b^2 x}{ya^2}))}{y^2}$$

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{y^2 + \frac{bx^2}{a^2}}{y^3} \right) = -\frac{b^2}{a^4} \left(\frac{b^2 x^2 + a^2 y^2}{y^3} \right)$$

$$y'' = -\frac{b^2}{a^4} \left(\frac{a^2 b^2}{y^3} \right) = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

707 $y = x + \arctg y$

Desarrollo

$$y' = 1 + \frac{y'}{1+y^2} \Rightarrow (1 - \frac{1}{1+y^2}) y' = 1$$

$$\frac{y^2}{1+y^2} = 1 \Rightarrow y' = \frac{1+y^2}{y^2} \Rightarrow y' = \frac{1}{y^2} + 1$$

$$y'' = -2y^{-3} y' = -\frac{2y'}{y^3} \Rightarrow y'' = -\frac{2}{y^3} \left(\frac{1+y^2}{y^2} \right) = -\frac{2+2y^2}{y^5}$$

708 Desde la ecuación $y = x + \ln y$. Hallar $\frac{d^2 y}{dx^2}$ y $\frac{d^2 x}{dy^2}$

Desarrollo

$$y = x + \ln y \Rightarrow y' = 1 + \frac{y'}{y} \Rightarrow (1 - \frac{1}{y}) y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{y-1}$$

Diferenciación de Funciones

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(y-1)y' - y \cdot y'}{(y-1)^2} = \frac{-y'}{(y-1)^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{(y-1)^2} \left(\frac{y}{y-1} \right) = -\frac{y}{(y-1)^3}$$

709 Hallar "y" en el punto (1,1), sí: $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$

Desarrollo

$$2x + 5y + 5xy' + 2yy' - 2 + y' = 0 \Rightarrow (5x + 2y + 1)y' = 2 - 2x - 5y$$

$$y' = \frac{2-2x-5y}{5x+2y+1} \Rightarrow y'' = \frac{(5x+2y+1)(-2-5y') - (2-2x-5y)(5+2y')}{(5x+2y+1)^2}$$

Al simplificar y hacer la evaluación en el punto (1,1) se tiene: $y''|_{(1,1)} = \frac{11}{25}$

710 Hallar y'' en el punto (0,1) sí $x^4 - xy + y^4 = 1$

Desarrollo

$$4x^3 - y - xy' + 4y^3 y' = 0 \Rightarrow (4y^3 - x)y' = y - 4x^3 \Rightarrow y' = \frac{y-4x^3}{4y^3-x}$$

$$y'' = \frac{(4y^3-x)(y'-12x^2) - (y-4x^3)(12y^2 y' - 1)}{(4y^3-x)^2}$$

Reemplazando $y' = \frac{y-4x^3}{4y^3-x}$ en y'' y evaluando en el punto p(0,1) se tiene

$$y''|_{(0,1)} = -\frac{1}{16}$$

711 a) La función "y" está dada implícitamente por la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$. Hallar $\frac{d^3y}{dx^3}$ en el punto (1,1).

b) Hallar $\frac{d^3y}{dx^3}$ si $x^2 + y^2 = a^2$

Desarrollo

$$a) \quad 2x + 2y + 2xy' + 2yy' - 4 + 2y' = 0 \Rightarrow (2x + 2y + 2)y' = 4 - 2x - 2y$$

$$y' = \frac{4 - 2x - 2y}{(2x + 2y + 2)^2}$$

$$y'' = \frac{(2x + 2y + 2)^2(-2 - 2y') - (4 - 2x - 2y)2(2x + 2y + 2)(2 + 2y')}{(2x + 2y + 2)^4}$$

$$y'' = \frac{(2x + 2y + 2)(-2 - 2y') - 2(4 - 2x - 2y)(2 + 2y')}{(2x + 2y + 2)^3}$$

Simplificando y calculando y''' , y evaluando en (1,1) se tiene:

$$y'''|_{(1,1)} = \frac{1}{3}$$

$$b) \quad x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$y'' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x(-\frac{x}{y})}{y^2} \Rightarrow y'' = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{a^2}{y^3}$$

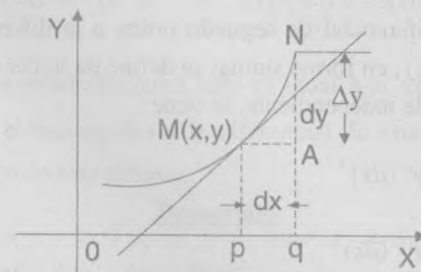
$$y'' = \frac{3a^2}{y^4} \quad y' = \frac{3a^2}{y^4} \left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3a^2x}{y^5}$$

2.6. DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y DE ORDENES SUPERIORES.

a) DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN:

Se llama diferencial (de primer orden) de una función $y = f(x)$ a la principal de su incremento lineal con respecto al incremento $\Delta x =$ la variable independiente x , la diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente.

$$dy = f'(x)dx, \text{ de aquí, que } y' = \frac{dy}{dx}.$$



Si MN es el arco de la gráfica de la función $y = f(x)$, MT la tangente en el punto M(x, y) y PQ = $\Delta x = dx$.

Tendremos que el incremento de la coordenada de la tangente AT = el segmento AN = Δy .

b) PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS DIFERENCIALES

1 $dc = 0$, donde $c =$ constante

2 $dx = \Delta x$

3 $d(cu) = c du$

4 $d(u \pm v) = du \pm dv$

5 $d(uv) = u dv + v du$

6 $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$

7 $d(f(u)) = f'(u) du$

c) **APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL PARA LOS CALCULOS APROXIMADOS.-**

Sea $y = f(x)$ la diferencial dy y el incremento Δy de dicha función es aproximadamente iguales entre sí $\Delta y \approx dy$.

Es decir $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, de donde:

$$f(x) + f'(x)\Delta x = f(x + \Delta x)$$

d) **DIFERENCIALES DE ORDENES SUPERIORES.-**

Se llama diferencial de segundo orden a la diferencial de primer orden $d^2y = d(dy)$, en forma similar se define de tercer orden si $y = f(x)$ y "x" es la variable independiente, se tiene:

$$d^2y = y''(dx)^2$$

$$d^3y = y'''(dx)^3$$

$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n$$

Cuando $y = f(u)$, donde $u = \psi(x)$ se tiene:

$$d^2y = y''(du)^2 + y'd^2u$$

$$d^3y = y'''(du)^3 + 3y''du.d^2u + y'd^3u$$

- 712 Hallar el incremento Δy y la diferencial dy de la función $y = 5x + x^2$ para $x = 2$ y $\Delta x = 0.001$

Desarrollo

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \Rightarrow \Delta y = f(2 + 0.001) - f(2)$$

Diferenciación de Funciones

$$\Delta y = f(2.001) - f(2) = 5(2.001) + (2.001)^2 - 10 - 4$$

$$\Delta y = 2.001(5 + 2.001) - 14 \Rightarrow \Delta y = 2.001(7.001) - 14 = 0.009001$$

$$dy = y'dx = (5 + 2x)\Delta x \Rightarrow dy = (5 + 4)(0.001) = 9(0.001) \Rightarrow dy = 0.009$$

- 713 Sin calcular la derivada, hallar $d(1 - x^3)$, para $x = 1$ y $\Delta x = -\frac{1}{3}$.

Desarrollo

$$d(1 - x^3) = -3x^2 dx = -3x^2 \Delta x \Rightarrow d(1 - x^3) = -3(1)\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$$

- 714 El área S de un cuadrado cuyo lado es igual a x , viene dada por la fórmula $S = x^2$, hallar el incremento y la diferencial de esta función y determinar el valor geométrico de esta última.

Desarrollo

$$dS = 2x \cdot \Delta x \text{ y } \Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$$

$$\Delta S = (x + \Delta x)^2 - x^2 \Rightarrow \Delta S = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2$$

$$\text{por lo tanto se tiene: } \Delta S = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

- 715 Dar la interpretación geométrica del incremento y de la diferencial de las siguientes funciones:

- a) del área del círculo $S = \pi x^2$. b) del volumen del cubo $v = x^3$

Desarrollo

- a) El incremento de la función es: $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$

$$\Delta S = \pi(x + \Delta x)^2 - \pi x^2 = 2\pi x \cdot \Delta x + \pi \cdot \Delta x^2$$

Calculemos la diferencial es decir:

$$dS = S'(x)dx \Rightarrow dS = 2\pi x \cdot dx = 2\pi x \cdot \Delta x$$

Como $\Delta S = 2\pi x \cdot \Delta x + \pi \cdot \Delta x^2$ y $dS = 2\pi x \cdot \Delta x$ y como $\Delta x \rightarrow 0$.

entonces: $\Delta S \approx dS$

b) El incremento de la función es $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$

$$\Delta v = (x + \Delta x)^3 - x^3 \Rightarrow \Delta v = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 - x^3$$

de donde se tiene: $\Delta v = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2$

Calculemos la diferencial es decir:

$$dv = v'(x)dx \Rightarrow dv = 3x^2 dx \Rightarrow dv = 3x^2 \cdot \Delta x$$

Como $\Delta x \rightarrow 0$, $\Rightarrow \Delta v \approx dv$

716 . Demostrar que cualquiera que sea "x", el incremento de la función $y = 2^x$, correspondiente al incremento de "x" en una magnitud Δx , es equivalente a la expresión $2^x \Delta x \ln 2$, cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

Desarrollo

$$\Delta y \approx dy \text{ como } dy = y' dx = y' \cdot \Delta x$$

$$y = 2^x \Rightarrow y' = 2^x \ln 2$$

$$\Delta y \approx dy = y' \cdot \Delta x = 2^x \ln 2 \cdot \Delta x$$

717 ¿Para qué valor de "x", la diferencial de la función $y = x^2$ no equivale al incremento de esta misma función cuando $\Delta x \rightarrow 0$?

Desarrollo

$$\text{Como } y = x^2 \Rightarrow dy = 2x \cdot \Delta x$$

Diferenciación de Funciones

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

para que $\Delta y \neq dy$ el valor de x debe ser cero es decir $x = 0$.

718 ¿Tienen diferencial la función $y = |x|$ para $x = 0$?

Desarrollo

Como $dy = y' dx$ luego $y = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$, por lo tanto no tiene diferencial.

719 Empleando la derivada, hallar la diferencial de la función $y = \cos x$ $x = \frac{\pi}{6}$ y $\Delta x = \frac{\pi}{36}$.

Desarrollo

$$\text{Como } y = \cos x \Rightarrow dy = y' dx \Rightarrow dy = -\sin x \cdot \Delta x$$

$$dy = -\sin \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{36} \Rightarrow dy = -\frac{\pi}{72} \approx -0.0436$$

720 Hallar la diferencial de la función: $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ para $x = 9$ y $\Delta x = -0.01$

Desarrollo

$$y = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow dy = y' dx \text{ como } y = 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = -x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$dy = y' dx = -\frac{\Delta x}{x^2} \Rightarrow dy = \frac{-0.01}{9^2} \Rightarrow dy = \frac{1}{2700} \approx 0.00037$$

- 721 Calcular la diferencial de la función $y = \operatorname{tg} x$ para $x = \frac{\pi}{3}$ y $\Delta x = \frac{\pi}{180}$.

Desarrollo

$$y = \operatorname{tg} x \Rightarrow dy = \sec^2 x \cdot dx = \sec^2 x \cdot \Delta x$$

$$dy = \sec^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{45} \approx 0.0698$$

HALLAR LAS DIFERENCIALES DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES PARA CUALQUIER VALOR DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE Y DE SU INCREMENTO.

722 $y = \frac{1}{x^m}$

Desarrollo

$$y = \frac{1}{x^m} \Rightarrow y = x^{-m} \Rightarrow dy = -mx^{-m-1} dx \Rightarrow dy = -\frac{mdx}{x^{m+1}}$$

723 $y = \frac{x}{1-x}$

Desarrollo

$$\text{Como } dy = y' dx \text{ entonces } y' = \frac{(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} \Rightarrow y' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\text{Luego } dy = y' dx = \frac{dx}{(1-x)^2}$$

724 $y = \arcsen \frac{x}{a}$

Desarrollo

Diferenciación de Funciones

$$y = \arcsen \frac{x}{a} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\text{como } dy = y' dx = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

725 $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$

Desarrollo

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{a}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \Rightarrow y' = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

$$\text{como } dy = y' dx = \frac{a dx}{a^2 + x^2}$$

726 $y = e^{-x^2}$

Desarrollo

$$\text{Como } y = e^{-x^2} \Rightarrow y' = -2xe^{-x^2}$$

$$\text{Además } dy = y' dx = -2xe^{-x^2} dx \Rightarrow dy = -2xe^{-x^2} dx$$

727 $y = x \ln x - x$

Desarrollo

$$y = x \ln x - x \Rightarrow y' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

$$dy = y' dx = \ln x \cdot dx \Rightarrow dy = \ln x \cdot dx$$

728 $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$

Desarrollo

$$y = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x)$$

$$y' = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} \Rightarrow y' = -\frac{2}{1-x^2}$$

$$\text{como } dy = y' dx \Rightarrow dy = -\frac{2dx}{1-x^2}$$

729 $r = \operatorname{ctg} \varphi + \csc \varphi$

Desarrollo

$$r' = -\csc^2 \varphi - \csc \varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi \Rightarrow r' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} = -\frac{1+\cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$\text{como } dr = r' d\varphi \Rightarrow dr = -\frac{1+\cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} d\varphi$$

730 $S = \operatorname{arctg} e^t$

Desarrollo

$$S = \operatorname{arctg} e^t \Rightarrow S' = \frac{e^t}{1+e^{2t}}$$

$$\text{como } dS = S' dt \Rightarrow dS = S' dt = \frac{e^t dt}{1+e^{2t}}$$

731 Hallar dy si $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$

Desarrollo

$$2xdx + 2xdy + 2ydx - 2ydy = 0 \Rightarrow (2x+2y)dx = (2y-2x)dy$$

$$dy = \frac{2x+2y}{2y-2x} dx \Rightarrow dy = \frac{x+y}{y-x} dx \Rightarrow dy = -\frac{x+y}{x-y} dx$$

HALLAR LAS DIFERENCIALES DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES DADA DE FORMA IMPLICITAS

732 $(x+y)^2(2x+y)^3 = 1$

Desarrollo

$$2(x+y)(2x+y)^3(dx+dy) + 3(x+y)^2(2x+y)^2(2dx+dy) = 0$$

$$2(2x+y)(dx+dy) + 3(2dx+dy)(x+y) = 0$$

$$2(2x+y)dx + 2(2x+y)dy + 3(x+y)2dx + 3(x+y)dy = 0$$

$$(10x+8y)dx + (7x+5y)dy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{10x+8y}{7x+5y} dx$$

733 $y = e^{\frac{x}{y}}$

Desarrollo

$$dy = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{ydx - xdy}{y^2} \right) \Rightarrow dy = -e^{\frac{x}{y}} \frac{dx}{y} + \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} dy$$

$$\left(1 - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} \right) dy = -\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} dx \Rightarrow (y^2 - xe^{\frac{x}{y}}) dy = -ye^{\frac{x}{y}} dx$$

$$dy = -\frac{ye^{\frac{x}{y}} dx}{y^2 - xy} = -\frac{y \cdot ydx}{y^2 - x \cdot y} \Rightarrow dy = -\frac{y}{y-x} dx = \frac{y}{x-y} dx$$

734 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

Desarrollo

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctgc} \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \operatorname{arctgc} \frac{y}{x}$$

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{xdy - ydx}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

$$xdx + ydy = xdy - ydx \Rightarrow (y - x)dy = -xdy - xdx$$

$$(x - y)dy = (x + y)dx \Rightarrow dy = \frac{x + y}{x - y} dx$$

735 Hallar dy en el punto $(1, 2)$ si $y^3 - y = 6x^2$.

Desarrollo

$$\text{Como } y^3 - y = 6x^2 \Rightarrow 3y^2 dx - dy = 12x dx \Rightarrow (3y^2 - 1)dy = 12x dx$$

$$dy = \frac{12x}{3y^2 - 1} dx \Rightarrow dy = \frac{12 dx}{12 - 1} = \frac{12}{11} dx$$

736 Hallar el valor aproximado del $\operatorname{sen} 31^\circ$

Desarrollo

$$\text{Sea } x = \operatorname{arcsen} 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ y } \Delta x = \operatorname{arcsen} 1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

$$\text{Pero } f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

$$\operatorname{sen} 31^\circ \approx \operatorname{sen} 30^\circ + \cos 30^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right) \Rightarrow \operatorname{sen} 31^\circ \approx 0.500 + 0.017 \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.515$$

Diferenciación de Funciones

737 Sustituyendo el incremento de la función por la diferencial, calcúlase aproximadamente:

a) $\cos 61^\circ$

b) $\operatorname{tg} 44^\circ$

c) $e^{0.2}$

d) $\log 0.9$

e) $\operatorname{arctg} 1.05$

Desarrollo

a) $\cos 61^\circ \Rightarrow x = 60^\circ \text{ y } \Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

$$\cos 61^\circ \approx \cos 60^\circ - \operatorname{sen} 60^\circ \frac{\pi}{180} \Rightarrow \cos 61^\circ \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.485$$

b) $\operatorname{tg} 44^\circ \Rightarrow \text{Sea } x = 45^\circ \text{ y } \Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

$$\operatorname{tg} 44^\circ \approx \operatorname{tg} 45^\circ - \sec^2 45^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right) \Rightarrow \operatorname{tg} 44^\circ \approx 1 - 4 \left(\frac{\pi}{180} \right) \approx 0.965$$

738 ¿En cuanto aumenta aproximadamente el volumen de una esfera, si su radio $r = 15$ cm, se alarga en 2 mm?

Desarrollo

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow dv = 4\pi r^2 dr$$

$$dv = 4\pi (15)^2 (0.2) = 180\pi \approx 565 \text{ cm}^3$$

- 739 Deducir la fórmula aproximada para valores de $|\Delta x|$ pequeños en comparación con x . $\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$ y con ella, hallar los valores aproximados de $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{70}$ y $\sqrt{640}$.

Desarrollo

$$\text{Sea } f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x}$$

$$\text{como } f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{luego } f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$$

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}. \text{ Como } \sqrt{5} = \sqrt{4+1} \Rightarrow x=4$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{4} + \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} = 2.25$$

- 740 Deducir la fórmula aproximada: $\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ y hallar los valores aproximados de $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{70}$, $\sqrt[3]{200}$.

Desarrollo

$$\text{Sea } f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{Como } f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx. \text{ Como } \sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{pero } \sqrt[3]{10} \text{ se tiene } \sqrt[3]{8+2} \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$\text{Luego } \sqrt[3]{10} \approx \sqrt[3]{8} + 2 \approx \sqrt[3]{8} + \frac{2}{3\sqrt[3]{8^2}}$$

$$\sqrt[3]{10} \approx 2 + \frac{2}{3(4)} \Rightarrow \sqrt[3]{10} \approx 2 + \frac{1}{6} \approx 2 + 0.16 \Rightarrow \sqrt[3]{10} \approx 2.16$$

- 741 Hallar los valores aproximados de las funciones:

a) $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ para $x = 1.03$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ para $x = 0.2$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ para $x = 0.1$

d) $y = e^{1-x^2}$ para $x = 1.05$

Desarrollo

$$\text{Usando la fórmula } f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$$

$$\text{Como } x = 1.03 = 1 + 0.3 \Rightarrow \Delta x = 0.03$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$$

$$f(1.03) = f[1 + (0.3)] \approx f(1) + f'(1)\Delta x$$

$$f(1.03) \approx 5 - 0(0.03) = 5 \Rightarrow f(1.03) \approx 5$$

- 742 Hallar el valor aproximado de $\text{tg } 45^\circ 3' 20''$

Desarrollo

$$\text{Sea } f(x) = \text{tg } x \text{ donde } x = 45^\circ, \Delta x = 3' 20''$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ 3' 20'' \approx \operatorname{tg} 45^\circ + \sec^2 45^\circ (3' 20'') \Rightarrow \operatorname{tg} 45^\circ 3' 20'' \approx 1.0019$$

- 743 Hallar el valor aproximado de $\arcsen 0.54$.

Desarrollo

Sea $f(x) = \arcsen x$ donde $x = 0.5$ y $\Delta x = 0.4$ además $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$$

$$\arcsen 0.54 \approx \arcsen 0.5 + \frac{0.5}{\sqrt{1-(0.5)^2}} \Rightarrow \arcsen 0.54 \approx 0.54$$

- 744 Hallar el valor aproximado de $\sqrt[4]{17}$

Desarrollo

Sea $f(x) = \sqrt[4]{x}$ donde $x = 16$, $\Delta x = 1$

$$f(x) = \sqrt[4]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, \text{ reemplazando a la ecuación:}$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$$

$$\sqrt[4]{17} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} \approx 2.03$$

- 745 Demostrar basándose en la fórmula de la ley de ohm $I = \frac{E}{R}$, que una pequeña variación de la intensidad de la corriente, debida a una pequeña variación de la resistencia, puede hallarse de manera aproximada por la fórmula $\Delta I = -\frac{I}{R} \Delta R$.

Diferenciación de Funciones

Desarrollo

Como $I = \frac{E}{R}$ aplicando la diferencial de un cociente con respecto a R .

$$dI = \frac{RdE - EdR}{R^2} \text{ pero } dE = 0$$

$$\text{Luego: } dI = -\frac{EdR}{R^2} = -\frac{E}{R} \left(\frac{dR}{R}\right) \Rightarrow \Delta I = -\frac{I}{R} \Delta R$$

- 746 Demostrar que un error relativo de 1% cometido al determinar la longitud radio, da lugar a un error relativo aproximado de un 2%, al calcular el área círculo y la superficie de la esfera.

Desarrollo

Usar la formula siguientes: Área del círculo = $A = \pi r^2$

Superficie de la esfera = $S = 4\pi r^2$

- 747 Calcular $d^2 y$, si $y = \cos 5x$

Desarrollo

$$y = \cos 5x \Rightarrow dy = -5 \sin 5x dx$$

$$d^2 y = -25 \cos 5x (dx)^2$$

- 748 $u = \sqrt{1-x^2}$, hallar $d^2 u$

Desarrollo

$$du = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \Rightarrow d^2 u = -\frac{(dx)^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

749 $y = \arccos x$, hallar $d^2 y$

Desarrollo

$$y = \arccos x \Rightarrow dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow dy = -\frac{x(dx)^2}{\sqrt{1-x^2}^3}$$

750 $y = \sin x \cdot \ln x$, Hallar $d^2 y$

Desarrollo

$$dy = \cos x \cdot \ln x \cdot dx + \frac{\sin x}{x} dx \Rightarrow dy = (\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}) dx$$

$$d^2 y = (-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x})(dx)^2 + (\frac{x \cos x - \sin x}{x^2})(dx)^2$$

$$d^2 y = (-\sin x \cdot \ln x + \frac{2 \cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2})(dx)^2$$

751 $z = \frac{\ln x}{x}$, hallar $d^2 z$

Desarrollo

$$dz = \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \Rightarrow d^2 z = \frac{2x - 3}{x^3} (dx)^2$$

752 $z = x^2 e^{-x}$, hallar $d^3 z$

Desarrollo

$$dz = (2xe^{-x} - x^2 e^{-x}) dx \Rightarrow d^3 z = -e^{-x} (x^2 - 6x + 6)(dx)^3$$

753 $z = \frac{x^4}{2-x}$, hallar $d^4 z$

Desarrollo

En forma similar a los anteriores $d^4 z = \frac{384}{(2-x)^5} (dx)^4$

754 $u = 3 \sin(2x + 5)$, Hallar $d^n u$

Desarrollo

$$du = 3 \cos(2x + 5) dx = 3.2 \sin(2x + 5 + \frac{\pi}{2}) dx$$

$$d^2 u = 3.2^2 \cos(2x + 5 + \frac{\pi}{2})(dx)^2 = 3.2^2 \sin(2x + 5 + 2(\frac{\pi}{2}))(dx)^2$$

$$d^3 u = 3.2^3 \sin(2x + 5 + 3(\frac{\pi}{2}))(dx)^3$$

$$d^n u = 3.2^n \sin(2x + 5 + n(\frac{\pi}{2}))(dx)^n$$

755 $y = e^{x \cos x} \sin(x \cos x)$, hallar $d^n y$

Desarrollo

$$dy = (\cos \alpha \cdot e^{x \cos \alpha} \sin(x \cos \alpha) + \cos \alpha \cdot e^{x \cos \alpha} \cos \dots (x \cos \alpha)) dx$$

$$d^n y = e^{x \cos \alpha} \sin(x \cos \alpha + n \alpha)(dx)^n$$

2.7. TEOREMA DEL VALOR MEDIO.

a) TEOREMA DE ROLLE.-

Sea $y = f(x)$ una función continua en $a \leq x \leq b$ y que existe $f'(x)$ para cada $x \in (a, b)$ y $f(a) = f(b)$ existe $z \in (a, b)$ tal que $f'(z) = 0$

b) TEOREMA DE LAGRANGE.-

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y que existe $f'(x)$ para cada $x \in (a, b) \Rightarrow f(b) - f(a) = (b - a)f'(z)$ donde $a < z < b$

c) **TEOREMA DE CAUCHY.-**

Sean $f(x)$ y $F(x)$ funciones continuas en $a \leq x \leq b$ y existe $f'(x)$ y $F'(x)$ para cada $x \in (a, b)$ y si $f(b) \neq f(a)$. Entonces:

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(z)}{F'(z)}, \text{ donde } a < z < b$$

- 756 Verificar que la función $f(x) = x - x^3$ satisface a las condiciones de teorema de Rolle en los segmentos $-1 \leq x \leq 0$ y $0 \leq x \leq 1$. Hallar los valores correspondientes de z .

Desarrollo

La función $f(x)$ es continua y derivable para todos los valores de x , y además $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$

Luego el teorema de Rolle se puede aplicar. Ahora hallaremos z para esto

$$f'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow f'(z) = 1 - 3z^2 = 0, \text{ de donde: } z_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ó } z_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Siendo $-1 < z_2 < 0$ y $0 < z_1 < 1$

- 757 La función $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ en los extremos del segmento $[0, 4]$ toma valores iguales $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$. ¿Es válido para esta función el teorema de Rolle en el segmento $[0, 4]$?

Desarrollo

$$\text{Como } f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(2) \nexists$$

Es decir que $f(x)$ no es derivable en $(2, 4)$.

Luego no es válido el teorema de Rolle.

Diferenciación de Funciones

- 758 ¿Se cumple las condiciones del teorema de Rolle para la función $f(x) = \tan x$ en el segmento $[0, \pi]$?

Desarrollo

No se cumple, porque $f(x) = \tan x$ no es continua en $(0, \pi)$ es decir discontinua en $x = \frac{\pi}{2}$.

- 759 Sea $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Demostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene tres raíces reales.

Desarrollo

$$\text{Como } f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) \Rightarrow f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 22x + 6$$

$$\text{Como } f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 + 18x^2 + 22x + 6 = 0$$

$$\text{De donde } 2x^3 + 9x^2 + 11x + 3 = 0$$

y por la fórmula de Cardano se obtiene las tres raíces reales.

- 760 La ecuación $e^x = 1 + x$, evidente tiene una raíz $x = 0$. Demostrar que la ecuación no puede tener otra raíz real.

Desarrollo

Sea $f(x) = e^x - (1 + x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Además es derivable $\Rightarrow$ existe $z \in \mathbb{R}$, de tal manera que $f'(z) = 0$

Como $f(x) = e^x - (1 + x)$, derivando se tiene:

$$f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f'(z) = e^z - 1$$

$$\text{pero } f'(z) = 0 \Rightarrow e^z - 1 = 0 \Rightarrow e^z = 1 \Rightarrow z = 0$$

- 761** Comprobar si se cumple las condiciones del teorema de Lagrange para la función $f(x) = x - x^3$ en el segmento $[-2, 1]$ y hallar el correspondiente valor intermedio z .

Desarrollo

La función es continua y derivable, entonces:

$$f'(x) = 1 - 3x^2 \text{ como } f(b) - f(a) = (b - a)f'(z)$$

$$f(1) - f(-2) = [1 - (-2)]f'(z) \Rightarrow 0 - (-2 + 8) = 3f'(z) \Rightarrow f'(z) = -2$$

$$1 - 3z^2 = -2 \Rightarrow -3z^2 = -3 \Rightarrow z = \pm 1$$

se toma solamente $z = -1$ puesto que $-2 < z < 1$

- 762** Comprobar si se cumple las condiciones del teorema de Lagrange y hallar el correspondiente punto intermedio z para la función $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ en el segmento $[-1, 1]$

Desarrollo

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4} \text{ es continua } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} \Rightarrow f(1) = 1 \text{ y } f(-1) = 1$$

$$\text{además } f'(z) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

$$\text{como } f'(z) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}\sqrt[3]{z} = 0 \Rightarrow z = 0$$

como $-1 < z < 1$, luego se cumple para $z = 0$

Diferenciación de Funciones

- 763** En el segmento de la parábola $y = x^2$ comprendido entre los puntos A(1, 1) y B(3, 9). Hallar un punto cuya tangente sea paralela a la cuerda AB.

Desarrollo

$$\text{Sea } f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ donde } a = 1, b = 3$$

$$f'(z) = \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4 \text{ como } f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z$$

$$\text{como } f'(z) = 4 \Rightarrow 2z = 4 \Rightarrow z = 2$$

Luego el punto será $(z, f(z)) = (2, 4)$

- 764** Aplicando el teorema de Lagrange, demostrar la fórmula $\sin(x + h) - \sin x = h \cos \xi$ donde $x < \xi < x + h$

Desarrollo

Sea $f(x) = \sin x$, es continua en $[x, x + h]$ por el teorema de Lagrange tiene:

$$f'(x + h) - f(x) = (x + h - x)f'(\xi)$$

$$f(x + h) - f(x) = hf'(\xi) \text{ donde } f'(\xi) = \cos \xi \cdot \sin(x + h) - \sin x = h \cos \xi$$

$$\text{donde } \xi = a + \theta(x - a) \text{ y } 0 < \theta < 1$$

caso particular para $a = 0$, se tiene la fórmula de Maclaurin.

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

$$\text{donde } \xi = x \text{ y } 0 < \theta < 1$$

- 765 a) Comprobar si se cumple las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones $f(x) = x^2 + 2$ y $F(x) = x^3 - 1$, en el segmento $[1, 2]$ y hallar ξ
- b) Idem para $f(x) = \sin x$ y $F(x) = \cos x$ en el segmento $[0, \frac{\pi}{2}]$

Desarrollo

- a) Por el teorema de Cauchy se tiene: $\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ $1 < \xi < 2$

$$f(2) = 6, f(1) = 3 \text{ y } f'(\xi) = 2\xi$$

$$F(2) = 7, F(1) = 0 \text{ y } F'(\xi) = 3\xi$$

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{6-3}{7-0} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{2}{3\xi} = \frac{3}{7} \Rightarrow \xi = \frac{14}{9}$$

- b) $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$$F(x) = \cos x \Rightarrow F'(x) = -\sin x, \quad 0 < \xi < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\cos \xi}{-\sin \xi} = \frac{1-0}{0-1} \Rightarrow \operatorname{ctg} \xi = 1 \Rightarrow \xi = \frac{\pi}{4}$$

2.8. FÓRMULA DE TAYLOR.-

Si una función $f(x)$ es continua y tiene derivadas continuas hasta de grado $(n-1)$ inclusive en el segmento $a \leq x \leq b$ (o $b \leq x \leq a$) y para cada punto interior del mismo existe una derivada finita $f^{(n)}_{(x)}$, en este segmento se verifica la fórmula de Taylor.

Diferenciación de Funciones

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

- 766 Desarrollar el polinomio $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ en potencias enteras positivas del binomio $x - 2$.

Desarrollo

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 4, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0$$

para $n \geq 4$ de donde $f(2) = 11, f'(2) = 7, f''(2) = 8, f'''(2) = 6$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + \dots + (x-2)^3$$

- 767 Desarrollar la función $f(x) = e^x$ en potencias del binomio $x + 1$, hasta término que contenga $(x+1)^3$.

Desarrollo

$$\text{Como } f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \text{ y } f^{(n)}(-1) = \frac{1}{e}$$

$$e^x = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \frac{f^{(4)}(-1)}{4!}(x+1)^4$$

$$e^x = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x+1) + \frac{1}{e} \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{1}{e} \frac{(x+1)^3}{3!} + \frac{(x+1)^4}{4!} e^\xi$$

donde $\xi = -1 + \theta(x+1), \quad 0 < \theta < 1$

- 768 Desarrollar la función $f(x) = \ln x$ en potencias de $x - 1$, hasta el término con $(x - 1)^2$.

Desarrollo

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1, f'''(1) = 2$$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{f'''(\xi)(x-1)^3}{3!}$$

$$\ln x = 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} f'''(\xi) \text{ donde } f'''(\xi) = \frac{2}{\xi^3}$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!\xi^3} \text{ donde } \xi = 1 + \theta(x-1) \text{ y } 0 < \theta < 1$$

- 769 Desarrollar la función $f(x) = \sin x$ en potencias de x , hasta el término de x^3 y hasta el término x^5 .

Desarrollo

$f(x) = \sin x$, derivando se tiene:

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{iv}(x) = \sin x$$

$$f^v(x) = \cos x, f^{vi}(x) = -\sin x$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{iv}(0) = 0, f^v(0) = 1$$

a) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} f^v(\xi)$ donde $f^v(\xi) = \cos \xi$, $\xi = \theta_1 x$, $0 < \theta_1 < 1$

Diferenciación de Funciones

b) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} f^{vii}(\xi)$ donde $f^{vii}(\xi) = -\cos \xi$

donde $\xi = \theta_2 x$, $0 < \theta_2 < 1$

- 770 Desarrollar la función $f(x) = e^x$ en potencias de x hasta el término de x^n

Desarrollo

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^n(\xi)}{n!}x^n$$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^\xi \text{ donde } \xi = \theta x, \text{ y } 0 < \theta < 1$$

- 771 Demostrar que la diferencias entre $\sin(a+h)$ y $\sin a + h \cos a$, no es mayor de $\frac{1}{2}h^2$

Desarrollo

Sea $\tilde{f}(x) = \sin x$ haciendo el desarrollo en potencias de $x - a$

$$\sin x = \sin a + (x-a) \cos a - \frac{(x-a)^2}{2!} \sin a - \frac{(x-a)^3}{3!} \cos a + \dots$$

haciendo $x = a + h$, de donde se tiene:

$$\sin(a+h) = \sin a + h \cos a - \frac{h^2}{2!} \sin a - \frac{h^3}{3!} \cos a + \dots$$

$$\sin(a+h) - \sin a - h \cos a = \frac{h^2}{2} (-\sin a - \frac{h}{3} \cos a - \frac{h^2}{12} \sin a + \dots) \quad \dots(1)$$

$$-\operatorname{sena} - \frac{h}{3} \cos a + \frac{h}{3} \cos a + \frac{h^2}{12} \operatorname{sena} + \dots = \operatorname{sena}(-1 + \frac{h^2}{12} + \dots) + \cos a(-\frac{h}{3} + \frac{h^3}{20} + \dots)$$

$$\text{donde } -1 + \frac{h^2}{12} + \dots \leq 1 \Rightarrow -\frac{h}{3} + \frac{h^3}{20} + \dots \leq 1$$

$$\text{además } 0 \leq \operatorname{sen} \theta \leq 1 \text{ y } 0 \leq \cos \theta \leq 1$$

y además cuando $\operatorname{sen} a \rightarrow 1$, $\cos a \rightarrow 0$ y cuando $\cos a \rightarrow 1$, $\operatorname{sen} a \rightarrow 0$

$$\operatorname{sena}(-1 + \frac{h^2}{12} + \dots) + \cos a(-\frac{h}{3} + \frac{h^3}{20} + \dots) \leq 1$$

$$\frac{h^2}{2} [\operatorname{sena}(-1 + \frac{h^2}{12} + \dots) + \cos a(-\frac{h}{3} + \frac{h^3}{20} + \dots)] \leq \frac{h^2}{2} \quad \dots (2)$$

$$\text{reemplazando (2) en (1) se tiene: } \operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sena} - h \cos a < \frac{h^2}{2}$$

772 Determinar el origen de las formulas aproximadas:

$$\text{a) } \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, |x| < 1 \quad \text{b) } \sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}, |x| < 1$$

y valorar el error de la fórmula

Desarrollo

a) Mediante el desarrollo de Taylor se tiene:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3}{16(1+\xi)^2} \quad \text{el error es:}$$

$$(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3}{16(1+\xi)^2}) - (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}) = \frac{3}{16(1+\xi)^2}$$

Diferenciación de Funciones

$$\text{b) } \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81} \left(\frac{x^3}{(1+\xi)^3} \right) \quad \text{el error es:}$$

$$(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81(1+\xi)^3}) - (1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}) = \frac{5x^3}{81(1+\xi)^3}$$

$$\text{donde } \xi = \theta x \text{ y } 0 < \theta < 1$$

773 Valorar el error de la fórmula: $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$

Desarrollo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} f^v(\xi)$$

$$e^x = e \text{ cuando } x=1 \text{ entonces se tiene:}$$

$$e^x = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} f^v(\xi) \quad \text{donde } f^v(\xi) = e^\xi$$

$$\text{Luego el error será: } \frac{e^\xi}{5!} \quad \text{donde } \xi = \theta x = \theta(1) = \theta$$

Pero $0 < \theta < 1$, el máximo error que puede tener $e^x = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$ cuando se toma el mayor ξ es decir que debe tomarse el máximo valor de θ pero el máximo valor θ aproximado y siempre menor que 1, entonces tomando $\theta = 1$, el error $< \frac{e}{5!}$ donde $e < 3$.

$$\text{Luego redondeando se tiene error } < \frac{3}{5!} = \frac{1}{40} = 0.025$$

- 774 Un hilo pesado, bajo la acción de la gravedad, se cambia formando la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$. Demostrar que para valores pequeños de $|x|$ la forma que toma

el hilo puede representarse aproximadamente por la parábola: $y = a + \frac{x^2}{2a}$

Desarrollo

Como $|x|$ es pequeño utilizaremos la fórmula de MACLAURIN.

$$\text{Sea } f(x) = y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow f(0) = a$$

$$f(x) = a \cosh \frac{x}{a} = a + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{4!a^3} + \dots \text{ como } |x| \text{ es pequeño entonces } |x| = 0$$

$$\text{Luego } \frac{x^4}{4!a^3} + \frac{x^6}{6!a^5} + \dots \Rightarrow \text{o puesto que } \frac{x^n}{n!a^{n-1}} \Rightarrow \text{o para } |x| \Rightarrow 0$$

$$\text{Luego } a \cosh \frac{x}{a} = a + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{4!a^3} + \dots \approx a + \frac{x^2}{2a} = y$$

$$\text{Por lo tanto } a \cosh \frac{x}{a} \approx a + \frac{x^2}{2a}$$

- 775 Demostrar que cuando $|x| \leq a$, con una precisión hasta de $\left(\frac{x}{a}\right)^2$, se verifica la igualdad aproximada $e^{\frac{x}{a}} \approx \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

Desarrollo

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ de donde } \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2}$$

Diferenciación de Funciones

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2a} + \frac{3x^2}{8a^2}$$

multiplicando ambos miembros se tiene que: $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \approx 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} \dots$

ahora haciendo el desarrollo de $e^{\frac{x}{a}}$ en potencias de $\frac{x}{a}$:

$$e^{\frac{x}{a}} \approx 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} \dots$$

de (1) y (2) se tiene que: $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \approx e^{\frac{x}{a}}$

2.9. REGLA DE L' HOSPITAL - BERNOULLI PARA CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS.-

a) CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE LAS FORMAS

$$\frac{0}{0} \text{ Y } \frac{\infty}{\infty} \text{.-}$$

Consideremos $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables para $0 < |x - a| < \delta$ sin que la función $g(x)$ se reduzca a cero, si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitamente pequeño o infinitamente grandes cuando $x \Rightarrow a$, es decir si la fracción

$\frac{f(x)}{g(x)}$ representa en el punto $x = a$, una expresión indeterminada

forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, tendremos que:

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ a condición que este límite de las derivadas exista.

También esta regla se aplica cuando $x \Rightarrow \infty$, si la fracción $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ es una expresión indeterminada se vuelve a aplicar esta regla.

b) OTRAS FORMAS INDETERMINADAS.-

Para hallar los límites de expresiones indeterminadas de la forma $0, \infty$, se transforma los correspondientes productos $f_1(x) \cdot f_2(x)$ donde $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = \infty$ en la fracción.

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \text{ (forma } \frac{0}{0} \text{) o también } \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \text{ (forma } \frac{\infty}{\infty} \text{)}$$

Para el caso de las indeterminadas de la forma $\infty - \infty$ se transforma la diferencia $f_1(x) - f_2(x)$ en el producto $f_1(x)[1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}]$ y se calcula el

límite de la fracción $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$, si el límite $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, esta expresión se reduce a la forma:

$$\frac{1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{f_2(x)}{f_1(x)}} \text{ (forma } \frac{0}{0} \text{)}$$

Los límites cuyas expresiones de las determinadas son de la forma $1^\infty, 0^0$ y ∞^0 .

Se calculan primero tomando logaritmos y después se levanta el logaritmo.

HALLAR LOS LÍMITES QUE SE INDICAN DE LAS FUNCIONES SIGUIENTES:

$$776 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x - 1}{3x^2 - 7} = \frac{3 - 4 - 1}{3 - 7} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$777 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \operatorname{sen} x - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x \operatorname{sen} x}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$778 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{0} \right) = \infty$$

$$779 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2 \cos x} = \frac{2}{2} = 1$$

$$780 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 3 \end{aligned}$$

$$781 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x - 2 \sec^2 x}{-4 \operatorname{sen} 4x} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sec^2 x \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{-4 \operatorname{sen} 4x} \\ &= 2(\sqrt{2})^2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{-4 \operatorname{sen} 4x} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{sen} 4x} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{4 \cos 4x} = - \frac{(\sqrt{2})^2}{4(-1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$782 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos 5x}{\cos x - \operatorname{sen} 5x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \cos 5x - 5 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 5x}{- \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 5x + 5 \cos x \cdot \cos 5x} = \frac{0 - 5}{-1 + 0} = 5$$

$$783 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{5 \cdot 4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{5 \cdot 4 \cdot 3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{5!} = \infty$$

$$784 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}}} = 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 3(0) = 0$$

$$785 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi^2}{2} \sec^2 \frac{\pi x}{2}}{1} = \frac{\pi^2}{2} (1) = \frac{\pi^2}{2}$$

$$786 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{sen}(mx))}{\ln(\operatorname{sen} x)}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{sen} mx)}{\ln(\operatorname{sen} x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{m \cos mx}{\operatorname{sen} mx}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = m \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos mx}{\cos x \cdot \operatorname{sen} mx} \\ &= m \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} mx} = m \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x}{m \sec^2 mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 mx} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$787 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = (0)(1) = 0$$

$$788 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\cos \frac{\pi x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\cos \frac{\pi x}{2}} (1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1} \right) = \frac{2}{\pi}$$

$$789 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arcsen} x \cdot \operatorname{ctg} x$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arcsen} x \cdot \operatorname{ctg} x = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arcsen} x \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x} \cdot (1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2} \cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0}(1)} = 1$$

$$790 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n e^{-x}, \quad n > 0$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^n \cdot \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 0^n \cdot e^{-0} = (0)(1) = 0$$

$$791 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \left(\frac{a}{x} \right)$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \left(\frac{a}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{a}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{a}{x^2} \cos \frac{a}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = a \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{a}{x} = a \cdot \cos 0 = a \cdot 1 = a$$

$$792 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \operatorname{sen} \frac{a}{x}, \quad n > 0$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \operatorname{sen} \frac{a}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{a}{x}}{\frac{1}{x^n}} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^n \cos \frac{a}{x}}{x^2 \frac{1-n}{x^n}} = na \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{a}{x}}{\frac{n+1}{x^n}} = \frac{a}{n} \left(\frac{1}{0} \right) = \infty, \text{ para } n > 0$$

$$\text{Si } n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} x \operatorname{sen} \frac{a}{x} = a$$

$$\text{Si } n < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \operatorname{sen} \frac{a}{x} = 0$$

$$793 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x - 1)$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x - 1)}} = 0, \text{ por la regla de L'Hospital}$$

$$794 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

795 $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6} \right)$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-6x+9}{(x-3)(x^2-x-6)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x^2-x-6)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{6-1} = \frac{1}{5}$$

796 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right)$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2(1-x)} - \frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{3(1-x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3+3\sqrt{x}-2-2\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x^2}}{6(1-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}}{-6} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{-6} = \frac{\frac{3-2-4}{3}}{-6} = \frac{-\frac{1}{3}}{-6} = \frac{1}{12}$$

797 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctgx}} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x \operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x \operatorname{sen} x - \pi}{2 \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x}{-2 \operatorname{sen} x} = \frac{2(1) + \pi(0)}{-2(1)} = -1$$

798 $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} -x} = e^{-0} = 1$$

799 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^x}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \frac{1}{x^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{\ln x}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{-0} = 1$$

800 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^4 + \ln x}$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^4 + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln 3}{x^4 + \ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3 \ln x}{e^4 + \ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln x}{4 + \ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} 3} = e^3$$

801 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x}$

Desarrollo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\operatorname{sen} x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cos \operatorname{sen} x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\cos \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \operatorname{tg} x} = e^{-1(0)} = e^0 = 1\end{aligned}$$

$$802 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\ln(1-x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\cos \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(1-x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(1-x)} = e^0 = 1$$

$$803 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}]^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x} = e^0 = 1$$

$$804 \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$805 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} &= \lim_{x \rightarrow 1} e^{\ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)}{\operatorname{ctg} x \frac{\pi x}{2}}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sec^2 \left(\frac{\pi x}{4} \right)}{-2 \cos \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{4} \right)}} = e^{\frac{2}{2(1)(1)}} = e^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

$$806 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\cos \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg}^2 x}}{\frac{1}{x}}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \cos \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

$$807 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \frac{1}{x}}{\operatorname{ctg} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (-\cos \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ctg} x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \cos \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ctg} x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = e^{1(0)} = e^0 = 1\end{aligned}$$

$$808 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x}$$

Desarrollo

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{ctg} x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos \operatorname{ec} x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}} \\
 &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x}{\cos \operatorname{ec} x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x}{\cos^2 x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}} = e^{-\frac{0}{1}} = e^0 = 1
 \end{aligned}$$

809 Demostrar que los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = 1$

No pueden hallarse por la regla de L'Hospital - Bernoulli. Hallar estos límites directamente.

Desarrollo

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{1} = 0$

donde $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$, puesto que $z = \frac{1}{x}$, cuando $x \rightarrow 0$, $z \rightarrow \infty$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \operatorname{sen} z = ? \Rightarrow -1 \leq \operatorname{sen} z \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{z} \leq \frac{\operatorname{sen} z}{z} \leq \frac{1}{z}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} -\frac{1}{z} \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \Rightarrow 0 \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \leq 0 \quad \therefore \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 0$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \quad \text{donde } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0, \text{ ver parte a)}$$

Diferenciación de Funciones

810 Demostrar que el área de un segmento circular con una ángulo central pequeño, que tiene la cuerda $AB = b$ y la sagita $CD = h$ (según figura) aproximadamente igual a: $S \approx \frac{2}{3}bh$

Con un error relativo tan pequeño como se desea, cuando $\alpha \rightarrow 0$

Desarrollo

Sea R el radio de la circunferencia, el área del segmento está dada exactamente

por la fórmula: $S = \frac{R^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen} \alpha)$, para demostrar que: $S \approx \frac{2}{3}bh$

Calculemos $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{S}{\frac{2}{3}bh}$ y esto debe ser aproximadamente igual a 1.

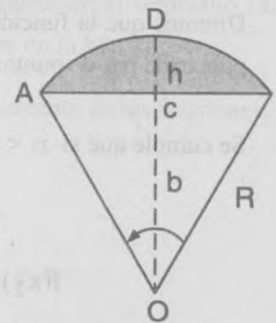
Según la figura $b = R \cos \alpha$

$$H = R - b = R(1 - \cos \alpha)$$

$$\frac{2}{3}bh = \frac{2}{3}R^2 \cos \alpha (1 - \cos \alpha)$$

$$\text{Luego } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{S}{\frac{2}{3}bh} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{R^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{\frac{2}{3}R^2 \cos \alpha (1 - \cos \alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} \right)$$

$$\text{Luego } S \approx \frac{2}{3}bh$$



CAPITULO III

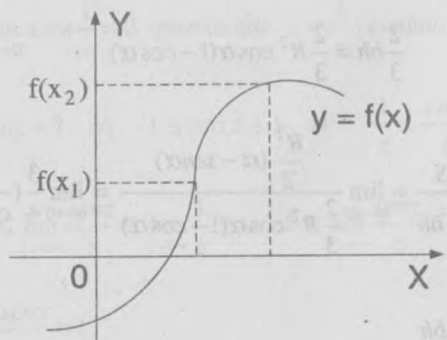
EXTREMO DE LAS FUNCIONES Y APLICACIONES
GEOMETRICAS DE LAS DERIVADAS

3.1. EXTREMOS DE LAS FUNCIONES DE UN ARGUMENTO.-

a) CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE LAS FUNCIONES.-

Diremos que la función $y = f(x)$ es creciente en un intervalo determinado si para cada par de puntos x_1 y x_2 de dicho intervalo.

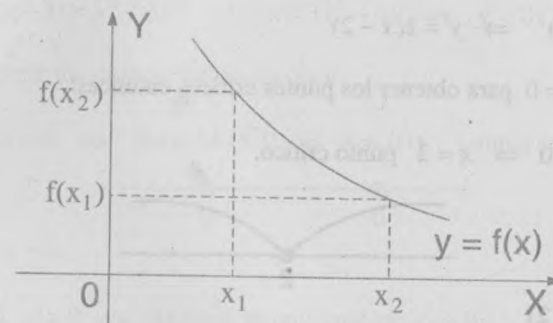
Se cumple que si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



Diremos que la función $y = f(x)$ es decreciente en un determinado intervalo si para cada par de puntos cualesquiera x_1 y x_2 de dicho intervalo se cumple que si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Aplicación de las Derivadas

Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y $f'(x) > 0$ para $a < x < b$ la función es creciente.



En el segmento $[a, b]$. Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y $f'(x) < 0$ para $a < x < b$ la función es decreciente en $[a, b]$

Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones.

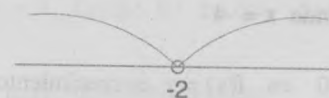
811

$$y = 1 - 4x - x^2$$

Desarrollo

$$y' = -4 - 2x \Rightarrow y' = 0 \text{ para los puntos críticos, es decir:}$$

$$-4 - 2x = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ punto crítico.}$$



$$\text{Como } y = f(x) \Rightarrow y' = f'(x) = -4 - 2x \Rightarrow y' = -2(x + 2)$$

$$\text{Si } x < -2, y' > 0 \Rightarrow f(x) = y, \text{ es creciente en } <-\infty, -2>$$

$$\text{Si } x > -2, y' < 0 \Rightarrow f(x) = y, \text{ es decreciente en } <-2, \infty>$$

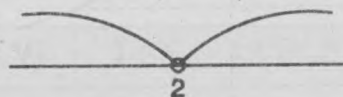
812 $y = (x-2)^2$

Desarrollo

$$y = (x-2)^2 \Rightarrow y' = 2(x-2)$$

Como $y' = 0$ para obtener los puntos críticos entonces:

$$2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ punto crítico.}$$



$$y' = 2(x-2)$$

$$\text{Si } x < 2 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow y = f(x) \text{ es decreciente en } <-\infty, 2>$$

$$\text{Si } x > 2 \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow y = f(x) \text{ es creciente en } <2, \infty>$$

813 $y = (x+4)^3$

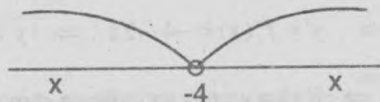
Desarrollo

$$y = (x+4)^3 \Rightarrow y' = 3(x+4)^2$$

Como $y' = 0$, para obtener los puntos críticos es decir:

$$3(x+4)^2 = 0, \text{ de donde } x = -4$$

$$\text{Si } x < -4 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow f(x) = y \text{ es crecimiento en } <-\infty, -4>$$



$$y' = 3(x+4)^2$$

$$\text{Si } x > -4 \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow f(x) = y \text{ es crecimiento en } <-4, \infty>$$

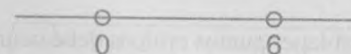
814 $y = x^2(x-3)$

Desarrollo

$$y = x^2(x-3) = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0$$

para obtener los puntos críticos es decir:

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = \{0, 2\} \text{ puntos críticos}$$



$$y' = 3x(x-2)$$

$$\text{Si } x < 0, y' > 0 \Rightarrow f(x) = y \text{ es creciente en } <-\infty, 0>$$

$$\text{Si } 0 < x < 2, y' < 0 \Rightarrow y = f(x) \text{ es decreciente en } <0, 2>$$

$$\text{Si } x > 2 \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow y = f(x) \text{ es creciente en } <2, \infty>$$

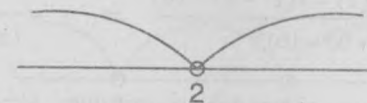
815 $y = \frac{x}{x-2}$

Desarrollo

$$y' = \frac{(x-2) - x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2} \text{ como } y' = 0, \text{ para obtener los puntos críticos.}$$

$$\text{Es decir: } \frac{-2}{(x-2)^2} = 0. \text{ Luego } \nexists x \text{ tal que } y' = 0$$

Además $x = 2$ es punto de discontinuidad



$$y' = \frac{-2}{(x-2)^2}$$

Si $x < 2 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow y = f(x)$ es decreciente en $<-\infty, 2>$

Si $x > 2 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow y = f(x)$ es decreciente en $<2, \infty>$

816

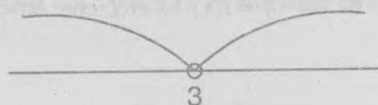
$$y = \frac{1}{(x-3)^2}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{-2}{(x-3)^2}, \text{ para obtener puntos críticos debe ocurrir que } y' = 0$$

Como $y' = \frac{-2}{(x-3)^2}$, no $\exists x$, tal que $y' = 0$

Además $x = 3$ es punto de discontinuidad



Si $x < 3 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow y = f(x)$ es decreciente en $<-\infty, 3>$

Si $x > 3 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow y = f(x)$ es decreciente en $<3, \infty>$

817

$$y = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$$

Desarrollo

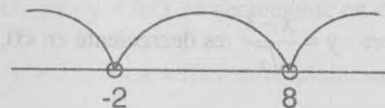
$$y' = \frac{(x^2 - 6x - 16)(x)' - x(x^2 - 6x - 16)'}{(x^2 - 6x - 16)^2} \Rightarrow y' = \frac{-x^2 - 16}{(x^2 - 6x - 16)^2}$$

Para hallar los puntos críticos debe ocurrir que: $y' = 0$

$$\text{Para que } y' = 0 \Rightarrow -x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$$

Aplicación de las Derivadas

Además $x = -2$, $x = 8$ son puntos de discontinuidad



$$y' = f'(x) = -\frac{(x^2 + 16)}{(x^2 - 6x - 16)^2}$$

$-\infty < x < -2$	$y' = f'(x) < 0$
$-2 < x < 8$	$y' = f'(x) < 0$
$8 < x < \infty$	$y' = f'(x) < 0$

Luego la función $y = f(x)$ es decreciente en: $<-\infty, -2>$, $<-2, 8>$, $<8, \infty>$

818

$$y = (x-3)\sqrt{x}$$

Desarrollo

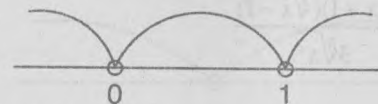
Calcularemos su derivada

$$y' = (x-3)' \sqrt{x} + (x-3)(\sqrt{x})' \Rightarrow y' = \sqrt{x} + \frac{x-3}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$$

Hallaremos los puntos críticos para esto debe cumplirse que $y' = 0 \quad \forall \quad \nexists y$

$$\text{Si } y' = 0 \Rightarrow 3x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ puntos críticos}$$

$$\text{Si } \nexists y' \Rightarrow 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$



$$y' = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$$

$x < 0$, $y = (x-3)\sqrt{x}$ no está definida

$0 < x < 1$, $y' < 0 \Rightarrow y = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$ es decreciente en $(0,1)$;

$1 < x < \infty$, $y' > 0 \Rightarrow y = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$ es decreciente en $(1,\infty)$

819

$$y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$$

Desarrollo

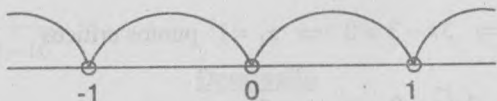
Calcularemos la derivada $y' = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Ahora hallaremos los puntos críticos, para esto hacemos que $y' = 0$ y $\nexists y'$

$$\text{Si } y' = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Si } \nexists y' \Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Puntos críticos



$$y' = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x} - 1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$-\infty < x < -1$, $y' < 0 \Rightarrow y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$ es creciente en $(-\infty, -1)$

Aplicación de las Derivadas

$-1 < x < 0$, $y' < 0 \Rightarrow y = f(x)$ es decreciente en $(-1, 0)$

$0 < x < 1$, $y' > 0 \Rightarrow y = f(x)$ es decreciente en $(0, 1)$

$1 < x < \infty \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow y = f(x)$ es creciente en $(1, \infty)$

820

$$y = x + \sin x$$

Desarrollo

Calculando la derivada $y' = 1 + \cos x$, ahora encontraremos los puntos críticos para esto debe ocurrir $y' = 0 \quad \forall \exists y'$

$$\text{Si } y' = 0 \Rightarrow 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi(2n + 1)$$

ahora veremos si $y' > 0$ v $y' < 0$

pero se conoce que $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

sumando 1 se tiene $0 \leq 1 + \cos x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

luego $y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto $y = x + \sin x$ es creciente en: $(-\infty, \infty)$

821

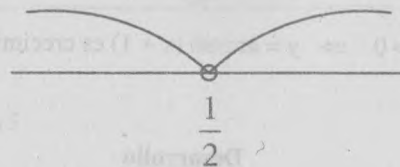
$$y = x \ln x$$

Desarrollo

$$y' = \ln x + 1, \text{ luego } y' = 0 \text{ se tiene: } \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

y para que $\nexists y'$, se tiene $x = 0$

como la función está definida para $x > 0$ entonces:



Como $y' = \ln x + 1$ se tiene:

$$0 < x < \frac{1}{e}, y' < 0 \Rightarrow y = x \ln x, \text{ es decreciente en } <0, \frac{1}{e}>$$

$$\frac{1}{e} < x < \infty, y' > 0 \Rightarrow y = x \ln x, \text{ es creciente en } [\frac{1}{e}, \infty)$$

822 $y = \arcsen(1+x)$

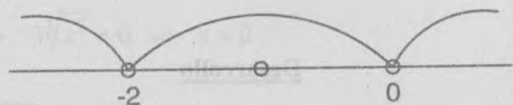
Desarrollo

Calculando la derivada $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1+x)^2}}$ de donde $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$

para hallar los puntos críticos hallaremos los valores de x de tal manera que $\exists y'$.

$$\text{Luego } \sqrt{-x^2-2x} = 0 \Rightarrow -x^2-2x = 0 \Rightarrow -x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$$

puntos críticos



$$y' = \frac{1}{\sqrt{-(x^2+2x)}} = \frac{1}{\sqrt{-x(x+2)}}$$

$-\infty < x < -2$, $\exists y'$ es decir que no es $y' > 0$ ni $y' < 0$, por lo tanto no hay intervalo de crecimiento y de decrecimiento.

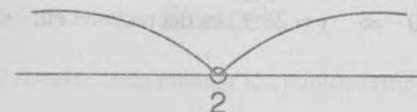
$$-2 < x < 0, y' > 0 \Rightarrow y = \arcsen(x+1) \text{ es crecimiento en: } <-2, 0>$$

823 $y = 2e^{x^2-4x}$

Desarrollo

Aplicación de las Derivadas

Calcularemos su derivada $y' = 2e^{x^2-4x}(2x-4)$, luego para hallar los puntos críticos haremos $y' = 0$, es decir: $2e^{(x^2-4x)}(2x-4) = 0$, de donde $x = 2$



$$y' = 4e^{x(x-4)}(x-2)$$

$$-\infty < x < 2, y' < 0 \Rightarrow y = 2e^{x^2-4x} \text{ es decreciente en: } <-\infty, 2>$$

$$2 < x < \infty, y' > 0 \Rightarrow y = 2e^{x^2-4x} \text{ es creciente en: } <2, \infty>$$

824 $y = 2^{\frac{1}{x-a}}$

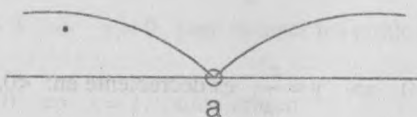
Desarrollo

Calcularemos su derivada $y' = e^{\frac{1}{x-a}} \left(\frac{-1}{(x-a)^2} \right) \ln 2$

$$y' = -\frac{1}{2^{x-a}} \ln 2, \text{ ahora hallaremos los puntos críticos, para esto veremos}$$

valores de " x ", de tal manera que $\exists y'$.

$$\text{Luego } x-a = 0 \Rightarrow x = a \text{ punto critico}$$



$$y' = -\frac{1}{2^{\frac{1}{x-a}}} \ln 2$$

$-\infty < x < a, y' < 0 \Rightarrow y = 2^{\frac{1}{x-a}}$ es decreciente en: $<-\infty, a>$

$a < x < \infty, y' < 0 \Rightarrow y = 2^{\frac{1}{x-a}}$ es decreciente en: $<a, \infty>$

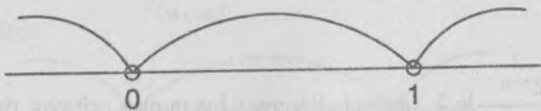
825 $y = \frac{e^x}{x}$

Desarrollo

Calcularemos su derivada $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ahora hallaremos los puntos críticos, para esto debe ocurrir que: $y' = 0 \vee \nexists y'$

Sí $y' = 0 \Rightarrow e^x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

Sí $\nexists y' \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$



$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$-\infty < x < 0, y' < 0 \Rightarrow y = \frac{e^x}{x}$ es decreciente en: $<-\infty, 0>$

$0 < x < 1, y' < 0 \Rightarrow y = \frac{e^x}{x}$ es decreciente en: $<0, 1>$

$1 < x < \infty, y' > 0 \Rightarrow y = \frac{e^x}{x}$ es creciente en: $<1, \infty>$

Aplicaciones de las Derivadas

Averiguar los extremos de las funciones siguientes:

826 $y = x^2 + 4x + 6$

Desarrollo

$y' = 2x + 4 \Rightarrow y' = 0$, para obtener los puntos críticos

es decir: $2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$

$y'' = 2 \Rightarrow y''(-2) > 0 \Rightarrow x = -2$

se tiene un punto mínimo de donde $y = 2$

827 $y = 2 + x - x^2$

Desarrollo

$y' = 1 - 2x \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0$ de donde $x = \frac{1}{2}$ punto crítico

$y'' = -2 \Rightarrow y''(\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow$ en el punto $x = \frac{1}{2}$ se tiene un máximo

de donde $y = \frac{9}{4}$, es decir: $y = \frac{9}{4}$ es un máximo cuando $x = \frac{1}{2}$

828 $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

Desarrollo

$y' = 3x^2 - 6x + 3 \Rightarrow y' = 0$, para obtener los puntos críticos, es decir:

$3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$, punto crítico

$y'' = 6x - 6 \Rightarrow y''(1) = 0 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

no tiene máximo ni mínimo por lo tanto no tiene extremos

829 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

Desarrollo

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 \Rightarrow y' = 0 \text{ para los puntos críticos}$$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0 \text{ de donde: } x_1 = -2, x_2 = 1$$

$$y'' = 12x + 6 \Rightarrow y''(-2) < 0 \Rightarrow \text{en } x_1 = -2$$

se tiene un punto máximo de donde $y = 25$

$$y''(1) = 18 > 0 \Rightarrow \text{en } x_2 = 1 \text{ se tiene un punto mínimo de donde } y = -2$$

830 $y = x^2(x - 12)^2$

Desarrollo

$$y = x^2(x^2 - 24x + 144) \Rightarrow y = x^4 - 24x^3 + 144x^2, \text{ derivando se tiene:}$$

$$y' = 4x^3 - 72x^2 + 288x, \text{ hacemos } y' = 0 \text{ para obtener los puntos críticos}$$

$$\text{es decir: } 4x^3 - 72x^2 + 288x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 12$$

$$y'' = 12x^2 - 144x + 288$$

$$y''(0) = 288 > 0 \Rightarrow \text{en } x_1 = 0 \text{ se tiene un mínimo de donde } y = 0$$

$$y''(-6) = -144 < 0 \Rightarrow \text{en } x_2 = 6 \text{ se obtiene un máximo de donde } y = 1296$$

$$y''(12) = 288 > 0 \Rightarrow \text{en } x_3 = 12 \text{ se obtiene un mínimo de } y = 0$$

831 $y = x(x - 1)^2(x - 2)^3$

Desarrollo

$$\text{Hallaremos su derivada } y' = (x - 2)^2(6x^3 - 16x^2 + 12x - 2)$$

ahora hallaremos los puntos críticos y para esto:

$$y' = 0, \text{ es decir: } (x - 2)^2(6x^3 - 16x^2 + 12x - 2) = 0$$

$$\text{de donde: } x_1 = 1, x_2 = 0.23, x_3 = 1.43, x_4 = 2$$

$$y'' = 2(x - 2)(6x^3 - 16x^2 + 12x - 2) + (x - 2)^2(18x^2 - 32x + 12)$$

$$y'' = 2(x - 2)[6x^3 - 16x^2 + 12x - 2] + (x - 2)(9x^2 - 16x + 6)$$

$$y'' = 2(x - 2)(15x^3 - 50x^2 + 50x - 14)$$

$$y''(1) = -2 < 0 \Rightarrow \text{hay un punto máximo en: } x = 1, \text{ de donde } y = 0$$

$$y''(0.23) > 0 \Rightarrow \text{hay un punto mínimo en } x = 0.23 \text{ de donde } y = -0.76$$

$$y''(1.43) > 0 \Rightarrow \text{hay un punto mínimo en } x = 1.43 \text{ de donde } y = 0.76$$

$$y''(2) = 0, \text{ no hay máximo ni mínimos.}$$

832

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 3}$$

Desarrollo

$$\text{Calculando su derivada } y' = \frac{(x^2 + 3)3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 3)^2} = \frac{3x^4 + 9x^2 - 2x^4}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y' = \frac{x^2(x^2 + 9)}{(x^2 + 3)^2} \text{ hacemos } y' = 0$$

$$\text{para obtener los puntos críticos es decir, } x^2(x^2 + 9) = 0 \text{ de donde } x = 0$$

$$y'' = 2x(x^2 + 3)(-x^4 - 7x^2 + 9)$$

$$y''(0) = 0 \Rightarrow \text{no hay máximos ni mínimos por lo tanto no hay extremos.}$$

$$833 \quad y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Desarrollo

Calculando la derivada se tiene: $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, hacemos $y' = 0$ para obtener

los puntos críticos, es decir: $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

$$y'' = \frac{2(x-1)(-x^2 + 3x - 1)}{(x-1)^4}$$

$y''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ en $x_1 = 0$ hay un punto máximo de donde $y = -2$

$y''(2) = 2 > 0 \Rightarrow$ en $x_2 = 2$ hay un punto mínimo de donde $y = 2$

$$834 \quad y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$$

Desarrollo

Calculando su derivada $y = \frac{-(10x-32)}{x^3}$, haciendo $y' = 0$

para obtener los puntos críticos es decir: $-(10x - 32) = 0 \Rightarrow x = 3.2$

$$y = \frac{-(10x-32)}{x^3} \Rightarrow y'' = \frac{20x-96}{x^4}$$

$y''(3.2) < 0 \Rightarrow$ hay un máximo en el punto $x = 3.2$ de donde $y = \frac{9}{10}$

$$835 \quad y = \frac{16}{x(4-x^2)}$$

Desarrollo

Aplicaciones de las Derivadas

$y' = \frac{16(3x^2 - 4)}{x^2(4-x^2)^2}$, hacemos $y' = 0$ para obtener los puntos críticos, es decir:

$$16(3x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y'' = \frac{16(-12x^7 + 2x^5 - 128x^3 + 128x)}{x^4(4-x^2)^4}$$

$y''(-\frac{2}{\sqrt{3}}) < 0 \Rightarrow y = f(x)$ tiene un máximo en $x_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ de donde $y = -3$

$$836 \quad y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 8}}$$

Desarrollo

Calculando su derivada $y' = \frac{-4x}{(x^2 + 8)^{\frac{3}{2}}}$, haremos $y' = 0$

para encontrar los puntos críticos. Es decir: $-4x = 0 \Rightarrow x = 0$

$$y'' = -\frac{4}{(x^2 + 8)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{12x}{x^2 + 8}\right)$$

$y''(0) = -\frac{4}{8^{\frac{3}{2}}} < 0 \Rightarrow$ en el punto $x = 0$ hay un máximo de donde $y = \sqrt{2}$

$$837 \quad y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$$

Desarrollo

Calculando su derivada se tiene: $y' = \frac{x^2 - 12}{3(x^2 - 4)^{\frac{5}{2}}}$, haciendo $y' = 0$ para

obtener los puntos críticos, es decir: $x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 2\sqrt{3}, x_2 = -2\sqrt{3}$

$$y'' = \frac{x(28 - x^2)}{3(x^2 - 4)^{\frac{5}{2}}}$$

$y''(2\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow$ hay mínimo en $x_1 = 2\sqrt{3}$ de donde $y = \sqrt{3}$

$y''(-2\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow$ hay un máximo en el punto $x_2 = -2\sqrt{3}$, de donde $y = -\sqrt{3}$

838

$$y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

Desarrollo

Calculando su derivada se tiene: $y' = \frac{4x}{3(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}}$, haciendo $y' = 0$ para

obtener los puntos críticos, es decir: $4x = 0 \Rightarrow x = 0$

$$y'' = \frac{4(x^2 - 3)}{9(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \Rightarrow y''(0) < 0 \Rightarrow \text{hay un máximo en } x = 0, \text{ de donde } y = 1$$

además $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ son puntos críticos

$y''(\pm 1) > 0 \Rightarrow$ en $x = \pm 1$ hay un máximo de donde $y = 0$

839

$$y = 2 \sin 2x + \sin 4x$$

Desarrollo

$$y' = 4 \cos 2x + 4 \cos 4x = 4(\cos 2x + \cos 4x)$$

$y' = 8 \cos x \cos 3x$, haciendo $y' = 0$ para los puntos críticos, es decir:

Aplicaciones de las Derivadas

$8 \cos x \cdot \cos 3x = 0$, de donde: $\cos x = 0$ v $\cos 3x = 0$

$$\text{Si } \cos x = 0 \Rightarrow x = (n - \frac{1}{6})\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{2} + \pi$$

$$\cos 3x = 0 \Rightarrow x = (n + \frac{\pi}{6}), n = 0, \pm 1, \pm 2$$

$$y'' = -4 \sin x \cdot \cos 3x - 12 \cos x \cdot \sin 3x$$

$$y''(n - \frac{\pi}{6}) > 0 \Rightarrow \text{hay un mínimo en: } x = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ de donde } y = -\frac{3}{2}$$

$$y''(n + \frac{\pi}{6}) < 0 \Rightarrow \text{hay un máximo en: } x = n + \frac{\pi}{6} \text{ de donde } y = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

840

$$y = 2 \cos \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{3}$$

Desarrollo

De igual manera que el ejercicio 839

De donde $x = 12k\pi$, hay un máximo; de donde $y = 5$ y en $x = 12(k \pm 1)\pi$

$$\text{Hay un máximo de donde } y = 5 \cos \frac{2\pi}{5}$$

$$\text{Cuando } x = 12(k \pm \frac{1}{5})\pi \text{ hay un mínimo de donde: } y = -5 \cos \frac{\pi}{5}$$

Cuando $x = 6(2k + 1)\pi$, hay un mínimo de donde $y = 1$

841

$$y = x - \ln(1 + x)$$

Desarrollo

$$\text{Calculando su derivada se tiene: } y' = 1 - \frac{1}{1+x} \Rightarrow y' = \frac{x}{1+x}$$

haciendo $y' = 0$, para obtener los puntos críticos es decir: $x = 0$

$$y'' = \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow y''(0) > 0 \Rightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un punto de donde } y = 0$$

842 $y = x \ln x$

Desarrollo

Calculando su derivada se tiene: $y' = \ln x + 1$, haciendo $y' = 0$, es decir:

$$\ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$y'' = \frac{1}{x} \Rightarrow y''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0 \Rightarrow \text{en el punto } x = \frac{1}{e} \text{ hay un mínimo de donde:}$$

$$y' = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} \text{ cuando } x = \frac{1}{e}$$

843 $y = x \ln^2 x$

Desarrollo

$y' = \ln^2 x + 2 \ln x$, haciendo $y' = 0$ para obtener los puntos críticos

$$\ln^2 x + 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x (\ln x + 2) = 0$$

de donde se tiene: $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\ln x + 2 = 0 \Rightarrow x = e^{-2}$$

$$y'' = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x}$$

$y''(1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{en } x = 1 \text{ hay un punto mínimo de donde } y = 0 \text{ cuando } x = 1$

$$y''(e^{-2}) = -\frac{4}{e^{-2}} + \frac{2}{e^{-2}} < 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{1}{e^2} \text{ hay un punto máximo de donde}$$

$$y = \frac{1}{e^2} (\ln e^{-2})^2 = \frac{4}{e^2} \Rightarrow y = \frac{4}{e^2}$$

844 $y = \cosh x$

Desarrollo

Calculando la derivada $y' = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, haciendo $y' = 0$

para obtener los puntos críticos, es decir:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$y'' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow y''(0) = 1 > 0 \Rightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un punto mínimo}$
donde $y = 1$.

845 $y = xe^x$

Desarrollo

Calculando su derivada $y' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

haciendo $y' = 0$, para obtener los puntos críticos, es decir:

$$e^x(1+x) = 0 \Rightarrow e^x = 0 \vee 1+x = 0, \text{ de donde } x = -1$$

$$y'' = e^x + e^x + xe^x$$

$y'' = (2+x)e^x \Rightarrow y''(-1) = e^{-1} > 0 \Rightarrow \text{en el punto } x = -1, \text{ hay un mínimo}$

de donde: $y = -\frac{1}{e}$ cuando $x = -1$

846

$$y = x^2 2^{-x}$$

Desarrollo

Calculando su derivada se tiene: $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$

haciendo $y' = 0$, para obtener los puntos críticos es decir:

$$xe^{-x}(2-x) = 0 \text{ de donde: } x_1 = 0, x_2 = 2$$

$$y'' = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2 e^{-x} \Rightarrow y'' = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$$

$$y''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{en el punto } x = 0$$

hay un mínimo de donde $y = 0$ cuando $x = 0$

$$y''(2) = (2 - 8 + 4)e^{-2} \Rightarrow y''(2) = -\frac{2}{e^2} < 0 \Rightarrow \text{en el punto } x = 2 \text{ hay un}$$

máximo de donde: $y = 4e^{-2}$ cuando $x = 2$

847

$$y = \frac{e^x}{x}$$

Desarrollo

$$\text{Calculando su derivada se tiene: } y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

haciendo $y' = 0$ para obtener los puntos críticos, es decir:

$$e^x(x-1) = 0 \text{ de donde } x = 1$$

$$y'' = \frac{x^2 e^x(x-1) + e^x - e^x(x-1)2x}{x^4}$$

$$y'' = \frac{e^x(x^3 - 2x^2 + 2x)}{x^4} \Rightarrow y'' = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$$

$$y'(1) = \frac{e(1 - 2 + 2)}{1} = e > 0 \Rightarrow \text{en el punto } x = 1 \text{ hay un mínimo de } d$$

$$y = 0 \text{ cuando } x = 1$$

848

$$y = x \operatorname{arctg} x$$

Desarrollo

$$y' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} \text{ haciendo } y' = 0 \text{ para obtener los puntos críticos, es de}$$

$$\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow (1+x^2)\operatorname{arctg} x + x = 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} x = -\frac{x}{1+x^2} \Rightarrow x =$$

$$y'' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y'' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y''(0) = 0$$

$\Rightarrow$ no hay máximo ni mínimo.

Determinar los mínimos y máximos absolutos de las siguientes funciones en los segmentos que se indican (cuando los segmentos no se indican, los mínimos y máximos absolutos, de las funciones deben determinarse en todo el campo de existencia).

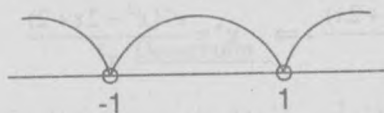
849

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

Desarrollo

$$\text{Calculando su derivada se tiene: } y' = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

haciendo $y' = 0$, para obtener sus puntos críticos, es decir: $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x =$



$$y' = \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\infty < x < -1, y' < 0 \\ -1 < x < 1, y' > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existe en } x = -1 \text{ un m\u00ednimo.}$$

Por lo tanto el valor m\u00ednimo es $y = -\frac{1}{2}$

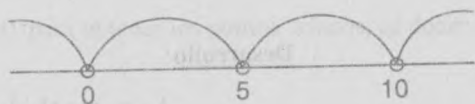
$$\left. \begin{array}{l} -1 < x < 1, y' > 0 \\ 1 < x < \infty, y' < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existe } x = 1 \text{ un m\u00e1ximo y el valor m\u00e1ximo es } y = \frac{1}{2}$$

850

$$y = \sqrt{x(10-x)}$$

Desarrollo

Calculando su derivada se tiene: $y' = \frac{5-x}{\sqrt{x(10-x)}}$ haciendo $y' = 0$, para obtener los puntos cr\u00edticos es decir: $5-x=0$ de donde: $x_1 = 5$, adem\u00e1s $\exists y'$ es decir: $\sqrt{x(10-x)} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ y $x_3 = 10$



Como $y = \sqrt{x(10-x)}$ su campo de existencia es:

$$x(10-x) \geq 0 \Rightarrow x(x-10) \leq 0$$



Luego esta definida para el intervalo $[0,10]$

$$y' = \frac{5-x}{\sqrt{x(10-x)}}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x < 5, y' > 0 \\ 5 < x < 10, y' < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existe en } x = 5 \text{ un m\u00ednimo de donde } y = 5$$

adem\u00e1s en los extremos, es decir en $x = 0$ el valor de $y = 0$ y en $x = 10$ el valor de $y = 0$.

Luego el valor m\u00ednimo cuando $x = 0, 10$ es: $y = 0$ y el valor m\u00e1ximo cuando $x = 5$, es: $y = 5$

851

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x$$

Desarrollo

Calculando su derivada se tiene:

$$y' = 4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x \Rightarrow y' = 4\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x)$$

haciendo $y' = 0$, para obtener los puntos cr\u00edticos se tiene:

$$4\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = 0 \Rightarrow -4\sin x \cos x \cos 2x = 0$$

de donde se tiene: $\sin 2x \cos 2x = 0$

$$\text{de donde: } x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \text{ y } x = k\frac{\pi}{2}, (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

para $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ hay un m\u00ednimo y su valor m\u00ednimo es: $y = \frac{1}{2}$, y cuando

$x = k\frac{\pi}{2}$ hay un valor m\u00e1ximo y su valor es: $y = 1$

852 $y = \arccos x$

Desarrollo

Calculando su derivada se tiene: $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ haciendo que $\bar{x}$ y y' para

obtener los puntos críticos es decir: $\sqrt{1-x^2} = 0$ de donde $\bar{x} = \pm 1$, evaluando en la función $y(1) = 0$, $y(-1) = \pi$

Luego cuando $x = 1$, hay un valor mínimo $y = 0$ y cuando $x = -1$, hay un valor máximo $y = \pi$

853 $y = x^3$ en el segmento $[-1, 3]$

Desarrollo

$y' = 3x^2 \Rightarrow x = 0$, punto critico haciendo la evaluación en la función se tiene: $y(0) = 0$, $y(-1) = -1$, $y(3) = 27$

Luego cuando $x = -1$, se tiene un valor mínimo en $y = -1$

y cuando $x = 3$, se tiene un valor máximo en $y = 27$

854 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

a) En el segmento $[-1, 5]$ b) En el segmento $[-10, 12]$ Desarrollo

$y' = 6x^2 + 6x - 12$, y haciendo $y' = 0$, se obtiene los puntos críticos, es decir:

$$6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \text{ de donde } x_1 = -2, x_2 = 1, \text{ para}$$

a) consideremos $x_2 = 1$, como puntos críticos.

Aplicación de la Derivada

Luego evaluando se tiene: $y(1) = -6$, $y(-1) = 14$, $y(5) = 266$

Luego cuando $x = 1$ se tiene un valor mínimo en $y = -6$

y cuando $x = 5$ se tiene un valor máximo en $y = 266$

855 Demostrar que para los valores positivos de "x", se cumple la desigualdad $x + \frac{1}{x} \geq 2$

Desarrollo

Por hipótesis se tiene $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x}$ y $\frac{1}{\sqrt{x}}$ están bien expresado, luego:

$$(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \geq 0 \Rightarrow x - 2\sqrt{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}) + \frac{1}{x} \geq 0$$

$$x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

856 Determinar los coeficientes "p" y "q" del trinomio cuadrado $y = x^2 + px + q$ de forma que $y = 3$, será un mínimo de este trinomio cuando $x = 1$, da explicación geométrica del resultado obtenido.

Desarrollo

Calculando su derivada se tiene: $y' = 2x + p$, haciendo $y' = 0$ para obtener

puntos críticos se tiene: $2x + p = 0 \Rightarrow x = -\frac{p}{2}$ por dato se tiene que y

cuando $x = 1$, es decir: $-\frac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = -2$

Sí $y = 3$ cuando $x = 1 \Rightarrow$ en $y = x^2 + px + q \Rightarrow 3 = 1 - 2 + q \Rightarrow q =$

Luego los valores de "p" y "q" son: $p = -2$ y $q = 4$

- 857 Demostrar la desigualdad: $e^x > 1 + x$ para $x \neq 0$.

Desarrollo

Consideremos la función $f(x) = e^x - (1 + x)$ de esta función se tiene:

$$f(x) > f(0) \text{ para } x \neq 0$$

$$\text{Como } f(x) = e^x - (1 + x) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\text{Como } f(x) > f(0) \Rightarrow e^x - (1 + x) > 0 \Rightarrow e^x > 1 + x \text{ para } x \neq 0$$

Demostrar las desigualdades:

858 $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ para $x > 0$

859 $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ para $x \neq 0$

860 $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ para $x > 0$

- 861 Dividir un número positivo dado "a" en dos sumandos, de tal forma que su producto sea el mayor posible.

Desarrollo

Sean "x" e "y" los dos sumandos. Luego $a = x + y$ de donde $y = a - x$

Además $p(x) = xy = ax - x^2$ producto de los sumandos

Luego $p'(x) = a - 2x$ de donde $p'(x) = 0$

Se tiene $x = \frac{a}{2}$ como $y = a - x \Rightarrow y = \frac{a}{2}$

Luego cada uno de los sumando debe ser igual a: $\frac{a}{2}$

Aplicación de la Derivada

- 862 Torcer un trozo de alambre de longitud ℓ , de manera que forme un rectángulo cuya área sea la mayor posible.

Desarrollo

$$\ell = 2x + 2y ; \text{área} = xy$$

$$\text{como } \ell = 2x + 2y \Rightarrow y = \frac{\ell - 2x}{2}$$

$$\text{Luego } A(x) = xy = x\left(\frac{\ell - 2x}{2}\right) = \frac{x\ell}{2} - x^2$$

$$A'(x) = \frac{\ell}{2} - 2x \Rightarrow A'(x) = 0 \text{ para obtener los puntos críticos, es decir:}$$

$$\frac{\ell}{2} - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\ell}{4}$$

$$A''(x) = -2 \Rightarrow A''\left(\frac{\ell}{4}\right) = -2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\ell}{4} \\ y = \frac{\ell}{4} \end{cases}$$

se obtiene el área mayor posible.

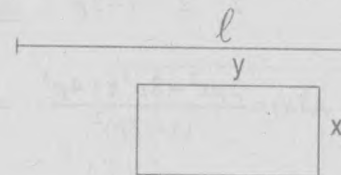
- 863 ¿Cuál de los triángulos rectángulos de perímetro dado igual a $2p$, tiene m. área?

Desarrollo

$$2p = x + y + z, \text{ donde } z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2p \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2p - (x + y)$$

$$x^2 + y^2 = 4p^2 - 4p(x + y) + x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow 0 = 4p^2 - 4px - 4py + 2xy$$



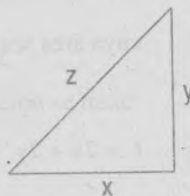
de donde $y = \frac{2px - 2p^2}{x - 2p}$

$$A(x) = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2} \left(\frac{2px - 2p^2}{x - 2p} \right) \Rightarrow A(x) = \frac{px^2 - xp^2}{x - 2p}$$

$$A'(x) = \frac{2px^2 - 8p^2x + 4p^3}{(x - 2p)^2} \Rightarrow A'(x) = 0$$

para los puntos críticos, es decir: $2px^2 - 8p^2x + 4p^3 \Rightarrow x = 2p \pm \sqrt{2}p$

es decir $x = 2p + \sqrt{2}p$, $y = 2p - \sqrt{2}p$, son los triángulos isósceles



- 864 Hay que hacer una superficie rectangular cercada por tres de sus lados con tela metálica y lindante por el cuarto con una larga pared de piedra. ¿qué forma será más conveniente dar a la superficie (para que su área sea mayor), si se dispone en total de 1 m. lineales de tela metálica?

Desarrollo

Pared de piedra

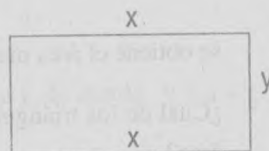
$$2x + y = \ell \Rightarrow y = \ell - 2x$$

$$A(x) = xy = x(\ell - 2x) = x\ell - 2x^2$$

$$A'(x) = \ell - 4x \Rightarrow A'(x) = 0, \text{ es decir: } x = \frac{\ell}{4}$$

$$\text{como } y = \ell - 2x \Rightarrow y = \frac{\ell}{2}$$

Luego las dimensiones debe de ser una el doble de la otra.



Aplicación de la Derivada

- 865 De una hoja de cartón cuadrada, de lado a, hay que hacer una caja rectangular abierta, que tenga la mayor capacidad posible, recortando para ello cuadrados en los ángulos de la hoja y doblando después los salientes de la figura en forma de cruz, así obtenido.

Desarrollo

$$\text{Área base} = (a - 2x)^2$$

$$Vol = V(x) = (a - 2x)^2 x$$

$$V(x) = (a^2 - 4ax + 4x^2)x$$

$$V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

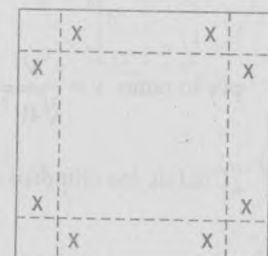
$$V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 \Rightarrow V'(x) = 0, \text{ es decir:}$$

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{a}{6}, x_2 = \frac{a}{2}$$

$$V''(x) = 24x - 8a \Rightarrow V''\left(\frac{a}{6}\right) = -4 < 0 \text{ en } x_1 = \frac{a}{6} \text{ hay un máximo}$$

$$V''\left(\frac{a}{2}\right) = 4 > 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{a}{2} \text{ hay un mínimo}$$

Luego el lado del cuadrado que se corta debe ser igual a $\frac{a}{6}$



- 866 Un deposito abierto, de hoja delata con fondo cuadrado, debe tener capacidad para V litros. ¿Qué dimensión se debe tener dicho deposito para que en su fabricación se necesite la menor cantidad de hoja de lata?

Desarrollo

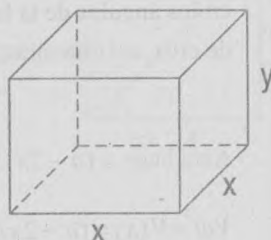
$$\text{El área lateral} = x^2 + 4xy$$

$$V = x^2 y = \text{Volumen} \quad \dots (2)$$

$$y = \frac{V}{x^2} \text{ luego } A(x) = x^2 + \frac{4V}{x}$$

$$A'(x) = 2x - \frac{4V}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V}$$

$$\text{por lo tanto } y = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} \text{ y } x = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$$



867 ¿Cuál de los cilindros de volumen dados tienen menor superficie total?

Desarrollo

$$V_c = \pi r^2 h, \text{ derivando se tiene: } V'_c(r) = \pi(2rh + r^2 h')$$

pero $V'_c(r) = 0$ por ser constante

$$\Rightarrow 2rh + r^2 h' = 0 \Rightarrow h' = -\frac{2h}{r} \quad \dots (1)$$

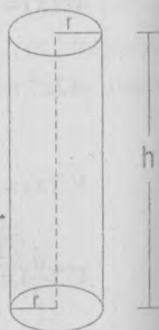
$$A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2, \text{ derivando se tiene}$$

$$A'_t(r) = 2\pi h + 4\pi r + 2\pi r h' \quad \dots (2)$$

$$\text{reemplazando (1) en (2)} \quad A'_t(r) = 2\pi h + \pi r + 2\pi r \left(-\frac{2h}{r}\right)$$

$$\text{igualando a cero se tiene: } 2\pi h + 2\pi r \left(-\frac{2h}{r}\right) + 4\pi r = 0$$

$h - 2h + 2r = 0 \Rightarrow h = 2r$. Los cilindros cuya altura es igual al diámetro de la base.



Aplicación de la Derivada

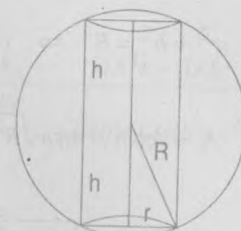
868 Inscribir en una esfera dado un cilindro de volumen máximo.

Desarrollo

Sean r = radio de la base del cilindro

$2h$ = altura del cilindro

R = radio de la esfera



$$\text{pero } r^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow \frac{dh}{dr} = -\frac{r}{h} \quad \dots (1)$$

$$V = 2\pi r^2 h \quad \dots (2)$$

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi \left(r^2 \frac{dh}{dr} + 2rh \right), \text{ reemplazando (1) en (2)}$$

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi \left(-\frac{r^3}{h} + 2rh \right) \text{ como } \frac{dV}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi \left(-\frac{r^3}{h} + 2rh \right) = 0 \Rightarrow r^2 = 2h^2$$

$$\text{Como } r^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow 2h^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Luego el volumen será máximo cuando $2h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ y el radio $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$

869 Inscribir en una esfera dada un cilindro que tenga la mayor superficie lateral posible.

Desarrollo

Altura del cilindro = $2h$

r = radio del cilindro

$$r^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - h^2}$$

$$A_l = 4\pi rh = 4\pi h \sqrt{R^2 - h^2}$$

$$A_l(h) = 4\pi(\sqrt{R^2 - h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{R^2 - h^2}}) \Rightarrow A'_l(h) = 4\pi(\frac{R^2 - h^2 - h^2}{\sqrt{R^2 - h^2}})$$

$$A'_l(h) = \frac{4\pi(R^2 - 2h^2)}{\sqrt{R^2 - h^2}} \Rightarrow A'_l(h) = 0, \text{ para obtener los puntos críticos.}$$

$$\text{Luego } 4\pi(R^2 - 2h^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}R \Rightarrow 2h = \sqrt{2}R$$

Luego la altura del cilindro en $\sqrt{2}R$ para que tenga la mayor superficie lateral posible.

870 Inscribir en una esfera dada un cono de volumen máximo.

Desarrollo

Sea h = altura del cono, r = radio del cono

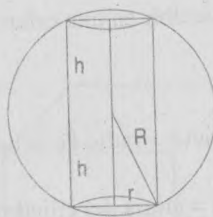
$$x^2 = R^2 - r^2$$

$$\text{además } x^2 = (h - R)^2 = h^2 - 2hR + R^2$$

$$x^2 = R^2 - r^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = h^2 - 2hR + R^2$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{R^2 - h^2} \text{ por otro lado se tiene:}$$

$$z = \sqrt{h^2 + 2hr - h^2} \Rightarrow z = \sqrt{2Rh}$$



$$A_{lc} = \pi rz \Rightarrow A_{lc} = \pi \sqrt{2hr - R^2} \cdot \sqrt{2Rh}$$

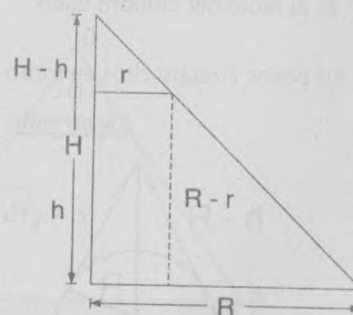
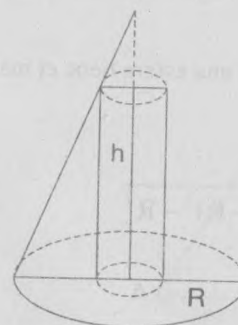
$$\frac{dA_{lc}}{dh} = \pi \left(\frac{2R\sqrt{2Rh - h^2}}{2\sqrt{2Rh}} - \frac{\sqrt{2Rh(2R - 2h)}}{2\sqrt{2Rh - h^2}} \right) \Rightarrow \frac{dA_{lc}}{dh} = \frac{4R^2h - 3Rh^2}{(2Rh)^{\frac{1}{2}}(2Rh - h^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dA_{lc}}{dr} = 0 \text{ es decir } Rh(4R - 3h) = 0 \Rightarrow h = \frac{4}{3}R$$

Luego el volumen es máximo cuando la altura $h = \frac{4}{3}R$ donde R es el radio de la esfera.

872 Circunscribir en torno a un cilindro dado un cono recto que tenga el máximo volumen posible los planos y centros de sus bases circulares coinciden?

Desarrollo



Sean H = altura del cono

R = radio del cono

h = altura del cilindro

r = radio del cilindro

$$\frac{H-h}{r} = \frac{H}{R} \Rightarrow R = \frac{Hr}{H-h} \quad \dots (1)$$

$$V_c = \frac{\pi}{3} R^2 H \Rightarrow V_c = \frac{\pi}{3} H \left(\frac{Hr}{H-h} \right)^2$$

$$V_c = \frac{\pi}{3} \frac{H^3 r^2}{(H-h)^2} \Rightarrow \frac{dV_c}{dH} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{3h^2(H-h)^2 - H^3 2(H-h)}{(H-h)^4}$$

$$\text{como } \frac{dV_c}{dH} = 0 \Rightarrow \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{3h^2(H-h)^2 - H^3 2(H-h)}{(H-h)^4} = 0$$

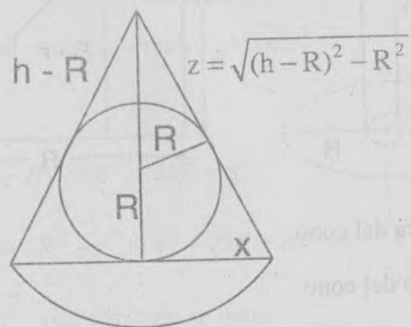
$$\text{de donde } H = 3h \quad \dots (2)$$

$$\text{reemplazando (2) en (1) se tiene } R = \frac{3r}{2}$$

Se tendrá el menor volumen posible cuando el radio de la base del cono es $\frac{3}{2}r$ donde "r" es el radio del cilindro dado.

873 ¿Cuál de los conos circunscritos en torno a una esfera tiene el menor volumen?

Desarrollo



Por semejanza de triángulo se tiene:

$$\frac{x}{R} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 2hr}} \Rightarrow x^2 = \frac{h^2 R^2}{h^2 - 2hr} \Rightarrow x^2 = \frac{hR^2}{h - 2R}$$

$$\text{además } V_c = \frac{1}{3} \pi x^2 h = \frac{1}{3} \pi h \left(\frac{hR^2}{h - 2R} \right)$$

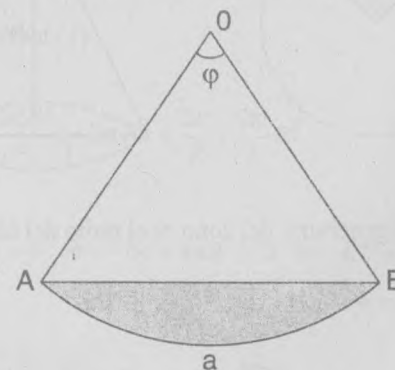
$$V_c = \frac{\pi h^2 R^2}{3(h - 2R)} \Rightarrow \frac{dV_c}{dh} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{h^2 R^2 - 4hR^3}{(h - 2R)^2} \right)$$

$$\text{Luego } \frac{dV_c}{dh} = 0 \Rightarrow h^2 R^2 - 4hR^3 = 0 \text{ de donde } h = 4R$$

Por lo tanto el cono circunscrito en una esfera de menor volumen es cuando altura "h" es igual a 4 veces el radio de la esfera, es decir: $h = 4R$

874

Una faja de hoja de lata de anchura "a" debe ser encorvada longitudinalmente en forma de canelón abierto (fig. N° 26) ¿Qué ángulo central debe tomarse para que el canelón tenga la mayor capacidad posible?



Desarrollo

A = área de la parte sombreada es = ?

A = área del sector circular

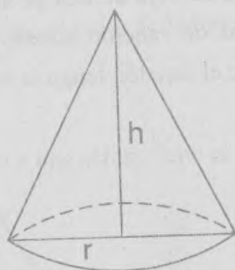
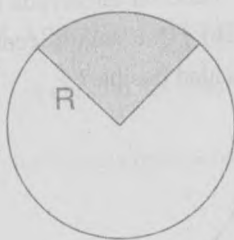
Área del ΔAOB

$$A = \frac{\varphi}{2} R^2 - R \left(\frac{R \sin \varphi}{2} \right) = \frac{R^2}{2} (\varphi - \sin \varphi)$$

$$\frac{dA}{d\varphi} = \frac{R^2}{2} (1 - \cos \varphi) = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

Luego como $0 \leq \varphi \leq \pi$ Por lo tanto para detener la mayor capacidad posible se tiene $\varphi = \pi$

- 875 De una hoja circular hay que cortar un sector tal que enrollado nos dé un embudo de la mayor capacidad posible.

DesarrolloSe observa que la generatriz del cono es el radio del círculo $R = g$

$$\text{Además } r^2 = R^2 - h^2$$

$$\text{Volumen del cono} = V_c = \frac{\pi r^2 h}{3} \text{ como } r^2 = R^2 - h^2$$

$$V_c = \frac{\pi h (R^2 - h^2)}{3} = \frac{\pi}{3} h (R^2 - h^2)$$

Aplicación de la Derivada

$$V_c' = \frac{\pi}{3} (R^2 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

- 876 Un recipiente abierto esta formado por un cilindro, terminado por su inferior en una semi-esfera; el espesor de sus paredes es constante y las dimensiones deberá tener dicho recipiente para que, sin variar su capacidad, se gaste en hacerlo la menor cantidad de material?

Desarrollo

$$A_t = 2\pi R h + 2\pi R^2 \quad \dots (1)$$

$$c = R^2 h + \frac{2\pi R^3}{3} \Rightarrow h = \frac{c - \frac{2\pi R^3}{3}}{R^2}$$

$$h = \frac{3c - 2\pi R^3}{3\pi R^2} \quad \dots (2)$$

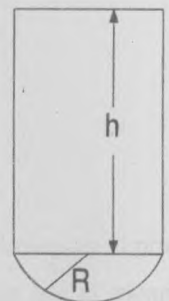
reemplazando (2) en (1)

$$A_t = 2\pi R \left(\frac{3c - 2\pi R^3}{3\pi R^2} \right) + 2\pi R^2 = \frac{2c}{R} + \frac{2\pi}{3} R^2$$

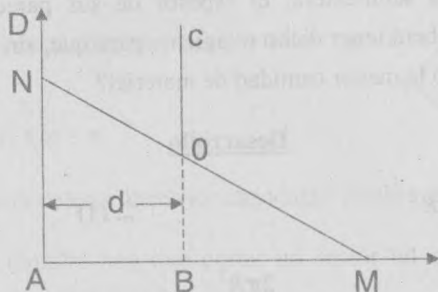
$$A_t' = \frac{2c}{R^2} + \frac{4\pi R}{3} = 0 \Rightarrow -6c + 4\pi R^3 = 0 \Rightarrow R^3 = \frac{3c}{2\pi} \text{ reemplazando en}$$

$$h = \frac{3c - 2\pi R^3}{3\pi R^2} = \frac{3c - 3c}{3\pi R^2} = 0 \Rightarrow h = 0$$

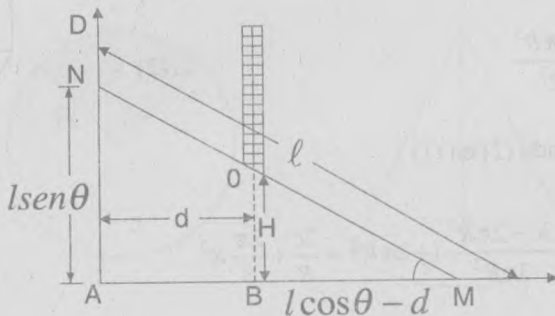
La altura de la parte cilíndrica debe ser igual a cero; es decir, el recipiente debe tener forma de semi-esfera.



- 877 Determinar la altura mínima $h = OB$ que puede tener la puerta de una torre ABCD, para que a través de ella se puede introducir en la torre una barra rígida MN, de longitud ℓ , cuyo extremo M resbalará a lo largo de la línea horizontal AB. La anchura de la torre $d < \ell$



Desarrollo



Haciendo rodar la barra por ambas paredes a una distancia "d", desde la pared vertical, la barra se levantará una longitud H del suelo.

El problema nos pide este máximo levantamiento, para esto por semejanza de triángulo se tiene:

$$\frac{l \cos \theta}{H} = \frac{l \cos \theta}{l \sin \theta}, \text{ de donde } H = \frac{l \cos \theta - d}{\operatorname{ctg} \theta} = (l \cos \theta - d) \operatorname{tg} \theta$$

Aplicación de la Derivada

$$\frac{dH}{d\theta} = (l \cos \theta - d) \sec^2 \theta + \operatorname{tg} \theta (-l \sin \theta) = 0$$

$$\frac{l \cos \theta - d}{\cos^2 \theta} = \frac{l \sin^2 \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \cos^3 \theta = \frac{d}{l}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$\cos \theta = \sqrt[3]{\frac{d}{l}} \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$H = (l \sqrt[3]{\frac{d}{l}} - d) \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{\frac{d}{l}}}$$

$$\text{simplificando se tiene que: } H = (\sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{d^2})^{\frac{3}{2}}$$

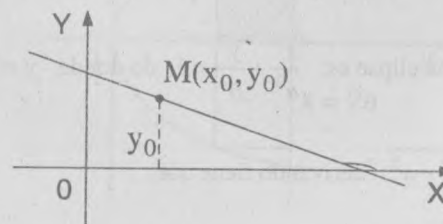
- 878 En un plano de coordenadas se da un punto, $M_0(x_0, y_0)$, situado en el primer cuadrante. Hacer pasar por este punto una recta, de manera que el triángulo formado entre ella y los semi ejes positivos coordenados tenga la menor área posible.

Desarrollo

Sea L: $y - y_0 = \operatorname{tg} \theta (x - x_0)$ donde $mL = \operatorname{tg} \theta$

Haciendo las intersecciones con los ejes coordenados.

$$y = 0 \Rightarrow x = x_0 - y_0 \operatorname{ctg} \theta ; x = 0 \Rightarrow y = y_0 - x_0 \operatorname{tg} \theta$$



$$A = \frac{(x_0 - y_0 \operatorname{ctg} \theta)(y_0 - x_0 \operatorname{tg} \theta)}{2} = \frac{2x_0 y_0 - x_0^2 \operatorname{tg} \theta - y_0^2 \operatorname{ctg} \theta}{2}$$

$$\frac{dA}{d\theta} = -\frac{x_0^2 \sec^2 \theta}{2} + \frac{y_0^2 \cos^2 \theta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{y_0^2}{x_0^2} = \frac{\sec^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

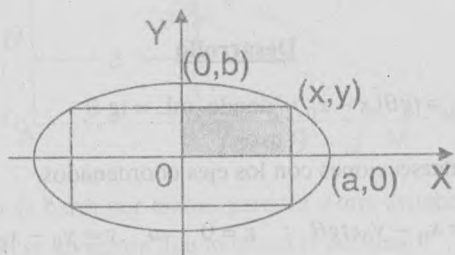
de donde $\operatorname{tg} \theta = \pm \frac{y_0}{x_0}$ reemplazando en la ecuación de la recta L, se tiene:

$$L: y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0) \text{ puesta que } \operatorname{tg} \theta = \pm \frac{y_0}{x_0}$$

$$L: xy_0 + xy = 2x_0 y_0 \Rightarrow L: \frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1$$

- 879 Inscribir en una elipse dado, un rectángulo de la mayor área posible que tenga los lados paralelos a los ejes de la propia elipse.

Desarrollo



La ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ de donde $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

$A = xy = \frac{bx}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ derivando tiene que:

Aplicación de la Derivada

$$\frac{dA}{dx} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{bx^2}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{como } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Luego las dimensiones del rectángulo son: $2x = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$, $2y = \frac{2b}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}b$

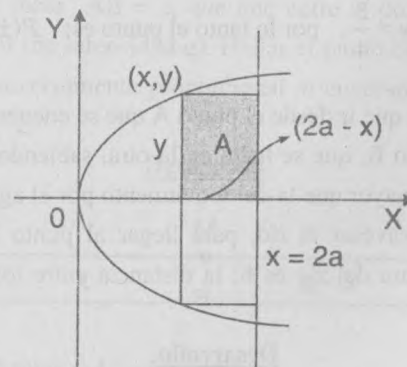
- 880 Inscribir un rectángulo de la mayor área posible en el segmento de la parábola $y^2 = 2px$ cortado por la recta $x = 2a$.

Desarrollo

$A = (2a - x)y$, como $y^2 = 2px$ se tiene: $A = (2a - \frac{y^2}{2p})y = 2ay - \frac{y^3}{2p}$

$$\frac{dA}{dy} = 2a - \frac{3y^2}{2p} = 0 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{\frac{ap}{3}} \text{ como } y^2 = 2px \Rightarrow x = \frac{2a}{3}$$

Luego los vértices deben estar en $(\frac{2a}{3}, \pm 2\sqrt{\frac{ap}{3}})$



- 881 Hallar el punto de la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$, en el que la tangente forme el eje OX el ángulo de mayor absoluto posible.

Desarrollo

La gráfica es simétrica por lo tanto el ángulo está en el primer cuadrante entonces el ángulo varía entre 0° , 90° .

Luego a mayor ángulo será la tangente del mínimo.

$$y' = \frac{dy}{dx} \text{ (tangente del ángulo)}$$

Luego $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ nos da las coordenadas del punto de tangencia del ángulo mencionado.

$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -2\left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^3}\right] = 0$$

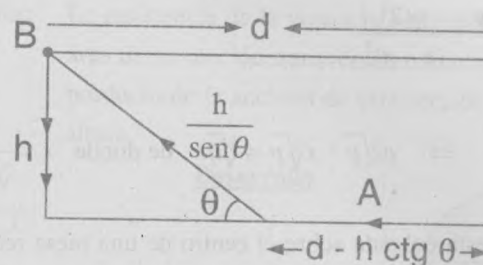
$$\Rightarrow 8x^2 = 2(1+x^2) \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

para $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{3}{4}$, por lo tanto el punto es: $P(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$

- 882 Un corredor tiene que ir desde el punto A que se encuentra en una de las orillas de un río, al punto B, que se halla en la otra, sabiendo del movimiento por la orilla es k veces mayor que la del movimiento por el agua, determinar bajo que ángulo deberá atravesar el río, para llegar al punto B en el menor tiempo posible. La anchura del río es h ; la distancia entre los puntos A y B (por la orilla), es d .

Desarrollo

Aplicación de la Derivada



Como $e = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{2}{V_m}$ donde V_m = velocidad del movimiento

V = velocidad del agua

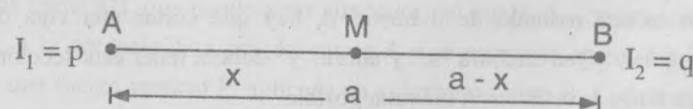
Reemplazando $t = \frac{d - h \operatorname{ctg} \theta}{kv}$ calculando valores críticos

$$\frac{dt}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{dt}{d\theta} = \frac{h}{v}(-1)\operatorname{sen}^{-2}\theta \cdot \cos\theta - \frac{h}{kv}\left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{k\operatorname{sen}^2\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{k} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{1}{k}$$

- 883 En el segmento recto $AB = a$, que une entre sí dos focos luminosos A (de intensidad p) y B (de intensidad q). Hallar el punto de menos iluminado M. La iluminación es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco luminoso).

Desarrollo



$$E_t = \text{iluminación total} = I_1 + I_2$$

$$\frac{dE_t}{dx} = 0 = \frac{-2p}{x^3} + \frac{q(2)}{(a-x)^3}$$

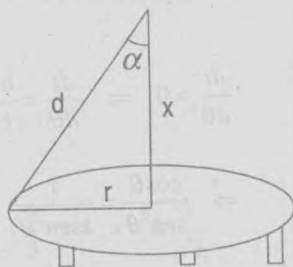
$$\frac{p}{x^3} = \frac{q}{(a-x)^3} \Rightarrow a\sqrt[3]{p} - x\sqrt[3]{p} = \sqrt[3]{q}x \text{ de donde } x = \frac{a\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}}$$

- 884 Una lámpara está colgada sobre el centro de una mesa redonda de radio r . ¿A qué altura deberá estar la lámpara sobre la mesa para que la iluminación de un objeto que se encuentre en el borde sea la mejor posible? (la iluminación es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia de los rayos luminosos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco de luz).

Desarrollo

$$E = \frac{I \cos \alpha}{d^2} = \frac{I_x}{d^3} = \frac{I_x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dE}{dx} = 0 = \frac{I(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - x(\frac{3}{2})(r^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} 2x}{(r^2 + x^2)^3}$$



$$= (r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(r^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = 0 = (r^2 + x^2)[r^2 + x^2 - 3x^2] = 0$$

$$\therefore r^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

- 885 de un tronco redondo de diámetro d , hay que cortar una viga de sección rectangular. ¿Qué anchura " x " y altura " y " deberá tener esta sección para que la viga tenga la resistencia máxima posible?

a) a la compresión.

b) a la flexión

Observación: La resistencia de la viga a la compresión es proporcional al área de su sección transversal, mientras que a la flexión es producto de la anchura de esta sección por el cuadrado de la altura.

Desarrollo

$$y = \sqrt{d^2 - x^2}$$

a) $R_c = kA^2 = kxy = kx\sqrt{d^2 - x^2}$

$$R_c = k(d^2x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dR_c}{dx} = 0 = k\left(\frac{1}{2}\right)(d^2x^2 - x^4)^{-\frac{1}{2}}(2d^2x - 4x^3) \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}k \frac{(2d^2x - 4x^3)}{(d^2x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$2d^2x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 2d^2x = 4x^3 \text{ por lo tanto } x = \frac{d}{\sqrt{2}}, y = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

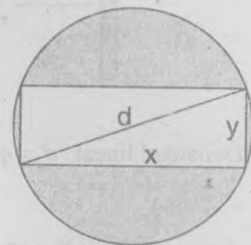
b) $R_F = xy^2$ del gráfico se tiene: $y^2 = d^2 - x^2$... (α)

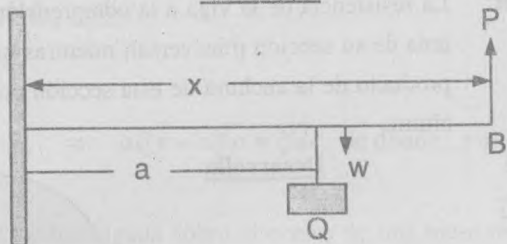
$$R_F = kx(d^2 - x^2) \Rightarrow R_F = k(d^2x - x^3), \text{ derivando se tiene:}$$

$$\frac{dR_F}{dx} = k(d^2 - 3x^2) \Rightarrow d^2 = 3x^2 \text{ de donde } x = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

$$\text{En } (\alpha) \ y^2 = d^2 - \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow y^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{2}{3}}d$$

- 886 Una barra AB, que puede girar alrededor del punto A, soporta una carga de q kg. a la distancia de a cm. del punto A y se mantiene en equilibrio por medio de una fuerza vertical P , aplicada en su extremo libre B. Cada uno de los extremos de la barra pesa q kg. Determinar la longitud x de la misma, de tal forma que la fuerza P sea la mínima posible y hallar P mínimo.



Desarrollo

Densidad lineal $d = q \frac{kg}{cm}$ de donde $d = \frac{\text{peso } T}{\text{long } T}$

$$M_A = 0 \Rightarrow P_x = Q_a + w\left(\frac{x}{2}\right), \text{ donde } w = qx \text{ por lo tanto } P_x = Q_a + \frac{q}{2}x^2$$

$$P = \frac{Q_a}{x} + \frac{q}{2}x \quad \dots (\alpha)$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 = -\frac{Q_a}{x^2} + \frac{q}{2} \Rightarrow \frac{Q_a}{x^2} = \frac{q}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2Q_a}{q}} \quad \dots (\beta)$$

reemplazando (β) en (α) tenemos:

$$P_{\min} = \frac{Q_a}{\sqrt{\frac{2Q_a}{q}}} + \frac{q}{2} \left(\sqrt{\frac{2Q_a}{q}} \right) \Rightarrow P_{\min} = \sqrt{2Q_a q}$$

- 887 Los centros de tres esferas perfectamente elásticas A, B y C están situadas en la línea recta. La esfera A, de masa M, choca a una velocidad "v" con la esfera B, la cual, recibiendo una determinada velocidad, choca a su vez con la esfera C, cuya masa es m. ¿Qué masa deberá tener la esfera B para que la velocidad de la esfera C sea la mayor?

Desarrollo

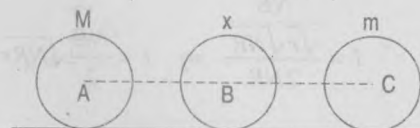
A con B:

Luego B con C

Aplicación de la Derivada

$$v_B = \frac{2Mv}{x+M} \quad \dots (\alpha)$$

$$v_C = \frac{2xv_B}{m+x} \quad \dots (\beta)$$



$$\text{De } (\alpha) \text{ y } (\beta): V_C = \frac{2x}{m+x} \left(\frac{2Mv}{x+M} \right)$$

$$V_C = \frac{4xM_v}{(m+x)(M+x)} = \frac{4M_v}{x^2 + (m+M)x + mM}$$

$$\frac{dV_C}{dx} = 0 = \frac{4M_v(x^2 + x(m+M) + mM - x(2x+m+M))}{(x^2 + (m+M)x + mM)^2}$$

$$x^2 + x(m+M) + mM = 2x^2 + (m+M)x \Rightarrow mM = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{Mm}$$

- 888 Si tenemos N pilas eléctricas idénticas, con ellas podemos formar baterías por procedimientos distintos uniendo entre sí grupos de "n" pilas en serie después los grupos así formados, (un número $\frac{N}{n}$) en derivación. La intensidad de la corriente que proporciona una batería de este tipo se determina por la fórmula: $I = \frac{NnE}{NR + n^2r}$, donde E es la f.e.m. de una pila, r su resistencia externa. Determinar para que valor de "n" es mayor la intensidad de corriente que proporciona la batería.

Desarrollo

$$\frac{dI}{dn} = 0 = \frac{(NR + n^2r) - n2nr}{NE(NR + n^2r)^2}$$

$$NR + n^2r = 2n^2r \Rightarrow NR = n^2r \Rightarrow n = \sqrt{\frac{NR}{r}}$$

$$I = \frac{NE}{\sqrt{r}\sqrt{NR}} \Rightarrow I = \frac{NE}{2} \sqrt{NRr} \Rightarrow I = \frac{E}{2} \sqrt{\frac{N}{Rr}}$$

- 889 Determinar que diámetro "y" deberá tener la abertura circular de una presa, para que le gesto de agua por segundo Q sea el mayor posible, si $Q = C_y \sqrt{h-y}$ donde "h" es la profundidad del punto inferior de la abertura (tanto g, como el coeficiente empírico C, son constantes).

Desarrollo

$$Q = C_y \sqrt{h-y} = C(hy^2 - y^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dQ}{dy} = 0 = C \frac{1}{2} (hy^2 - y^3)^{-\frac{1}{2}} (2hy - 3y^2) \Rightarrow 2hy = 3y^2 \Rightarrow \frac{2h}{3} = y$$

- 890 Si $x_1, x_2, \dots, x_n$, son resultados de mediciones igualmente preciso de la magnitud "x", su valor más probable será aquel para el cual la suma de los cuadrados de los errores $S = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$, tenga el valor mínimo. Demostrar que el valor más probable de la magnitud "x" es la media aritmética de los resultados de las mediciones.

Desarrollo

$$S = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2, \text{ derivando se tiene:}$$

$$\frac{dS}{dx} = 0 = \sum_{i=1}^n 2(x - x_i) \Rightarrow S = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$$

$$0 = xn - \sum_{i=1}^n x_i \Rightarrow xn = \sum_{i=1}^n x_i \Rightarrow x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

3.2. DIRECCIÓN DE LA CONCAVIDAD.- PUNTOS DE INFLEXIÓN.-

1ra. CONCAVIDAD DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.-

Consideremos una función $y = f(x)$ diferenciable en (a,b) diremos que $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en (a,b) . Si $f''(x) > 0, \forall x \in (a,b)$, es cóncava hacia abajo en (a,b) si $f''(x) < 0, \forall x \in (a,b)$.

2do. PUNTO DE INFLEXIÓN.-

El punto $(x_0, f(x_0))$ es punto de inflexión si $f''(x_0) = 0$

HALLAR LOS INTERVALOS DE CONCAVIDAD Y LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN DE LAS GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES

891 $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$

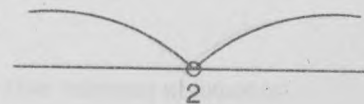
Desarrollo

$$y' = 3x^2 - 12x + 12 \Rightarrow y' = 0$$

para obtener los puntos críticos, es decir: $3x^2 - 12x + 12 = 0$ de donde $x =$

$y' = 6x - 12 \Rightarrow y'(2) = 0$, no hay máximo ni mínimo, hallaremos los puntos de inflexión.

$$y'' = 0 \text{ es decir } 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$



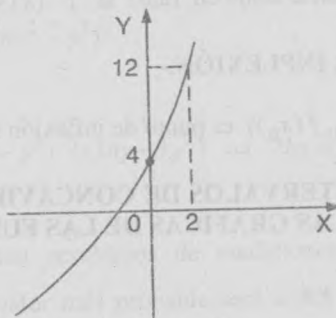
Intervalos	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$-\infty < x < 2$		+	-	Cóncava hacia abajo
$x = 2$	12	0	0	Puntos de inflexión
$x > 2$		+	+	Cóncava hacia arriba

Luego en: $<-\infty, 2>$ es cóncava hacia abajo

$<2, \infty>$ es punto hacia arriba

$(2, 12)$ es punto de inflexión

además en: $<-\infty, 2>$ y $<2, \infty>$ es creciente



892

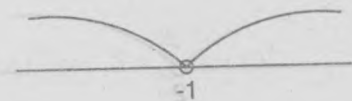
$$y = (x+1)^4$$

Desarrollo

$$y' = 4(x+1)^3 \Rightarrow y' = 0$$

para los puntos críticos es decir: $4(x+1)^3 = 0 \Rightarrow x = -1$

$$y' = 4(x+1)^3$$

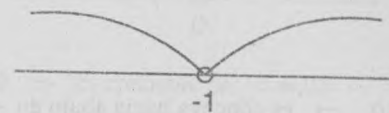


$$-\infty < x < -1, y' < 0$$

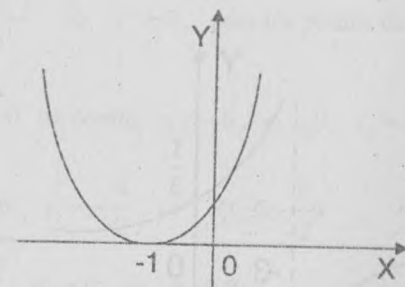
$$-1 < x < \infty, y' > 0$$

existe un punto mínimo en $x = -1$ y su valor es: $y = 0$, es decir que $(-1, 0)$ es punto mínimo y los intervalos $<-\infty, -1>$ es decreciente y en $<-1, \infty>$ es creciente.

$$\text{Sea } y'' = 12(x+1)^2 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$



$y'' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba en: $<-\infty, \infty>$



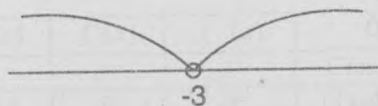
893

$$y = \frac{1}{x+3}$$

Desarrollo

$$y' = -\frac{1}{(x+3)^2} \Rightarrow x = -3$$

punto crítico no existe máximos ni mínimos



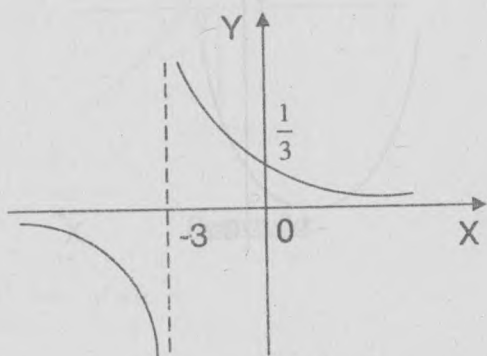
$$-\infty < x < -3, y' < 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x+3} \text{ es decreciente en } <-\infty, -3>$$

$$-3 < x < \infty, y' < 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x+3} \text{ es decreciente en } <-3, \infty>$$

$$y'' = \frac{2}{(x+3)^3}$$

$$-\infty < x < -3, y'' < 0 \Rightarrow \text{es cóncava hacia abajo en } <-\infty, -3>$$

$$\text{en } -3 < x < \infty, y'' > 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x+3} \text{ es cóncava hacia arriba sobre } <-3, \infty>$$



Luego en: $<-\infty, -3>$ cóncava hacia abajo

$<-3, \infty>$ cóncava hacia arriba

$x = -3$ punto de discontinuidad no hay punto de inflexión.

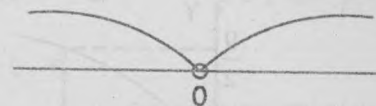
894

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 12}$$

Desarrollo

$$y' = \frac{x^2(x^2 + 36)}{(x^2 + 12)^2} \Rightarrow y' = 0$$

para los puntos críticos es decir: $x^2(x^2 + 36) = 0$ de donde $x = 0$



$$-\infty < x < 0, y' > 0 \Rightarrow \text{es creciente en } <-\infty, 0>$$

$$0 < x < \infty, y' > 0 \Rightarrow \text{es creciente en } <0, \infty>$$

$$y'' = \frac{24x(36 - x^2)}{(x^2 + 12)^3} \Rightarrow y'' = 0, \text{ para los puntos de inflexión es decir:}$$

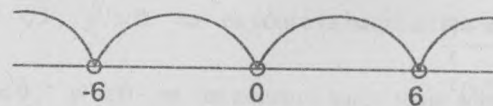
$$24x(36 - x^2) = 0 \text{ de donde: } x_1 = -6, x_2 = 0, x_3 = 6$$

$$\text{para } x_1 = -6, y_1 = -\frac{9}{2} \Rightarrow P_1(-6, -\frac{9}{2})$$

$$x_2 = 0, y_2 = 0 \Rightarrow P_2(0, 0)$$

$$x_3 = 6, y_3 = \frac{9}{2} \Rightarrow P_3(6, \frac{9}{2})$$

puntos de inflexión

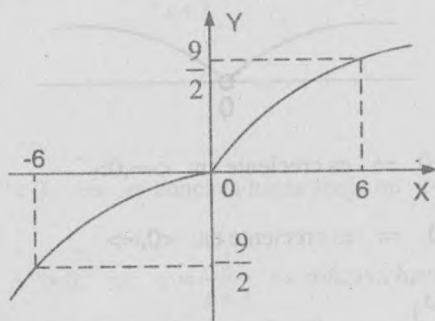


Si $-\infty < x < -6$, $y'' > 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia arriba sobre $<-\infty, -6>$

$-6 < x < 0$, $y'' < 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia abajo sobre $<-6, 0>$

$0 < x < 6$, $y'' > 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia arriba sobre $<0, 6>$

$6 < x < \infty$, $y'' < 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia abajo



895

$$y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$$

Desarrollo

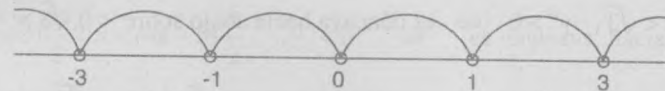
$$y' = \frac{4(x^2 - 1)}{(4x^3 - 12x)^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow y' = 0$$

para los puntos críticos, es decir: $4(x^2 - 1) = 0$ de donde $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

y también si $\exists y'$ es decir $(4x^3 - 12x)^{\frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow x_3 = 0$, $x_4 = -\sqrt{3}$, $x_5 = \sqrt{3}$

$$y' = \frac{4(x+1)(x-1)}{(4x^3 - 12x)^{\frac{2}{3}}}$$

Aplicación de la Derivada



$$-\infty < x < -\sqrt{3}, y' > 0$$

no existe máximo ni mínimo

$$-\sqrt{3} < x < -1, y' > 0$$

existe un máximo en $x = -1$ y su valor es $y = 2 \Rightarrow p_1(-1, 2)$

$$-1 < x < 0, y' < 0$$

$$-1 < x < 0, y' < 0$$

$$0 < x < 1, y' < 0$$

no existe máximo ni mínimo existe un mínimo en $x = 1$ y su valor es $y = -2 \Rightarrow p_2(1, -2)$

$$1 < x < \sqrt{3}, y' > 0$$

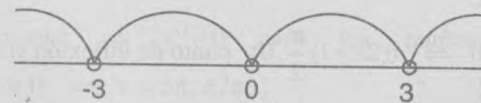
$$1 < x < \sqrt{3}, y' > 0$$

$\Rightarrow \nexists$ máximo ni mínimo

$$\sqrt{3} < x < \infty, y' > 0$$

$$y'' = \frac{-32(x^2 + 1)}{(4x^3 - 12x)^{\frac{5}{3}}} \text{ de aquí los puntos de inflexión son:}$$

$$x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3} \text{ de donde } (0, 0), (-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$$

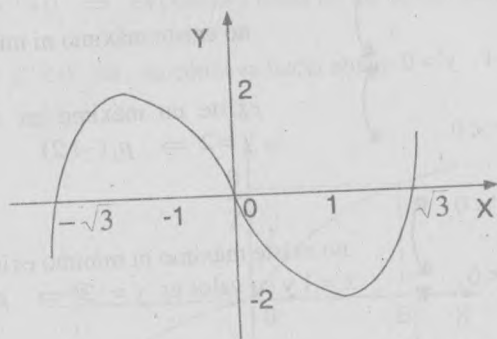


$-\infty < x < -\sqrt{3}, y'' > 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia arriba sobre $<-\infty, -\sqrt{3}>$

$-\sqrt{3} < x < 0, y'' < 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia abajo sobre $<-\sqrt{3}, 0>$

$0 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia abajo sobre $<0, \sqrt{3}>$

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' < 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia abajo sobre $<\sqrt{3}, \infty>$



896 $y = \cos x$

Desarrollo

$y' = \text{sen} x \Rightarrow y' = 0$ para los puntos críticos es decir:

$\text{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$

$y'' = -\cos x \Rightarrow y'' = 0$ para los puntos de inflexión:

$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

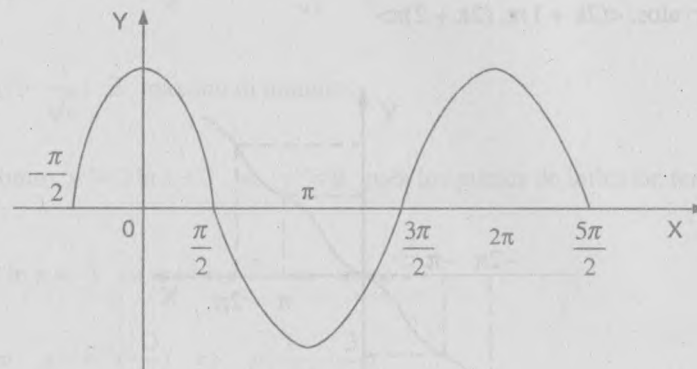
de donde $y = 0 \Rightarrow ((2k+1)\frac{\pi}{2}, 0)$ punto de inflexión si

$(4k+1)\frac{\pi}{2} < x < (4k+3)\frac{\pi}{2}$, $y'' > 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia arriba sobre

$<(4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+3)\frac{\pi}{2}>$

$(4k+3)\frac{\pi}{2} < x < (4k+5)\frac{\pi}{2}$, $y'' < 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia abajo sobre

$<(4k+3)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2}>$



897 $y = x - \text{sen} x$

Desarrollo

$y' = 1 - \cos x \Rightarrow y' = 0$, para obtener los puntos críticos, es decir:

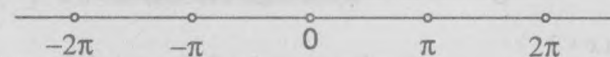
$1 - \cos x = 0$ de donde $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$

$y'' = \text{sen} x \Rightarrow y''(2k\pi) = 0 \Rightarrow$ no existe máximos ni mínimos.

Además para $(2k-2)\pi < x < 2k\pi$, $y' > 0 \Rightarrow$ es creciente en intervalos $<(2k-2)\pi, 2k\pi>$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

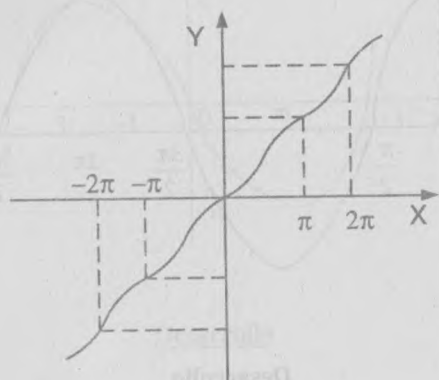
Como $y'' = \text{sen} x \Rightarrow y'' = 0$ para los puntos de inflexión decir $\text{sen} x = 0 \Rightarrow x = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

luego para $x = 2k\pi$, $y = 2k\pi \Rightarrow p(2k\pi, 2k\pi)$ punto de inflexión



$2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $y'' > 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia arriba en los intervalos $(2k\pi, (2k+1)\pi)$

$(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$, $y'' < 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia abajo en los intervalos $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$



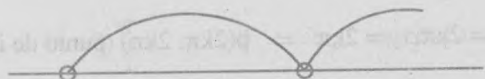
898 $y = x^2 \ln x$

Desarrollo

$y' = 2x \ln x + x \Rightarrow y' = 0$ para los puntos críticos es decir:

$2x \ln x + x = 0 \Rightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ no está definido en:

$$x_2 = e^{-1}, x_3 = \frac{1}{\sqrt{e}}, x_4 = -\frac{1}{\sqrt{e}}$$



$y'' = 2 \ln x + 3$

Aplicación de la Derivada

$$y''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2 > 0 \Rightarrow \text{hay un mínimo en } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\text{de donde } y = -\frac{2}{e} \Rightarrow p_1\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{2}{e}\right)$$

$$y''\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \nexists \text{ máximo ni mínimo}$$

como $y'' = 2 \ln x + 3 \Rightarrow y'' = 0$ para los puntos de inflexión tenemos

$$2 \ln x = -3 \Rightarrow x^2 = e^{-3} \Rightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$$

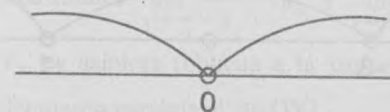
$$\Rightarrow y = e^{-3}\left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow p\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e}\right)$$

899 $y = \arctg x - x$

Desarrollo

$$y = \arctg x - x \Rightarrow y' = -\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$



$x < 0$, $y'' > 0$ es cóncava hacia arriba

$x > 0$, $y'' < 0$ es cóncava hacia abajo

$x = 0$, $y = 0$ luego $p(0,0)$ punto de inflexión

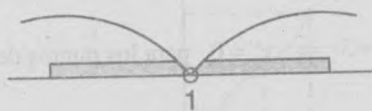
900

$$y = (1 + x^2)e^x$$

Desarrollo

$$y' = 2xe^x + (x^2 + 1)e^x$$

$y' = e^x(x+1)^2$, haciendo $y' = 0$, para los puntos críticos, es decir $e^x(x+1)^2 = 0$ de donde: $x = -1$

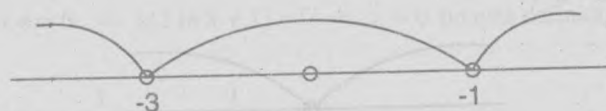


Si $x < -1$, $y' > 0$ la función no tiene máximo ni mínimos y además es creciente en los intervalos: $<-\infty, -1>$ y $<-1, \infty>$

$$x > -1, y' > 0$$

como $y' = e^x(x+1)^2 \Rightarrow y'' = e^x(x+1)(x+3)$ haciendo $y'' = 0$, se obtiene los puntos de inflexión, es decir $e^x(x+1)(x+3) = 0$ de donde: $x_1 = -1$, $x_2 = -3$.

Luego $p_1(-1, \frac{2}{e})$, $p_2(-3, \frac{10}{e^3})$ punto de inflexión



Si $x < -3$, $y'' > 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $<-\infty, -3>$

Si $-3 < x < -1$, $y'' < 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $<-3, -1>$

Si $x > -1$, $y'' > 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $<-1, \infty>$

3.3. ASÍNTOTAS.-**a) DEFINICION.-**

Si un punto (x, y) se desplaza continuamente por una curva $y = f(x)$ de forma que por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito mientras que la distancia entre este punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de "asíntota" de la curva.

b) ASÍNTOTA VERTICALES.- (paralelos al eje OY).

Si existe un número a tal, que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, la recta $x = a$ es asíntota vertical.

c) ASÍNTOTA OBLICUAS.- (respecto a los ejes coordenados)

Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_1 x] = b_1$ la recta

$y = k_1 x + b_1$ será asíntota (oblicua a la derecha o bien, si $k_1 = 0$, horizontal derecha, paralela al eje OX).

Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_2 x] = b_2$ la recta

$y = k_2 x + b_2$ es asíntota (oblicua a la izquierda o bien, cuando $k_2 = 0$, horizontal izquierdo paralela al eje OX).

La gráfica de la función $y = f(x)$ (que se supone uniforme) no puede tener más de una asíntota derecha (oblicua u horizontal) ni más de una asíntota izquierda (oblicua u horizontal).

HALLAR LAS ASÍNTOTAS DE LA CURVA:

$$901 \quad y = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Desarrollo

Para obtener las asíntotas verticales haremos el denominados igual a cero, es decir: $(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ es una asíntota vertical.

Ahora buscaremos las asíntotas oblicuas cuando $x \rightarrow +\infty$

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(x-2)^2} = 0$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - k_1 x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$$

por lo tanto la asíntota horizontal es $y = 0$

$$902 \quad y = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$$

Desarrollo

Para obtener las asíntotas verticales se tiene:

$x^2 - 4x + 3 = 0$ de donde $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ asíntotas verticales, ahora buscaremos las asíntotas oblicuas cuando $x \rightarrow +\infty$

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = 0$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 4x + 3} = 0$$

como $y = k_1 x + b_1$ entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Aplicación de la Derivada

$$903 \quad y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

Desarrollo

Para obtener las asíntotas verticales se tiene: $x^2 - 4 = 0$ de $x_1 = -2, x_2 = 2$ asíntotas verticales, para las asíntotas oblicuas.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - k_1 x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$$

como $y = k_1 x + b_1 \Rightarrow y = 1$ asíntota horizontal.

$$904 \quad y = \frac{x^2}{x^2 + 9}$$

Desarrollo

Para obtener las asíntotas verticales se tiene: $x^2 + 9 = 0$ pero $\nexists x \in \mathbb{R}$ que $x^2 + 9 = 0$ por lo tanto no hay asíntota verticales, para obtener las asíntotas oblicuas se tiene:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x^2 + 9)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 9} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 9} - x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^3 - 9x}{x^2 + 9}$$

como $y = k_1 x + b_1 \Rightarrow y = x$ asíntota oblicua a la derecha.

$$905 \quad y = \sqrt{x^2 - 1}$$

Desarrollo

No tiene asíntotas verticales. Veremos para las asíntotas oblicuas:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = 0$$

Como $y = k_1 x + b_1 \Rightarrow y = x$ es asíntota oblicua a la derecha

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -1$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-1} + x) = 0$$

como $y = k_2 x + b_2 \Rightarrow y = -x$ es asíntota oblicua a la izquierda.

906

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

Desarrollo

Para las asíntotas verticales se tiene que:

$$x^2 + 3 = 0 \text{ pero } \nexists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 + 3 = 0$$

por tanto no hay asíntotas verticales, para las asíntotas oblicuas se tiene:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = 0$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = 1$$

como $y = k_1 x + b_1 \Rightarrow y = 1$ asíntota oblicua a la derecha.

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = 0$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 0 \right) = -1$$

Como $y = k_2 x + b_2 \Rightarrow y = -1$ asíntota oblicua izquierda.

907

$$y = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Desarrollo

Para las asíntotas verticales se tiene $x^2 - 1 = 0$ de donde $x = -1, x = 1$ que son asíntotas verticales ahora calcularemos las asíntotas oblicuas.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2-1}} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} - x \right) = 0$$

Como $y = k_1 x + b_1 \Rightarrow y = x$ asíntota oblicua a la derecha.

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2-1}} = -1$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} + x \right) = 0$$

como $y = k_2 x + b_2 \Rightarrow y = -x$ asíntota oblicua a la izquierda.

908 $y = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}}$

Desarrollo

Para las asíntotas verticales se tiene $x^2 + 9 = 0$ pero como $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 9 = 0$, por lo tanto no tiene asíntotas verticales.

Ahora calcularemos las asíntotas oblicuas:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right) = 2$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} - 2x \right) = -2$$

como $y = k_1 x + b_1 \Rightarrow y = 2x - 2$ asíntota oblicua a la derecha.

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right) = -2$$

como $y = k_2 x + b_2 \Rightarrow y = -2$ asíntota horizontal a la izquierda.

909 $y = e^{-x^2} + 2$

Desarrollo

Como $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} + 2 > 0$, entonces no tiene asíntotas verticales.

Para las asíntotas oblicuas se tiene:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x^2} + 2}{x} \right) = 0$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x^2} + 2) = 2$$

Como $y = k_1 x + b_1 \Rightarrow y = 2$ asíntota horizontal a la derecha.

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x^2} + 2}{x} \right) = 0$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x^2} + 2) = 2$$

como $y = k_2 x + b_2 \Rightarrow y = 2$ asíntota horizontal a la izquierda, por tanto en $y = 2$ se tiene una asíntota horizontal.

910

$$y = \frac{1}{1 - e^x}$$

Desarrollo

Para las asíntotas verticales se tiene:

$1 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$ asíntota vertical, para las asíntotas oblicuas.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x(1 - e^x)} \right) = 0$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - e^x} \right) = 0$$

como $y = k_1 x + b_1 \Rightarrow y = 0$ asíntota horizontal a la derecha.

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x(1 - e^x)} \right) = 0$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1 - e^x} \right) = 0$$

como $y = k_2x + b_2 \Rightarrow y = 0$ asíntota horizontal a la izquierda, por lo tanto en $y = 0$ se tiene una asíntota horizontal.

911

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

Desarrollo

Para obtener las asíntotas verticales $\frac{1}{x} = \infty \Rightarrow x = 0$, que es una asíntota vertical. Para obtener las asíntotas oblicuas.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \right) = 0$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\frac{1}{x}}) = 1$$

como $y = k_1x + b_1 \Rightarrow y = x$ asíntota oblicua a la derecha.

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \right) = 0$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{\frac{1}{x}}) = 1$$

como $y = k_2x + b_2 \Rightarrow y = 1$ asíntota horizontal a la izquierda.

912

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Desarrollo

Para obtener la asíntota vertical se tiene $x = 0$ y para calcular las asíntotas oblicuas se tiene:

Aplicación de la Derivada

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \right) = 0$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 1$$

como $y = k_1x + b_1 \Rightarrow y = 1$ asíntota horizontal a la derecha

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \right) = 0$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 1$$

como $y = k_2x + b_2 \Rightarrow y = 1$ asíntota horizontal a la izquierda, por lo tanto en $y = 1$ se tiene una asíntota horizontal.

913

$$y = \ln(1+x)$$

Desarrollo

Para las asíntotas verticales se tiene $1+x=0$ de donde $x=-1$ es una asíntota vertical, para las asíntotas oblicuas.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 0$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+x)) = \infty$$

por lo tanto no tiene asíntota oblicua ni horizontales.

914

$$x = t, y = t + 2 \operatorname{arctg} t$$

Desarrollo

Como $x = t \Rightarrow y = x + \operatorname{arctg} x$

Como esta definida para todos los reales no tiene asíntotas verticales.

Ahora calcularemos las asíntotas oblicuas.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 2\arctg x}{x} \right) = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2\arctg x - x) = \pi$$

como $y = k_1 x + b_1 \Rightarrow y = x + \pi$, asíntota oblicua a la derecha.

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + 2\arctg x}{x} \right) = 1$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2\arctg x - x) = -\pi$$

como $y = k_2 x + b_2 \Rightarrow y = x$ asíntota oblicua a la izquierda.

- 915 Hallar la asíntota de la espiral hiperbólica $r = \frac{a}{\varphi}$

Desarrollo

Como $r = \frac{a}{\varphi}$ no se tiene asíntota verticales

Además se tiene $x = \frac{a}{\varphi} \cos \varphi = \alpha(\varphi)$, $y = \frac{a}{\varphi} \sin \varphi = \beta(\varphi)$

cuando $x \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow 0$

$$k = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\beta(\varphi)}{\alpha(\varphi)} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = 0$$

$$b = \lim_{\varphi \rightarrow 0} (\beta(\varphi) - k\alpha(\varphi)) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{a}{\varphi} \sin \varphi = a$$

como $y = kx + b$ entonces $y = a$ que es una asíntota horizontal.

3.4. CONSTRUCCIÓN DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES POR SUS PUNTOS CARACTERÍSTICOS.

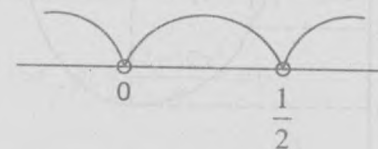
Construir las gráficas determinando el campo de existencia de cada función, los puntos de discontinuidad, los puntos extremos, los intervalos de crecimiento, decrecimiento, los puntos de inflexión de su gráfica la dirección de concavidad y las asíntotas de la gráfica.

916 $y = x^3 - 3x^2$

Desarrollo

Como $y = x^3 - 3x^2$ es un polinomio, su campo de existencia es todos los números reales $\mathbb{R}$.

$y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 0$ para los números críticos $\Rightarrow \{0, 2\}$ números críticos.



$$y' = 3x(x - 2)$$

para $x < 0$, $y' > 0$

$0 < x < 2$, $y' < 0$

$2 < x < \infty$, $y' > 0$

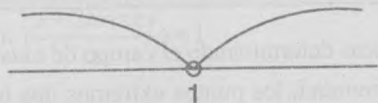
$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 0$, $(0,0)$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = 2$, $(2,-4)$

es creciente en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$ y decreciente en $(0, 2)$

$$y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 6x - 6 = 0$$

para los puntos de inflexión $\Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$, $(1, -2)$ punto de inflexión.

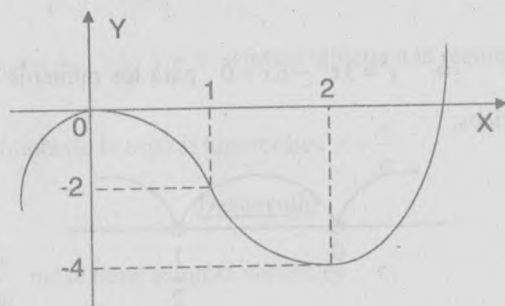


$$y'' = 6(x - 1)$$

Para $x < 1$, $y'' < 0$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre $<-\infty, 1>$

Para $x > 1$, $y'' > 0$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $<1, \infty>$

No tiene asíntotas.



917

$$y = \frac{6x^2 - x^4}{9}$$

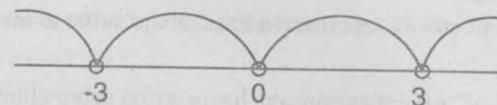
Desarrollo

El campo de existencia de $y = \frac{6x^2 - x^4}{9}$ es el conjunto de los números reales.

$$y = \frac{6x^2 - x^4}{9} \Rightarrow y' = \frac{12x - 4x^3}{9} = 0 \text{ para los números críticos de donde}$$

$\{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ son los críticos.

Aplicación de la Derivada



$$y' = -\frac{4}{9}x(x-3)(x+3)$$

para $x < -\sqrt{3}$, $y' > 0^+$

$-\sqrt{3} < x < 0$, $y' < 0^-$

$0 < x < \sqrt{3}$, $y' > 0^+$

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y' < 0^-$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = \sqrt{3}$, $(\sqrt{3}, 1)$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = 0$, $(0, 0)$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = -\sqrt{3}$, $(-\sqrt{3}, 1)$

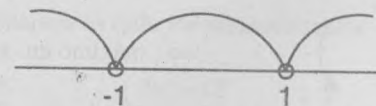
es creciente en los intervalos $<-\infty, -3>$, $<0, 3>$

es decreciente en los intervalos $<-\sqrt{3}, 0>$, $<3, \infty>$

$$y' = \frac{12x - 4x^3}{9} \Rightarrow y'' = \frac{12 - 12x^2}{9} = 0$$

para obtener los números críticos, es decir $\frac{1}{3}(4 - 4x^2) = 0$ de donde

$$\begin{cases} x = 1, y = \frac{5}{9}, (1, \frac{5}{9}) \\ x = -1, y = \frac{5}{9}, (-1, \frac{5}{9}) \end{cases} \text{ puntos de inflexión}$$



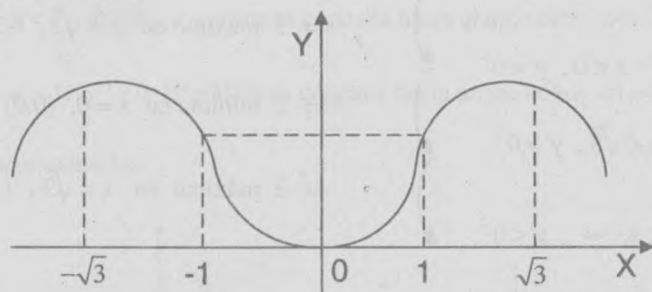
$$y'' = -\frac{4}{3}(x-1)(x+1)$$

para $x < -1$, $y'' < 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $<-\infty, -\sqrt{3}>$

para $-1 < x < 1$, $y'' > 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $<-\sqrt{3}, \sqrt{3}>$

para $x > 1$, $y'' < 0 \Rightarrow$ es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $<\sqrt{3}, \infty>$

no tiene asíntotas.



918 $y = (x-1)^2(x+2)$

Desarrollo

$y = x^3 - 3x + 2$ su campo de existencia es $y' = 3x^2 - 3 = 0$ para los números críticos de donde $\{-1, 1\}$ son los números críticos.



$$y' = 3(x+1)(x-1)$$

para $x < -1$, $y' > 0^+$

$-1 < x < 1$, $y' < 0^-$

$x > 1$, $y' > 0^+$

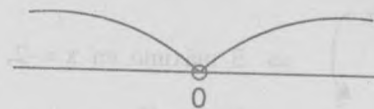
$\Rightarrow$ máximo en $x = -1$, $(-1, 4)$

$\Rightarrow$ mínimo en $x = 1$, $(1, 0)$

Aplicación de la Derivada

Los intervalos donde es creciente son $<-\infty, -1>$, $<1, \infty>$ y donde decreciente es $<-1, 1>$

Como $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'' = 6x = 0$ para los puntos de inflexión, decir $x = 0$, $(0, 2)$ es un punto de inflexión.

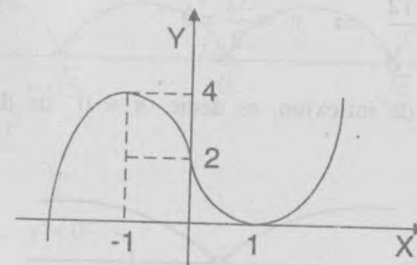


$$y'' = 6x$$

para $x < 0$, $y'' < 0$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre $<-\infty, 0>$

para $x > 0$, $y'' > 0$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $<0, \infty>$

no tiene asíntota



919

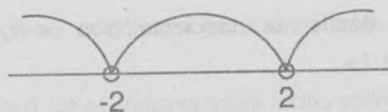
$$y = \frac{(x-2)^2(x+4)}{4}$$

Desarrollo

Su campo de existencia es todo los números reales

$$y = \frac{x^3 - 12x + 16}{4} \Rightarrow y' = \frac{3x^2 - 12}{4} = 0$$

para los números críticos, es decir $\{-2, 2\}$ números críticos.



$$y' = \frac{3}{4}(x+2)(x-2)$$

para $x < -2$, $y' > 0^+$ $\Rightarrow \exists$ máximo en $x = -2$, $(-2, 8)$

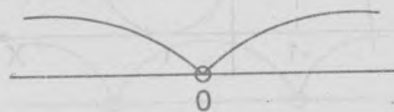
$-2 < x < 2$, $y' < 0^-$ $\Rightarrow \exists$ mínimo, en $x = 2$, $(2, 0)$

$2 < x < \infty$, $y' > 0^+$

la gráfica es creciente en los intervalos $<-\infty, -2>$, $<2, \infty>$ y es decreciente en el intervalo $<-2, 2>$

$$\text{como } y' = \frac{3x^2 - 12}{4} \Rightarrow y'' = \frac{3x}{2} = 0$$

para los puntos de inflexión, es decir $x = 0$ de donde $(0, 4)$ punto de inflexión.

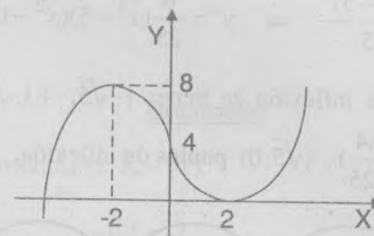


$$y'' = \frac{3x}{2} = 0$$

para $x < 0$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $<-\infty, 0>$

para $x > 0$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $<0, \infty>$

no tiene asíntotas.



920

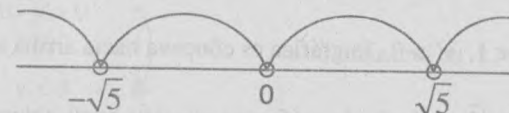
$$y = \frac{(x^2 - 4)^3}{125}$$

Desarrollo

Su campo de existencia es todo los números reales

$$y = \frac{(x^2 - 4)^3}{125} \Rightarrow y' = \frac{6x(x^2 - 5)^2}{125} = 0$$

para los números críticos de donde: $\{-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}\}$ son números críticos



$$y' = \frac{6x(x^2 - 5)^2}{125}$$

para $x < -\sqrt{5}$, $y' < 0^-$

$-\sqrt{5} < x < 0$, $y' < 0^-$

$0 < x < \sqrt{5}$, $y' > 0^+$

$\sqrt{5} < x < \infty$, $y' > 0^+$

$\Rightarrow \nexists$ máximo ni mínimos en $x = -\sqrt{5}$

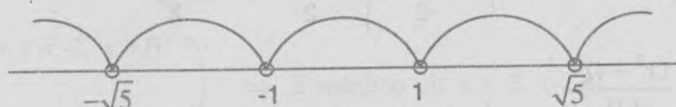
$\Rightarrow \nexists$ mínimo en $x = 0$, $(0, -1)$

$\Rightarrow \nexists$ máximo ni mínimos en $x = \sqrt{5}$

La gráfica es creciente en $<0, \sqrt{5}>$, $<\sqrt{5}, \infty>$ y decreciente en los intervalos $<-\infty, -\sqrt{5}>$, $<-\sqrt{5}, 0>$

Como $y' = \frac{6x(x^2-5)^2}{125} \Rightarrow y'' = \frac{6}{25}(x^2-5)(x^2-1) = 0$

Para los puntos de inflexión se tiene: $\{-\sqrt{5}, -1, 1, \sqrt{5}\}$ de donde $(-\sqrt{5}, 0)$, $(-1, -\frac{64}{125})$, $(1, -\frac{64}{125})$, $(\sqrt{5}, 0)$ puntos de inflexión.



$$y'' = \frac{6}{25}(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+1)(x-1)$$

para $x < -\sqrt{5}$, $y'' > 0$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $<-\infty, -\sqrt{5}>$

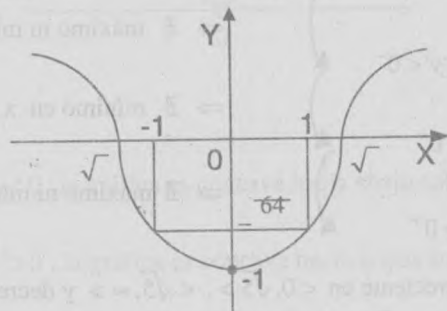
para $-\sqrt{5} < x < -1$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo sobre: $<-\sqrt{5}, -1>$

para $-1 < x < 1$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $<-1, 1>$

para $1 < x < \sqrt{5}$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo sobre $<1, \sqrt{5}>$

para $\sqrt{5} < x < \infty$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $<\sqrt{5}, \infty>$

no tiene asíntotas.



Aplicación de la Derivada

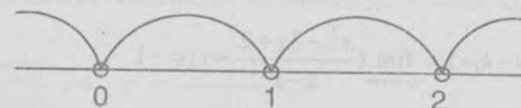
921 $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

Desarrollo

Su campo de existencia es $\mathbb{R} - \{1\}$

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \Rightarrow y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \text{ para los puntos críticos es decir } \{$$

números críticos.



$$y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

para $x < 0$, $y' > 0^+$

$0 < x < 1$, $y' < 0^-$

$1 < x < 2$, $y' < 0^-$

$2 < x < \infty$, $y' > 0^+$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 0$, $(0, -2)$

$\Rightarrow \nexists$ máximo ni mínimo en $x = 1$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = 1$, $(2, 2)$

la gráfica es creciente en los intervalos $<-\infty, 0>$, $<2, \infty>$ y decreciente en los intervalos $<0, 1>$ y $<1, 2>$.

Como $y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(x-1)^3} = 0, \nexists x \in \mathbb{R}$

Por lo tanto no hay punto de inflexión. $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$

para $x < 1$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo sobre $<-\infty, 1>$

para $x > 1$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $<0, \infty>$

Calculando las asíntotas para las verticales se tiene:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \text{ asíntota vertical.}$$

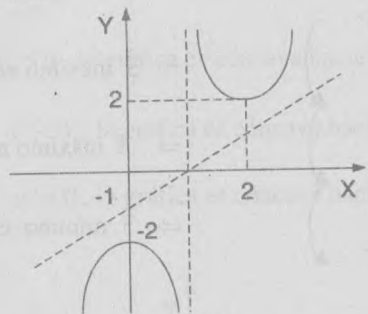
Para las oblicuas se tiene:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} - x \right) = -1$$

$$\text{como } y = k_1 x + b_1 \Rightarrow y = x - 1$$

es una asíntota oblicua.



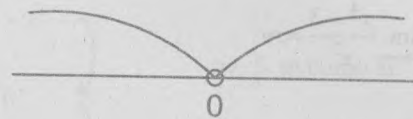
Desarrollo

Su campo de existencia es todo los reales $R - \{0\}$

$$y = \frac{x^4 - 3}{x} \Rightarrow y' = \frac{3(x^4 + 1)}{x^2} = 0 \text{ para los números críticos, como } x^4 + 1 = 0,$$

$\nexists x \in R$; no tiene punto críticos, por lo tanto no tiene máximos ni mínimos.

Aplicación de la Derivada



$$y' = \frac{3(x^4 + 1)}{x^2}$$

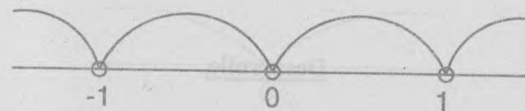
para $x < 0$, $y' > 0$, $x > 0$, $y' < 0$

Luego la gráfica es creciente en los intervalos: $<-\infty, 0>$, $<0, \infty>$ como:

$$y' = \frac{3(x^4 + 1)}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{6(x^4 - 1)}{x^3} = 0$$

para obtener los puntos de inflexión de donde $\{-1, 1\}$

Luego $(-1, 2)$, $(1, -2)$ puntos de inflexión



$$y'' = \frac{6(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{x^3}$$

para $x < -1$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo sobre $<-\infty, -1>$

para $-1 < x < 0$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $<-1, 0>$

para $0 < x < 1$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo sobre $<0, 1>$

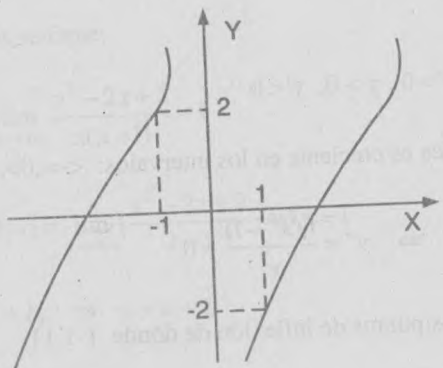
para $1 < x < \infty$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba $<1, \infty>$

Calculando las asíntotas se tiene:

Para las asíntotas verticales, se tiene $x = 0$ para las asíntotas oblicuas.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3}{x^2} = \infty$$

no tiene asíntotas



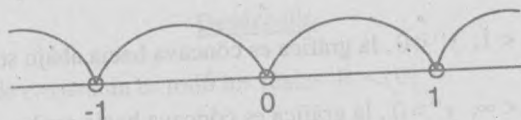
923

$$y = \frac{x^4 + 3}{x}$$

Desarrollo

Su campo de existencia es todo los reales. $\mathbb{R} - \{0\}$

$y = \frac{x^4 + 3}{x} \Rightarrow y' = \frac{3(x^4 - 1)}{x^2} = 0$ para los números críticos, es decir: $\{-1, 1\}$
número críticos.



$$y' = \frac{3(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)}{x^2}$$

Aplicación de la Derivada

para $x < -1$, $y' > 0^+$

$-1 < x < 0$, $y' < 0^-$

$0 < x < 1$, $y' < 0^-$

$1 < x < \infty$, $y' > 0^+$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = -1$, $(-1, -4)$

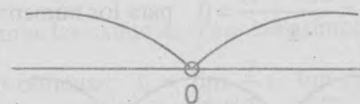
$\Rightarrow \nexists$ máximo ni mínimo en $x = 0$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = 1$, $(1, 4)$

La gráfica es creciente en los intervalos $<-\infty, -1>$, $<1, \infty>$ y decreciente en los intervalos $<-1, 0>$, $<0, 1>$

$$\text{Como } y' = \frac{3(x^4 - 1)}{x^2} \Rightarrow y'' = 6\left(\frac{x^4 + 1}{x^3}\right) = 0$$

Para los puntos de inflexión, pero como $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y'' = 0$, la gráfica tiene puntos de inflexión.



$$y'' = \frac{6(x^4 + 1)}{x^3}$$

para $x < 0$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo sobre $<-\infty, 0>$

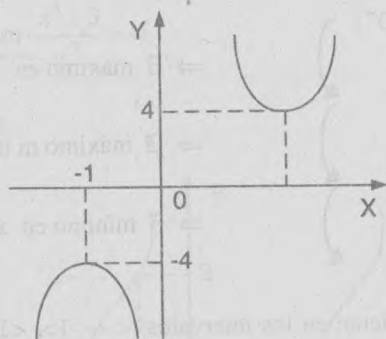
para $x > 0$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $<0, \infty>$

Calculando las asíntotas se tiene:

Para las asíntotas verticales, se tiene $x = 0$ y para las asíntotas oblicuas tenemos:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3}{x^2} = \infty$$

no tiene asíntotas oblicuas.

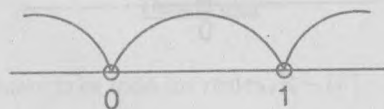


924 $y = x^2 + \frac{2}{x}$

Desarrollo

Su campo de existencia es todo $\mathbb{R} - \{0\}$

$$y = x^2 + \frac{2}{x} \Rightarrow y' = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} = 0 \text{ para los números, es decir } x = 1$$



$$y' = \frac{2(x^2 + x + 1)(x - 1)}{x^2}$$

para $x < 0$, $y' < 0^+$

$0 < x < 1$, $y' < 0^-$

$1 < x < \infty$, $y' > 0^+$

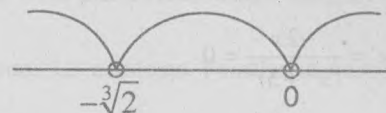
$\Rightarrow \nexists$ máximo ni mínimo en $x = 0$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = 1, (1, 3)$

La gráfica es creciente en el intervalo $\langle 1, \infty \rangle$ y decreciente en los intervalos $\langle -\infty, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle$

$$\text{Como } y' = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2(x^3 + 2)}{x^3} = 0$$

Para los puntos de inflexión, es decir: $x = -\sqrt[3]{2}$, $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ punto de inflexión



$$y'' = \frac{2(x^2 - \sqrt[3]{2}x + 4)(x + \sqrt[3]{2})}{x^3}$$

para $x < -\sqrt[3]{2}$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $\langle -\infty, -\sqrt[3]{2} \rangle$

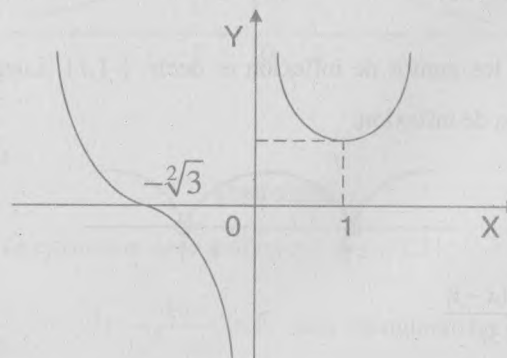
para $-\sqrt[3]{2} < x < 0$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo sobre $\langle -\sqrt[3]{2}, 0 \rangle$

para $x > 0$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $\langle 0, \infty \rangle$

Ahora calcularemos las asíntotas. Para las asíntotas verticales se tiene $x = 0$

para las asíntotas oblicuas: $k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \frac{2}{x^2}) = \infty$

no tiene asíntota oblicuas.



925

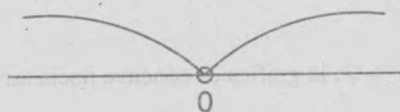
$$y = \frac{1}{x^2 + 3}$$

Desarrollo

El campo de existencia es todo los números reales

$$y = \frac{1}{x^2 + 3} \Rightarrow y' = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2} = 0$$

para obtener los números críticos, es decir $x = 0$



$$y' = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2}$$

para $x < 0$, $y' > 0^+$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 0$, $(0, \frac{1}{3})$

$x > 0$, $y' < 0^-$

$$\text{como } y' = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2} \Rightarrow y'' = \frac{6(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3} = 0$$

para obtener los puntos de inflexión es decir: $\{-1, 1\}$. Luego $(-1, \frac{1}{4})$, $(1, \frac{1}{4})$ son los puntos de inflexión.



$$y'' = \frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2 + 3)^3}$$

para $x < -1$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $<-\infty, -1>$

para $-1 < x < 1$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $<-1, 1>$

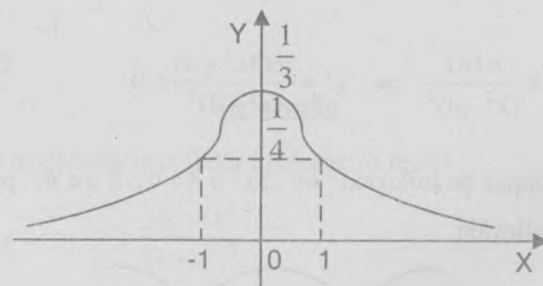
para $x > 1$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $<1, \infty>$

ahora calcularemos las asíntotas. Para las asíntotas verticales $x^2 + 3 = 0$, existe.

$$\text{Para las asíntotas oblicuas se tiene: } k_1 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x(x^2 + 3)} = 0$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 3} = 0$$

como $y = k_1 x + b_1 \Rightarrow y = 0$ asíntota horizontal.



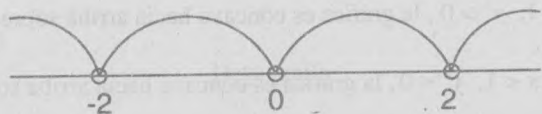
926

$$y = \frac{8}{x^2 - 4}$$

Desarrollo

El campo de existencia de la gráfica es: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$y = \frac{8}{x^2 - 4} \Rightarrow y' = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2} = 0, \text{ para los números críticos es decir: } x =$$



$$y' = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}$$

para $x < -2$, $y' > 0^+$

$-2 < x < 0$, $y' > 0^+$

$0 < x < 2$, $y' < 0^-$

$2 < x < \infty$, $y' < 0^-$

$\Rightarrow \nexists$ máximo ni mínimo en $x = -2$

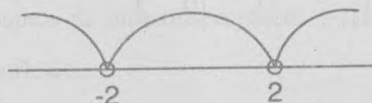
$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 0$, $(0, -2)$

$\Rightarrow \nexists$ máximo ni mínimo en $x = 2$

La gráfica es creciente en los intervalos $<-\infty, -2>$ y $<-2, 0>$ y decreciente en los intervalos $<0, 2>$ y $<2, \infty>$

$$\text{Como } y' = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow y'' = \frac{16(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} = 0$$

Para los puntos de inflexión $\Rightarrow 3x^2 + 4 = 0$, $\nexists x \in \mathbb{R}$ por lo tanto no hay punto de inflexión



$x < -2$, $y'' > 0$, cóncava hacia arriba $<-\infty, -2>$

$-2 < x < 2$, $y'' < 0$, cóncava hacia abajo $<-2, 2>$

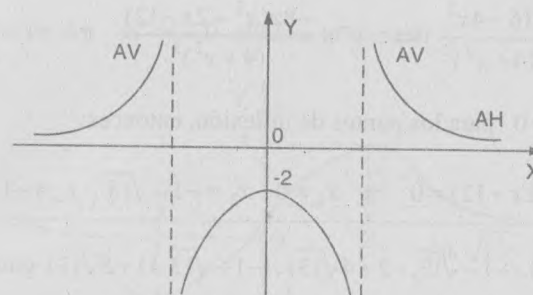
$x > 2$, $y'' > 0$, cóncava hacia arriba $<2, \infty>$

ahora calcularemos las asíntotas. Para las asíntotas verticales se tiene: $x = \pm 2$

Para las asíntotas oblicuas se tiene: $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x(x^2 - 4)} = 0$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 3} = 0$$

como $y = kx + b \Rightarrow y = 0$, es una asíntota horizontal.



927

$$y = \frac{4x}{4 + x^2}$$

Desarrollo

Su campo de existencia es todos los números reales

$$y = \frac{4x}{4 + x^2} \Rightarrow y' = \frac{16 - 4x^2}{(4 + x^2)^2}$$

como $y' = 0$ para los números críticos $16 - 4x^2 = 0$ de donde $x = \pm 2$ números críticos



$$y' = \frac{4(2+x)(2-x)}{(4+x^2)^2}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{para } x < -2, y' < 0^- \\
 -2 < x < 2, y' > 0^+ \\
 2 < x < \infty, y' < 0^-
 \end{array}
 \Rightarrow \begin{array}{l}
 \exists \text{ mínimo en } x = 2, (-2, -1) \\
 \exists \text{ máximo en } x = 2, (2, 1)
 \end{array}$$

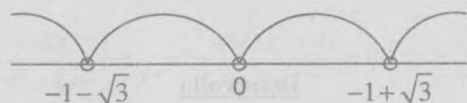
La gráfica es creciente en el intervalo $<-2, 2>$ y decreciente en los intervalos $<-\infty, -2>$, $<2, \infty>$

$$\text{como } y' = \frac{16-4x^2}{(4+x^2)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-8x(x^2-2x-12)}{(4+x^2)^3}$$

como $y''=0$ para los puntos de inflexión, entonces:

$$-8x(x^2-2x-12)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=-1-\sqrt{13}, x_3=-1+\sqrt{13}$$

Luego $(0,0)$, $(-1-\sqrt{13}, -2+4\sqrt{13})$, $(-1+\sqrt{13}, 11+5\sqrt{13})$ puntos de inflexión.



$$y'' = \frac{-8x(x+1+\sqrt{13})(x+1-\sqrt{13})}{(4+x^2)^3}$$

para $x < -1-\sqrt{13}$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba en el intervalo $<-\infty, -1-\sqrt{13}>$

para $-1-\sqrt{13} < x < 0$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo en el intervalo $<-1-\sqrt{13}, 0>$

para $0 < x < -1+\sqrt{13}$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba en el intervalo $<0, -1+\sqrt{13}>$

Aplicación de la Derivada

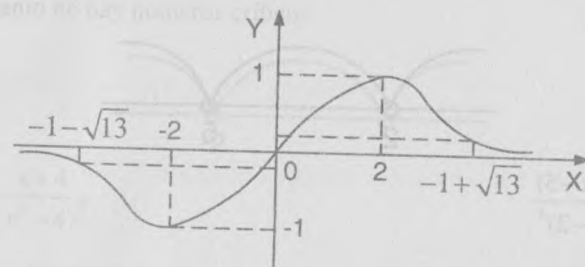
para $-1+\sqrt{13} < x < \infty$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo en el intervalo $<-1+\sqrt{13}, \infty>$

ahora calcularemos las asíntotas verticales se tiene: $4+x^2=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{4+x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{4+x^2} = 0$$

como $y = kx + b \Rightarrow y = 0$ asíntota horizontal.



928

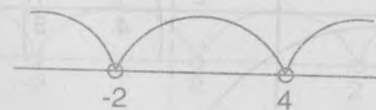
$$y = \frac{4x-12}{(x-12)^2}$$

Desarrollo

El campo de existencia es $\mathbb{R} - \{12\}$

Luego el campo de discontinuidad es $x = 12$

$$y = \frac{4x-12}{(x-12)^2} \Rightarrow y' = \frac{-4(x-4)}{(x-2)^3} \Rightarrow y' = 0 \text{ se tiene } x = 4 \text{ número crítico}$$



$$y' = \frac{-4(x-4)}{(x-2)^3}$$

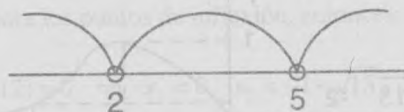
para $x < 2$, $y' < 0^-$ $\Rightarrow \exists x = 2$ por punto de discontinuidad.

$2 < x < 4$, $y' > 0^+$ $\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 4$, $(4, 1)$

$4 < x < \infty$, $y' < 0^-$

en los intervalos $<-\infty, 2>$, $<4, \infty>$ es creciente y decreciente en el intervalo $<2, 4>$

$y' = \frac{-4(x-4)}{(x-2)^3} \Rightarrow y'' = \frac{8(x-5)}{(x-2)^4} \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow x = 5$, $(5, \frac{8}{9})$ punto de inflexión

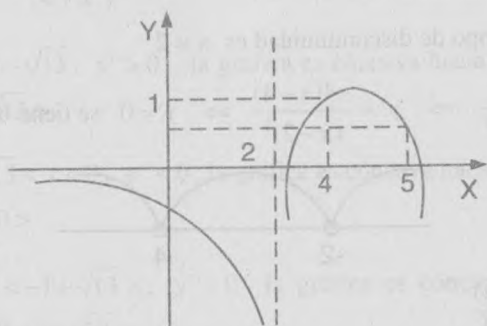


$$y'' = \frac{8(x-5)}{(x-2)^4}$$

para $x < 2$, $y' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo en el intervalo $<-\infty, 2>$

para $2 < x < 5$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba en el intervalo $<2, 5>$

para $x > 5$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba en el intervalo $<5, \infty>$



929

$$y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

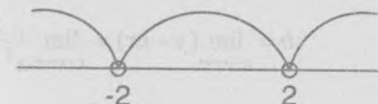
Desarrollo

El campo de discontinuidad es $\mathbb{R} - \{2, -2\}$

Los puntos de discontinuidad es $x = -2$, $x = 2$

$$y = \frac{x}{x^2 - 4} \Rightarrow y' = -\frac{x+4}{(x^2 - 4)^2} = 0$$

para los números críticos, es decir $x^2 - 4 = 0$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 4 = 0$ por lo tanto no hay números críticos.



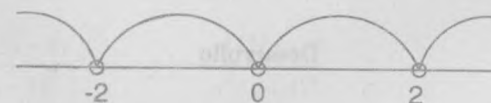
$$y' = -\frac{x+4}{(x^2 - 4)^2}$$

para $x < -2$, $y' < 0$, $-2 < x < 2$, $y' > 0$

para $x > 2$, $y' < 0$, luego la gráfica es decreciente en los intervalos $<-\infty, -2>$, $<-2, 2>$, $<2, \infty>$

$$y' = -\frac{x+4}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$$

$y'' = 0$ para los puntos de inflexión $\Rightarrow x = 0$, $(0, 0)$



$$y'' = \frac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$$

para $x < -2$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $<-\infty, -2>$

para $-2 < x < 0$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $<-2, 0>$

para $0 < x < 2$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $<0, 2>$

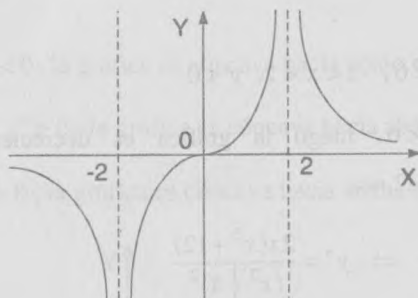
para $x > 2$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $<2, \infty>$

Asíntotas: Verticales se tiene $x = \pm 2$

$$\text{Oblicuas } k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$$

como $y = kx + b \Rightarrow y = 0$ asíntota horizontal



930

$$y = \frac{16}{x^2(x-4)}$$

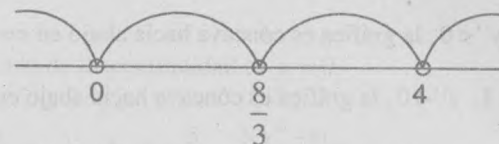
Desarrollo

El campo de existencia es $\mathbb{R} - \{0, 4\}$

Los puntos de discontinuidad son $x = 0$, $x = 4$

$$y = \frac{16}{x^2(x-4)} \Rightarrow y' = \frac{16(3x-8)}{x^3(x-4)^2}$$

$$\text{como } y' = 0 \Rightarrow 3x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \text{ punto crítico}$$



$$y' = \frac{16(3x-8)}{x^3(x-4)^2}$$

para $x < 0$, $y' < 0$

$$0 < x < \frac{8}{3}, y' > 0$$

$$\frac{8}{3} < x < 4, y' < 0$$

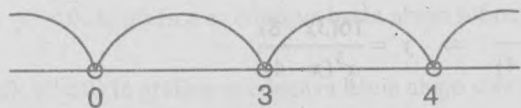
$$4 < x < \infty, y' < 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ máximo en } x = \frac{8}{3}, \left(\frac{8}{3}, -\frac{27}{16}\right)$$

en los intervalos $<-\infty, 0>$, $<\frac{8}{3}, 4>$, $<4, \infty>$ la gráfica es decreciente y en intervalo $<0, \frac{8}{3}>$ es creciente.

$$y' = \frac{-16(3x-8)}{x^3(x-4)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-512(x-3)}{x^2(x-4)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 3, \left(x, -\frac{16}{9}\right) \text{ punto de inflexión}$$



$$y'' = \frac{-512(x-3)}{x^2(x-4)^3}$$

para $x < 0$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$

para $0 < x < 3$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo en $(0, 3)$

para $3 < x < 4$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba en $(3, 4)$

para $x > 4$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo en $(4, \infty)$

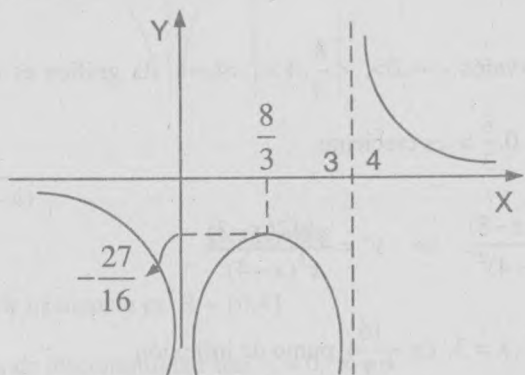
para las asíntotas: Verticales se tiene $x = 0$, $x = 4$

Oblicuas: $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x^3(x-4)} = 0$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x^2(x-4)} = 0$$

Como $y = kx + b \Rightarrow y = 0$

Asíntota horizontal.



931

$$y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$$

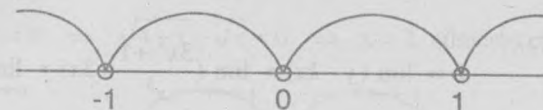
Desarrollo

$$y = 3x + \frac{1}{x^3} \Rightarrow \text{el campo de existencia es: } \mathbb{R} - \{0\}$$

luego el punto de discontinuidad es $x = 0$

$$y = 3x + \frac{1}{x^3} \Rightarrow y' = 3 - \frac{3}{x^4} = \frac{3(x^4 - 1)}{x^4}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow \{-1, 1\} \text{ puntos críticos}$$



$$y' = 3(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

para $x < -1$, $y' > 0^+$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = -1$, $(-1, 4)$

$-1 < x < 0$, $y' < 0^-$

$0 < x < 1$, $y' < 0^-$

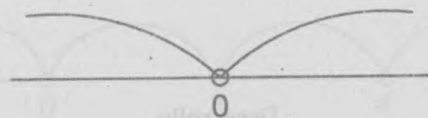
$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = 1$, $(1, 4)$

$1 < x < \infty$, $y' > 0^+$

La gráfica es creciente en $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ y decreciente en $(-1, 0)$, $(0, 1)$

$$\text{Como } y' = 3 - \frac{3}{x^4} \Rightarrow y'' = \frac{12}{x^5}$$

$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y'' = 0$, por lo tanto no hay punto de inflexión.



$$y'' = \frac{12}{x^5}$$

para $x < 0$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo sobre $<-\infty, 0>$

para $x > 0$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $<0, \infty>$

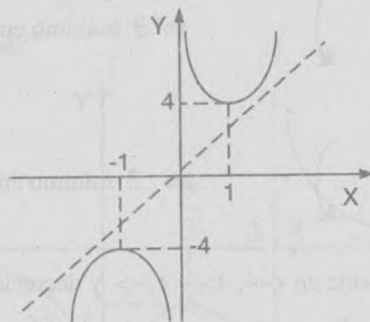
para las asíntotas: Verticales se tiene $x = 0$

Oblicuas: $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 1}{x^4} = 3$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^4 + 1}{x^4} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

como $y = kx + b \Rightarrow y = 3x$

Asíntota oblicuas



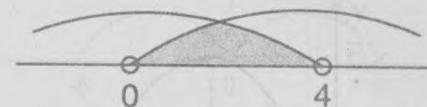
932 $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$

Desarrollo

Aplicación de la Derivada

Para determinar el campo de existencia se tiene:

$$x \geq 0 \wedge 4 - x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 4$$

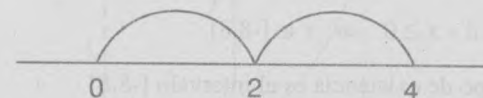


Luego el campo de existencia es $[0, 4]$

$$y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}} = 0 \text{ para los números críticos}$$

como $y' = 0 \Rightarrow \sqrt{4-x} - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 2$ números críticos



para $0 < x < 2$, $y' > 0^+$

$\Rightarrow$ máximo en $x = 2$, $(2, 2\sqrt{2})$

$2 < x < 4$, $y' < 0^-$

La gráfica es creciente en el intervalo $<0, 2>$ y decreciente en el intervalo $<2, 4>$

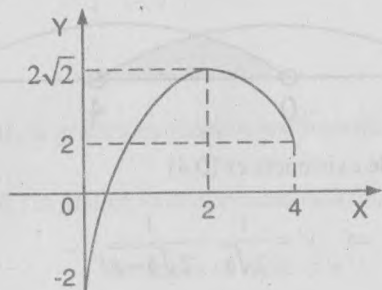
$$y' = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}} = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \frac{1}{4\sqrt{(4-x)^3}}$$

$y'' = 0$ para los puntos de inflexión.

$$-\frac{(\sqrt{(4-x)^3} + \sqrt{x^3})}{4\sqrt{x^3}\sqrt{(4-x)^3}} = 0 \Rightarrow \sqrt{(4-x^3)} = -\sqrt{x^3}, x \in \mathbb{R} \text{ tal que } y'' = 0$$

Para $x \in [0, 4]$, $y'' < 0$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $[0, 4]$

No tiene asíntotas



933 $y = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$

Desarrollo

Para determinar el campo de existencia se tiene:

$$8+x \geq 0 \wedge 8-x \geq 0 \Rightarrow x \in [-8, 8]$$

Luego el campo de existencia es el intervalo $[-8, 8]$

$$y = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{8+x}} + \frac{1}{2\sqrt{8-x}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{8-x} + \sqrt{8+x}}{2\sqrt{64-x^2}} = 0, \text{ para los números críticos}$$

$$\text{es decir } \sqrt{8-x} + \sqrt{8+x} = 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

por lo tanto no hay números críticos

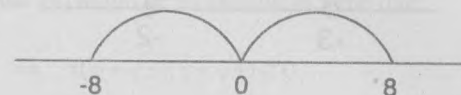
para $x \in [-8, 8]$, $y' > 0$ la gráfica es creciente

$$y' = \frac{\sqrt{8-x} + \sqrt{8+x}}{2\sqrt{64-x^2}} \Rightarrow y'' = \frac{8(\sqrt{8+x} - \sqrt{8-x})}{2(64-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Aplicación de la Derivada

y'' para los puntos de inflexión, es decir:

$$\sqrt{8-x} + \sqrt{8+x} = 0 \Rightarrow x = 0, (0, 0) \text{ punto de inflexión}$$

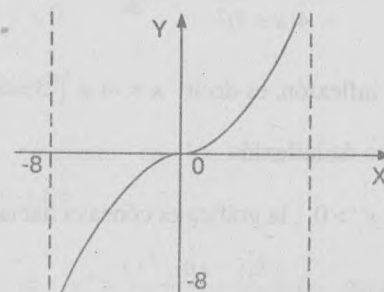


$$y'' = \frac{8(\sqrt{8+x} - \sqrt{8-x})}{2(64-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

para $-8 < x < 0$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo en $<-8, 0>$

para $0 < x < 8$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba en $<0, 8>$

asíntota no tiene



934 $y = x\sqrt{x+3}$

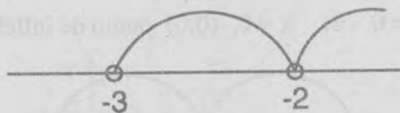
Desarrollo

Para determinar el campo de existencia se tiene:

$$x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x \in [-3, \infty) \text{ es el campo de existencia}$$

$$y = x\sqrt{x+3} \Rightarrow y' = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}} = 0 \text{ para los números críticos.}$$

Es decir $3(x+2)=0 \Rightarrow x=-2$



$$y' = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$$

para $-3 < x < -2$, $y' < 0$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = -2$, $(-2, -2)$

$-2 < x < \infty$, $y' > 0$

La gráfica es decreciente en $<-3, -2>$ y es creciente en $<-2, \infty>$

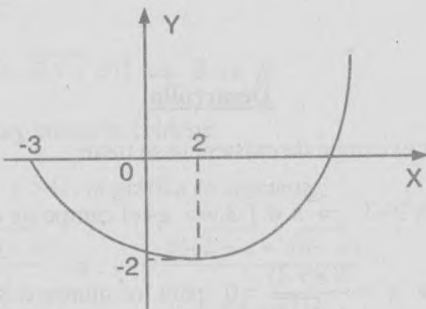
$$y' = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}} \Rightarrow y'' = \frac{3(x+4)}{4(x+3)^{3/2}} = 0$$

para los puntos de inflexión, es decir: $x = -4 \notin [-3, \infty)$

Luego no hay punto de inflexión

Para $x \in [-3, \infty)$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre $<-3, \infty>$

No tiene asíntotas.

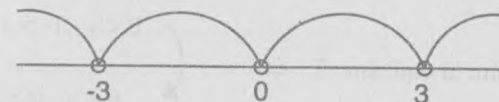


935 $y = \sqrt{x^3 - 3x}$

Desarrollo

Para determinar el campo de existencia se tiene que:

$$x^3 - 3x \geq 0 \Rightarrow x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \geq 0$$



$$y' = \frac{3(x+1)(x-1)}{2\sqrt{x^3 - 3x}}$$

para $-3 < x < -1$, $y' > 0^+$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = -1$ $(-1, \sqrt{2})$

$-1 < x < 0$, $y' < 0^-$

$3 < x < \infty$, $y' > 0^+$

La gráfica es creciente en los intervalos $<-\sqrt{3}, -1>$ y $<\sqrt{3}, \infty>$ decreciente en $<-1, 0>$

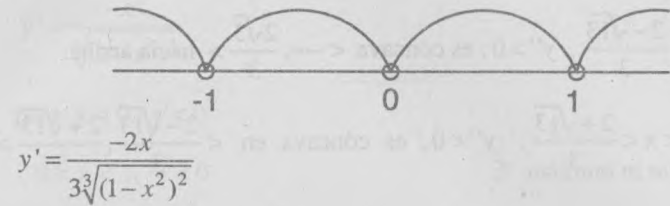
$$y' = \frac{3(x^2 - 1)}{2\sqrt{x^3 - 3x}} \Rightarrow y'' = \frac{(x^4 - 6x - 3)3}{4(x^3 - 3x)^{3/2}} = 0, \text{ para calcular los puntos de inflexión}$$

como $y'' = 0 \Rightarrow x^4 - 6x^2 - 3 = 0$ de donde se tiene:

$$x = \pm \sqrt{\frac{6\sqrt{48}}{2}} \in [\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, \infty)$$

por lo tanto no hay puntos de inflexión

Aplicación de la Derivada



- para $-\infty < x < -1$, $y' > 0$ $\Rightarrow \nexists$ máximo ni mínimo $x = -1$
 $-1 < x < 0$, $y' > 0$ $\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 0$, $(0,1)$
 $0 < x < 1$, $y' < 0$ $\Rightarrow \exists$ máximo ni mínimo $x = 1$
 $1 < x < \infty$, $y' < 0$

La gráfica es creciente en $-\infty, -1$, $-1, 0$ y decreciente en $0, 1$ y $1, \infty$

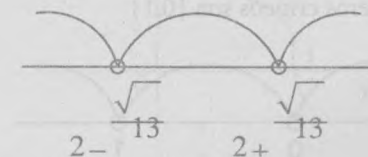
$$y' = \frac{-2x}{3\sqrt{1-x^2}^2} \Rightarrow y' = \frac{2(3x^2 - 4x - 3)}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

para determinar los puntos de inflexión, es decir:

$$3x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2 - \sqrt{13}}{3}, x_2 = \frac{2 + \sqrt{13}}{3}$$

$$\text{Luego } p_1\left(\frac{2 - \sqrt{13}}{3}, \sqrt[3]{\frac{4\sqrt{13} - 8}{9}}\right), p_2\left(\frac{2 + \sqrt{13}}{3}, \sqrt[3]{\frac{-(4 + 4\sqrt{13})}{9}}\right)$$

Son los puntos de inflexión

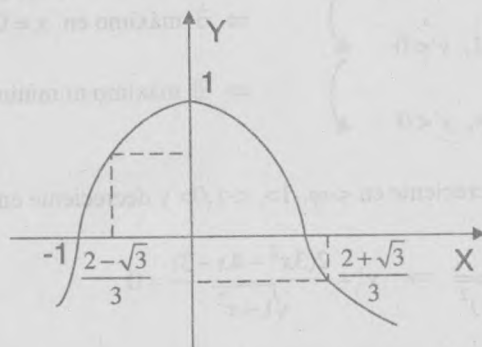


Para $x < \frac{2-\sqrt{13}}{3}$, $y'' > 0$, es cóncava $<-\infty, \frac{2-\sqrt{13}}{3}>$ hacia arriba.

$\frac{2-\sqrt{13}}{3} < x < \frac{2+\sqrt{13}}{3}$, $y'' < 0$, es cóncava en $<\frac{2-\sqrt{13}}{3}, \frac{2+\sqrt{13}}{3}>$ hacia abajo

Para $x > \frac{2+\sqrt{13}}{3}$, $y'' > 0$, es cóncava en $<\frac{2+\sqrt{13}}{3}, \infty>$ hacia arriba.

No tiene asíntotas.



937

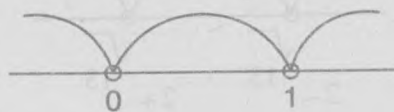
$$y = \sqrt[3]{1-x^3}$$

Desarrollo

El campo de existencia es todos los números reales

$$y = \sqrt[3]{1-x^3} \Rightarrow y' = \frac{-x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = 0$$

para los números críticos $\Rightarrow x = 0$, además $\nexists y'$, es decir $1-x^3 = 0 \Rightarrow x = 1$
por lo tanto los números críticos son $\{0, 1\}$



Aplicación de la Derivada

$$y' = \frac{-x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

para $x < 0$, $y' < 0$

$0 < x < 1$, $y' < 0$

$1 < x < \infty$, $y' < 0$

$\nexists$ máximo ni mínimo

La gráfica es decreciente en $<-\infty, 0>$, $<0, 1>$, $<1, \infty>$

$$y' = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \Rightarrow y'' = -\frac{2x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

de donde los puntos de inflexión son $(0, 1)$, $(1, 0)$



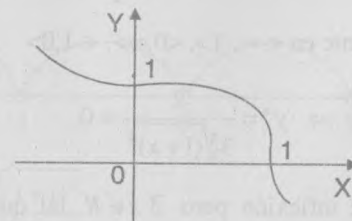
$$y'' = -\frac{2x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

para $x < 0$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba en $<-\infty, 0>$

para $0 < x < 1$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo en $<0, 1>$

para $x > 1$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba en $<1, \infty>$

no tiene asíntotas



938 $y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$

Desarrollo

El campo de existencia es todos $\mathbb{R}$

$$y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 2 - \frac{2(x+1)}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}$$

$$y' = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x+1}} = 0 \quad \text{para determinar los números críticos.}$$

$$2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x+1}} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ además } \exists y', \text{ es decir } 1+x=0 \Rightarrow x=-1$$

por lo tanto los números críticos son $\{-1, 0\}$



$$y' = 2 \left(\frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x}} \right)$$

para $x < -1$, $y' > 0$

$-1 < x < 0$, $y' < 0$

$0 < x < \infty$, $y' > 0$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = -1$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 0$

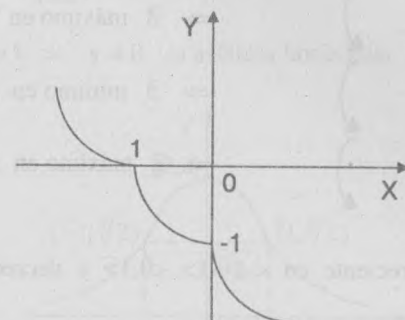
La gráfica es creciente en $<-\infty, -1>$, $<0, \infty>$, $<-1, 0>$

$$y' = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x+1}} = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+x)^4}} = 0$$

Para los puntos de inflexión pero $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $y'' = 0$ por lo tanto los puntos de inflexión son en $x = -1$ y en $x = 0$ es decir $(-1, 0)$ y $(0, -1)$.

Aplicación de la Derivada

Asíntotas no existe.



939 $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$

Desarrollo

El campo de existencia es todos los reales

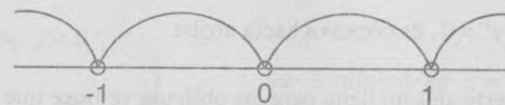
$$y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = 0$$

determinar los números críticos. Es decir:

$$\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow x = 0$$

además $\exists y'$ es decir $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Luego los números críticos son $\{-1, 0, 1\}$



$$y' = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

para $x < -1$, $y' > 0$

$-1 < x < 0$, $y' > 0$

$0 < x < 1$, $y' < 0$

$1 < x < \infty$, $y' < 0$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = -1$

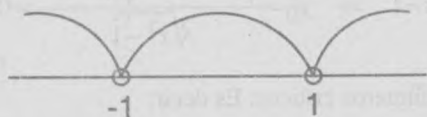
$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = 0$, $(0,2)$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 1$

La gráfica es creciente en $<-\infty, -1>$, $<0, 1>$ y decreciente en los intervalos $<-1, 0>$ y $<1, \infty>$

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Rightarrow y'' = \frac{2(\sqrt[3]{(x+1)^5} - \sqrt[3]{(x-1)^5})}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^5}}$$

como $\exists x \in \mathbb{R}$, tal que $y'' = 0$ por lo tanto para $x = \pm 1$ $\exists y'$ entonces en $x = \pm 1$ hay puntos de inflexión, es decir: $(1, \sqrt[3]{2})$, $(-1, \sqrt[3]{2})$



$$y'' = \frac{2(\sqrt[3]{(x+1)^5} - \sqrt[3]{(x-1)^5})}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^5}}$$

para $x < -1$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba

$-1 < x < 1$, $y'' < 0$, es cóncava hacia abajo

para $x > 1$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba

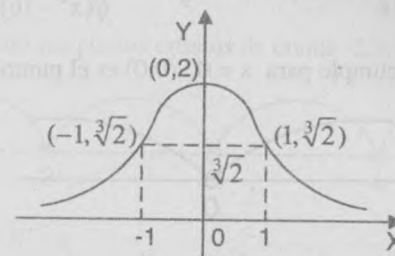
Asíntotas Verticales no tiene para las oblicuas se tiene que:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{x} = 0$$

Aplicación de la Derivada

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}) = 0$$

Luego $y = kx + b \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.



940

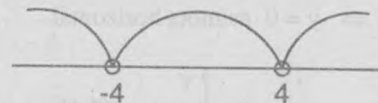
$$y = \sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}$$

Desarrollo

El campo de existencia es todo los números reales $\mathbb{R}$

$$y = \sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{x-4} - \sqrt[3]{x+4}}{\sqrt[3]{x^2-16}} \right)$$

$\exists y'$ para $x = \pm 4$ puntos críticos



$$y' = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{x-4} - \sqrt[3]{x+4}}{\sqrt[3]{x^2-16}} \right)$$

para $x < -4$, $y' < 0^-$

$-4 < x < 4$, $y' > 0^+$

$4 < x < \infty$, $y' < 0^-$

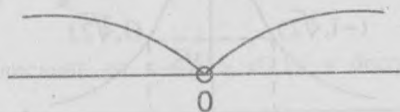
$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = -4$, $(-4, -4)$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 4$, $(4, 4)$

Es creciente en $\langle -4, 4 \rangle$ y decreciente en los intervalos, $\langle -\infty, -4 \rangle$, $\langle 4, \infty \rangle$

$$y' = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{x-4} - \sqrt[3]{x+4}}{\sqrt[3]{x^2-16}} \right) \Rightarrow y'' = \frac{2}{9} \left(\frac{\sqrt[3]{(x+4)^4} - \sqrt[3]{(x-4)^4}}{\sqrt[3]{(x^2-16)^4}} \right)$$

luego $y''=0$ se cumple para $x=0$, $(0,0)$ es el punto de inflexión



para $x < 0$, $y'' > 0$ es cóncava hacia arriba

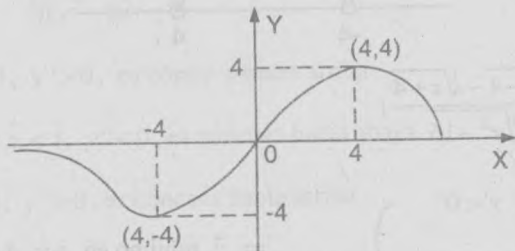
$0 < x < \infty$, $y'' < 0$ es cóncava hacia abajo

Asíntotas verticales no tiene, para las oblicuas.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}) = 0$$

Luego $y = kx + b \Rightarrow y = 0$ asíntota horizontal



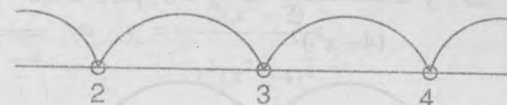
$$y = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-4)^2}$$

Desarrollo

Dominio es todo los números reales

$$y = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-4)^2} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{x-4} + \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{x-4}} \right)$$

$y'=0$, $\nexists y'$ para los puntos críticos de donde 2,3,4 son los números crítico



para $x < 2$, $y' < 0^-$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = 2$, $(2, \sqrt[3]{4})$

$2 < x < 3$, $y' > 0^+$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 3$, $(3, 2)$

$3 < x < 4$, $y' < 0^-$

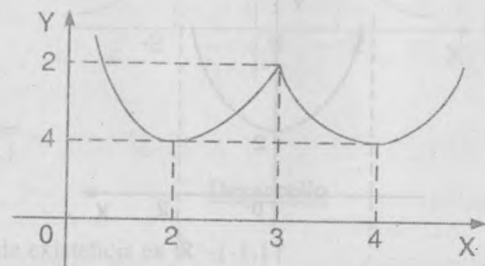
$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = 4$, $(4, \sqrt[3]{4})$

$4 < x < \infty$, $y' > 0^+$

La gráfica es creciente $\langle 2, 3 \rangle$ y $\langle 4, \infty \rangle$ y decreciente en $\langle -\infty, 2 \rangle$ y $\langle 3, 4 \rangle$

$$y' = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{x-4} + \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{x-4}} \right) \Rightarrow y' = 0$$

para los puntos de inflexión $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y''=0$, por lo tanto no hay puntos de inflexión.



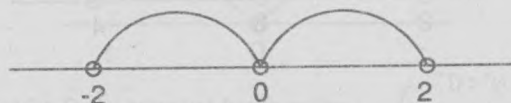
942

$$y = \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$$

Desarrollo

El campo de existencia $4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in (-2, 2)$

$$y = \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow y' = \frac{4x}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow y' = 0 \text{ para } x = 0$$



para $-2 < x < 0$, $y' < 0^-$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = 0$, $(0, 2)$

$0 < x < 2$, $y' > 0^+$

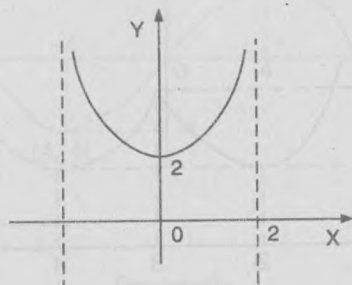
en $(-2, 0)$ es decreciente y en $(0, 2)$ es creciente.

$$y' = \frac{4x}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow y'' = \frac{4(2x^2+2)}{(4-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

como $\exists x \in \mathbb{R}$, $y'' = 0$ entonces no tiene puntos de inflexión

Luego para $x \in (-2, 2)$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba.

Tiene como asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$



943

$$y = \frac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$$

Desarrollo

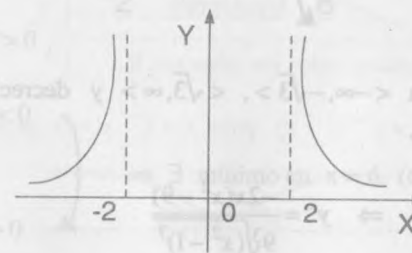
El campo de existencia es $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

$$y = \frac{8}{x\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow y' = -\frac{2(x^2-2)}{x^2(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$$

Luego para $x = \pm\sqrt{2}$, $y' = 0$ no son puntos críticos porque $\pm\sqrt{2}$ no están en el campo de existencia.

$$y' = -\frac{2(x^2-2)}{x^2(x^2-4)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow y'' = \frac{16(3x^4-10x^2+16)}{x^3(x^2-4)^{\frac{5}{2}}}$$

como $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y'' = 0$, no hay punto de inflexión, tiene como asíntota vertical a $x = \pm 2$ y como asíntota horizontal a $y = 0$.



944

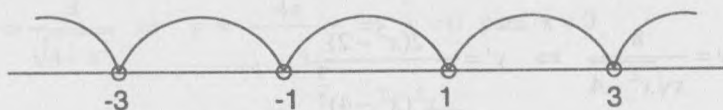
$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

Desarrollo

El campo de existencia es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} \Rightarrow y' = \frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

para $x = \pm 3$, $y' = 0$, que son los puntos críticos



para $x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = \sqrt{3}$, $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$

$\Rightarrow \nexists$ máximo ni mínimo

$-1 < x < 1$, $y' < 0$

$\Rightarrow \nexists$ máximo ni mínimo

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = \sqrt{3}$, $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$

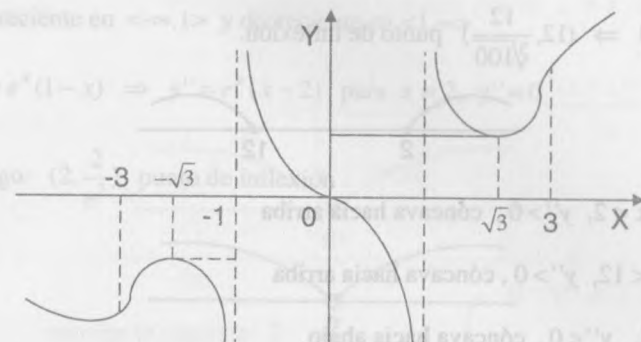
$x > \sqrt{3}$, $y' > 0$

es creciente en $<-\infty, -\sqrt{3}>$, $<\sqrt{3}, \infty>$ y decreciente en $<-\sqrt{3}, -1>$, $<-1, 1>$, $<1, \sqrt{3}>$

$$y' = \frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} \Rightarrow y'' = \frac{-2x(x^2-9)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$$

entonces para $x = 0$, $x = \pm 3$, $y'' = 0$ de donde $(0,0)$, $(3, \frac{3}{2})$, $(-3, -\frac{3}{2})$ son los puntos de inflexión.

Como asíntotas verticales tiene a $x = \pm 1$ y como asíntotas oblicuas no tiene.



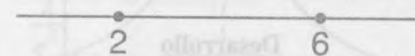
945

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$$

Desarrollo

El campo de existencia es $<-\infty, 2> \cup <2, \infty>$

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} \Rightarrow y' = \frac{x-6}{3\sqrt[3]{(x-2)^5}} \text{ para } x = 6, y' = 0$$



para $x < 2$, $y' > 0$

$2 < x < 6$, $y' < 0$

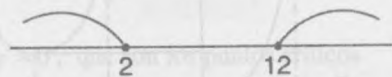
$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = 6$, $(6, \frac{3}{\sqrt[3]{2}})$

$x > 6$, $y' > 0$

es creciente en $<-\infty, 2>$ y $<6, \infty>$ y decreciente en $<2, 6>$

$$y' = \frac{x-6}{3\sqrt[3]{(x-2)^5}} \Rightarrow y'' = \frac{-2(x-12)}{9\sqrt[3]{(x-2)^3}} \text{ para } x = 12,$$

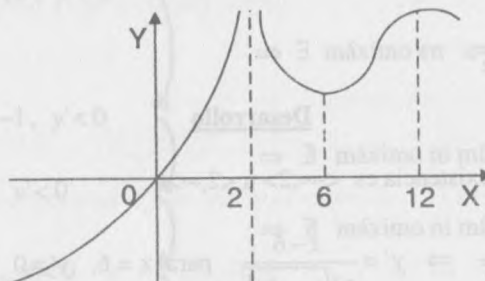
$$y''=0 \Rightarrow (12, \frac{12}{\sqrt[3]{100}}) \text{ punto de inflexión.}$$



Para $x < 2$, $y'' > 0$, cóncava hacia arriba

$2 < x < 12$, $y'' > 0$, cóncava hacia arriba

$x > 12$, $y'' < 0$, cóncava hacia abajo



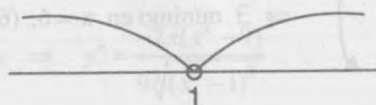
946

$$y = xe^{-x}$$

Desarrollo

Su campo de existencia todos los números $\mathbb{R}$.

$$y = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x}(1-x) \text{ para } x=1, y'=0 \text{ punto crítico}$$



para $x < 1$, $y' > 0$

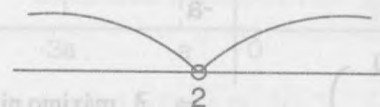
$$\Rightarrow \exists \text{ máximo en } x=1, (1, \frac{1}{e})$$

$1 < x < \infty$, $y' < 0$

es creciente en $-\infty, 1$ y decreciente en $1, \infty$

$$y' = e^x(1-x) \Rightarrow y'' = e^x(x-2) \text{ para } x=2, y''=0$$

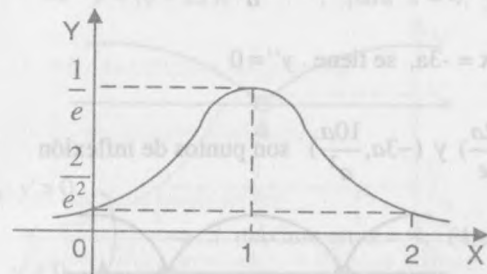
Luego: $(2, \frac{2}{e^2})$ punto de inflexión



Para $x < 2$, $y'' < 0$ es cóncava hacia abajo

$x > 2$, $y'' > 0$ es cóncava hacia arriba

tiene como asíntota horizontal a $y=0$



947

$$y = (a + \frac{x^2}{a})e^{\frac{x}{a}}$$

Desarrollo

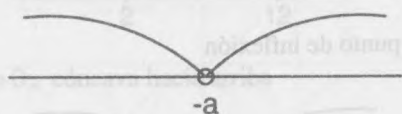
Su campo de existencia es $\mathbb{R}$.

$$y = (a + \frac{x^2}{a})e^{\frac{x}{a}} \Rightarrow y' = e^{\frac{x}{a}}(\frac{x^2}{a^2} + \frac{2x}{a} + 1)$$

Luego para $x = -a$, se tiene $y'=0$

Pero en $x = -a$ no hay máximo ni mínimo.

$$y' = \frac{e^{\frac{x}{a}}(x+a)^2}{a^2}$$



para $x < -a$, $y' > 0$

$\Rightarrow \nexists$ máximo ni mínimo

$x > -a$, $y' > 0$

la curva es creciente en $<-\infty, -a>$ y $<-a, \infty>$

$$y' = \frac{e^{\frac{x}{a}}(x+a)^2}{a^2} \Rightarrow y'' = \frac{e^{\frac{x}{a}}(x+a)(x+3a)}{a^3}$$

para $x = -a$, $x = -3a$, se tiene $y'' = 0$

Luego $(-a, \frac{2a}{e})$ y $(-3a, \frac{10a}{a^3})$ son puntos de inflexión



Para $x < -3a$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba sobre $<-\infty, -3a>$

Para $-3a < x < -a$, $y'' < 0$, es cóncava hacia abajo sobre $<-3a, -a>$

Para $x > -a$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba sobre $<-a, \infty>$

No tiene asíntotas verticales

Tiene como asíntota horizontal a $y = 0$

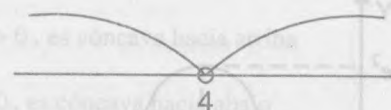
948

$$y = e^{8x-x^2-14}$$

Desarrollo

Su campo de existencia es $\mathbb{R}$.

$$y = e^{8x-x^2-14} \Rightarrow y' = (8-2x)e^{8x-x^2-14}, \text{ para } x = 4, y' = 0 \text{ punto crítico}$$



para $x < 4$, $y' > 0$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 4, (4, e^2)$

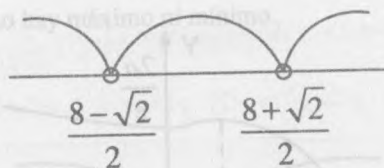
$x > 4$, $y' < 0$

La gráfica es creciente en $<-\infty, 4>$ y decreciente $<4, \infty>$

$$y' = (8-2x)e^{8x-x^2-14} \Rightarrow y'' = (4x^2 - 32x + 62)e^{8x-x^2-14}$$

$$y'' = 0, \text{ cuando } x_1 = \frac{8+\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{8-\sqrt{2}}{2}$$

Luego $(\frac{8+\sqrt{2}}{2}, e^{\frac{3}{2}})$ y $(\frac{8-\sqrt{2}}{2}, e^{\frac{3}{2}})$ punto de inflexión

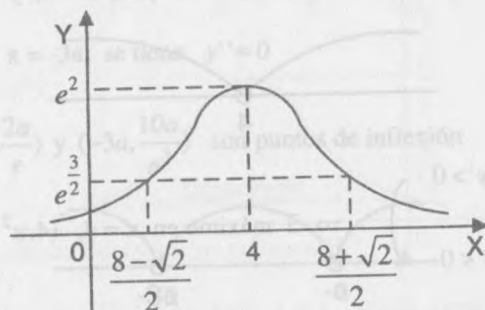


Para $x < \frac{8-\sqrt{2}}{2}$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba

$\frac{8-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{8+\sqrt{2}}{2}$, $y'' < 0$, es cóncava hacia abajo

$x > \frac{8+\sqrt{2}}{2}$, $y'' > 0$ es cóncava hacia arriba

no tiene asíntotas verticales en $y = 0$, tiene asíntota horizontal.



949

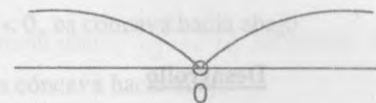
$$y = (2+x^2)e^{-x^2}$$

Desarrollo

Su campo de existencia es todo $\mathbb{R}$

$$y = (2+x^2)e^{-x^2} \Rightarrow y' = -2x(x^2+2)e^{-x^2}$$

para $x = 0$ se tiene $y' = 0$ punto de inflexión



para $x < 0$, $y' > 0$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 0$, $(0, 2)$

$x > 0$, $y' < 0$

La gráfica es creciente en $-\infty, 0$ y decreciente en $0, \infty$

$$y' = -2x(x^2+2)e^{-x^2} \Rightarrow y'' = 2e^{-x^2}(2x^4 - x^2 - 1)$$

de donde para $x = \pm 1$, $y'' = 0$ punto de inflexión $(1, \frac{3}{e})$, $(-1, \frac{3}{e})$

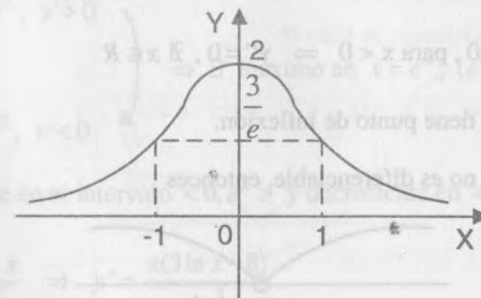


para $x < -1$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba

$-1 < x < 1$, $y'' < 0$, es cóncava hacia abajo

$x > 1$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba

no tiene asíntotas verticales, pero en $y = 0$ tiene asíntota horizontal.



950 $y = 2|x| - x^2$

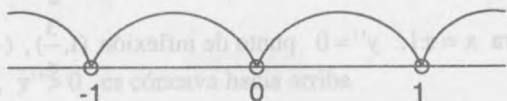
Desarrollo

El campo de existencia es todo $\mathbb{R}$

Para $x \geq 0$, $y = 2x - x^2 \Rightarrow y' = 2 - 2x = 0$ se tiene $x = 1$

$x < 0$, $y = -2x - x^2 \Rightarrow y' = -2 - 2x = 0$ se tiene $x = -1$

Luego los puntos críticos son $\{-1, 0, 1\}$



Para $x < -1$, $y' > 0$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = -1$, $(-1, 1)$

$-1 < x < 0$, $y' < 0$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = 0$, $(0, 0)$

$0 < x < 1$, $y' > 0$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 1$, $(1, 1)$

$1 < x < \infty$, $y' < 0$

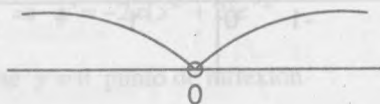
es creciente en $<-\infty, -1>$, $<0, 1>$ y decreciente en $<-1, 0>$, $<1, \infty>$

$y' = 2 - 2x = 0$, para $x > 0 \Rightarrow y'' = -2, \forall x \in \mathbb{R}$

$y' = -2 - 2x = 0$, para $x < 0 \Rightarrow y'' = -2, \forall x \in \mathbb{R}$

por lo tanto no tiene punto de inflexión.

Pero en $x = 0$ no es diferenciable, entonces

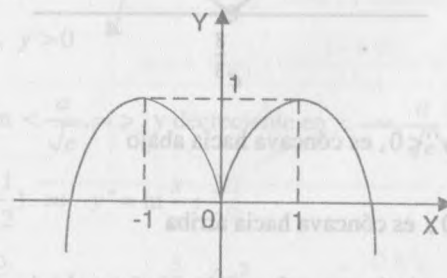


Aplicación de la Derivada

Para $x < 0$, $y'' < 0$, es cóncava hacia abajo

$x > 0$, $y'' < 0$, es cóncava hacia abajo

no tiene asíntotas



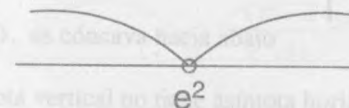
951

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Desarrollo

El campo de existencia es $<0, \infty>$

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{2 - \ln x}{2\sqrt{x^3}} \text{ para } x = e^2, y' = 0$$



para $x < e^2$, $y' > 0$

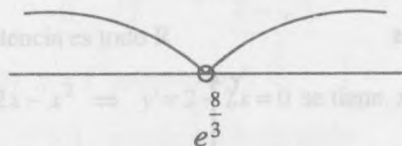
$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = e^2$, $(e^2, \frac{2}{e})$

$x > e^2$, $y' < 0$

es creciente en el intervalo $<0, e^2>$ y decreciente en $<e^2, \infty>$

$$y' = \frac{2 - \ln x}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow y'' = \frac{x(3 \ln x - 8)}{4x^3}$$

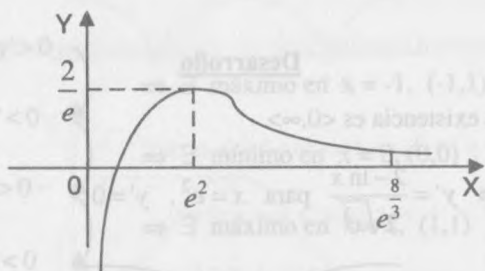
para $x = e^{\frac{8}{3}}$, $y'' = 0$ entonces $(e^{\frac{8}{3}}, \frac{8}{3e^3})$ punto de inflexión



para $x < e^{\frac{8}{3}}$, $y'' < 0$, es cóncava hacia abajo

$x > e^{\frac{8}{3}}$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba

tiene asíntota vertical en $x = 0$ y tiene asíntota horizontal en $y = 0$



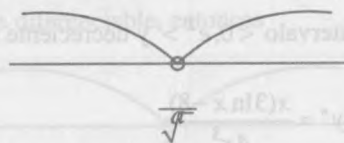
952

$$y = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{a}$$

Desarrollo

El campo de existencia es todo $\mathbb{R}$

$$y = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{a} \Rightarrow y' = x \left(\ln \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \right) \text{ para } x = \frac{a}{\sqrt{e}}, y' = 0$$



Aplicación de la Derivada

para $x < \frac{a}{\sqrt{e}}$, $y' < 0$

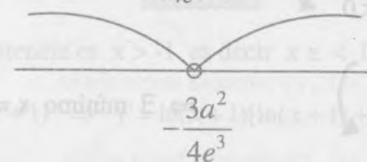
$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = \frac{a}{\sqrt{e}}$, $(\frac{a}{\sqrt{e}}, -\frac{a^2}{4e})$

$x > \frac{a}{\sqrt{e}}$, $y' > 0$

es creciente en $(\frac{a}{\sqrt{e}}, \infty)$, y decreciente en $(-\infty, \frac{a}{\sqrt{e}})$

$$y' = x \left(\ln \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow y'' = \ln \frac{x}{a} + \frac{3}{2}$$

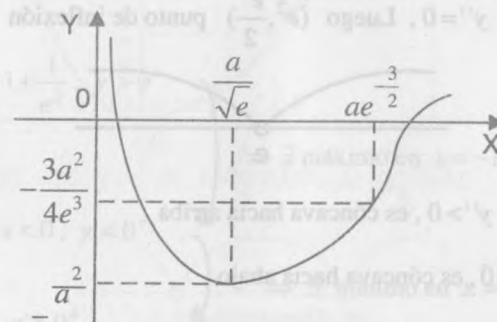
para $x = ae^{\frac{3}{2}}$, $y'' = 0$, $(ae^{\frac{3}{2}}, \frac{3a^2}{4e^3})$ punto de inflexión



para $x < -\frac{3a^2}{4e^3}$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba

$x > -\frac{3a^2}{4e^3}$, $y'' < 0$, es cóncava hacia abajo

en $x = 0$ es asíntota vertical no tiene asíntota horizontal.

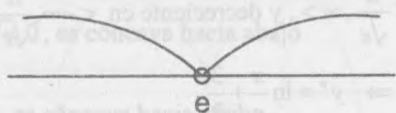


953

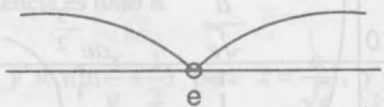
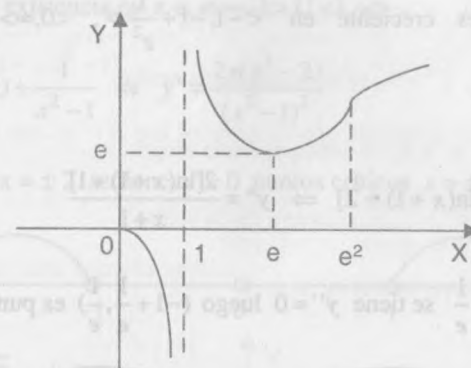
$$y = \frac{x}{\ln x}$$

DesarrolloEl campo de existencia es todo R^+

$$y = \frac{x}{\ln x} \Rightarrow y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0, \text{ para } x = e$$

para $0 < x < 1$, $y' < 0$ $\Rightarrow \nexists$ máximo ni mínimo en $x = 1$ $1 < x < e$, $y' < 0$ para $x < e$, $y' < 0$ $\Rightarrow \exists$ mínimo $x = e$, (e, e) $x > e$, $y' > 0$ es decreciente en $<0, 1>$, $<1, e>$ y creciente en $<e, \infty>$

$$y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \Rightarrow y'' = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$$

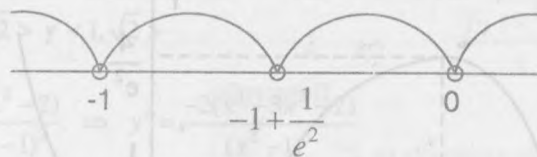
para $x = e^2$, $y'' = 0$, Luego $(e^2, \frac{e^2}{2})$ punto de inflexiónpara $x < e^2$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba $x > e^2$, $y'' < 0$, es cóncava hacia abajoen $x = 1$, se tiene asíntota vertical, no tiene asíntota horizontal.

954

$$y = (x+1) \ln^2(x+1)$$

DesarrolloEl campo de existencia es $x > -1$ es decir $x \in <-1, \infty>$

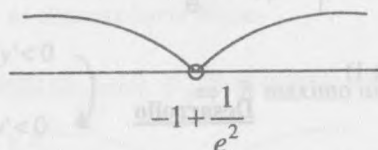
$$y = (x+1) \ln^2(x+1) \Rightarrow y' = \ln(x+1)[\ln(x+1) + 2]$$

para $x = 0$, $x = -1 + \frac{1}{e^2}$ se tiene $y' = 0$ punto críticos $-1 < x < -1 + \frac{1}{e^2}$, $y' > 0^+$ $\Rightarrow \exists$ máximo en $x = -1 + \frac{1}{e^2}$, $(-1 + \frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2})$ $-1 + \frac{1}{e^2} < x < 0$, $y' < 0^-$ $\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = 0$, $(0, 0)$ $0 < x < \infty$, $y' > 0^+$

La gráfica es creciente en $\langle -1, -1 + \frac{1}{e^2} \rangle$, $\langle 0, \infty \rangle$ y decreciente en $\langle -1 + \frac{1}{e^2}, 0 \rangle$

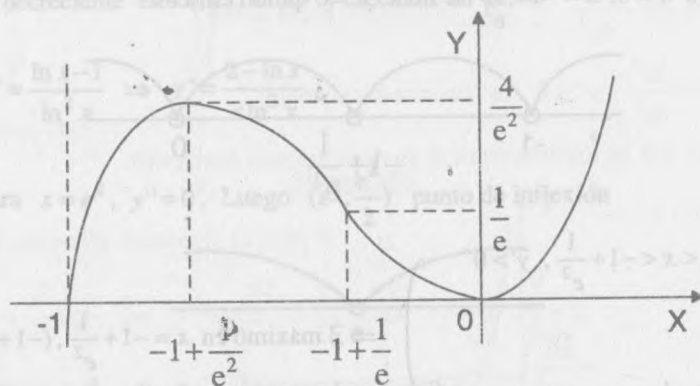
$$y' = \ln(x+1)[\ln(x+1)+2] \Rightarrow y'' = \frac{2[\ln(x+1)+1]}{x+1}$$

para $x = -1 + \frac{1}{e}$ se tiene $y'' = 0$ luego $(-1 + \frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ es punto de inflexión



$-1 < x < -1 + \frac{1}{e}$, $y'' < 0$, es cóncava hacia abajo

$-1 + \frac{1}{e} < x < \infty$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba



955

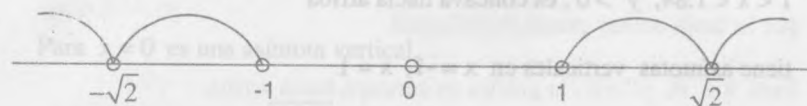
$$y = \ln(x^2-1) + \frac{1}{x^2-1}$$

Desarrollo**Aplicación de la Derivada**

El campo de existencia es $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$

$$y = \ln(x^2-1) + \frac{1}{x^2-1} \Rightarrow y' = \frac{2x(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$$

para $x = 0$, $x = \pm 2$ se tiene $y' = 0$ puntos críticos $x = \pm\sqrt{2}$



para $x < -\sqrt{2}$, $y' < 0^-$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = -\sqrt{2}$, $(-\sqrt{2}, 1)$

$-\sqrt{2} < x < -1$, $y' > 0^+$

$1 < x < \sqrt{2}$, $y' < 0^-$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = \sqrt{2}$, $(\sqrt{2}, 1)$

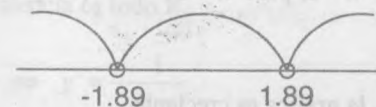
$\sqrt{2} < x < \infty$, $y' > 0^+$

La gráfica es creciente en $\langle -\sqrt{2}, -1 \rangle$, $\langle \sqrt{2}, \infty \rangle$ y decreciente en $\langle -\infty, -\sqrt{2} \rangle$ y $\langle 1, \sqrt{2} \rangle$

$$y' = \frac{2x(x^2-2)}{(x^2-1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-2(x^3-3x^2-2)}{(x^2-1)^3}$$

para $x = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \approx \pm 1.89$ se tiene $y'' = 0$

Luego $(1.89, 1.33)$ y $(-1.89, 1.33)$ puntos de inflexión



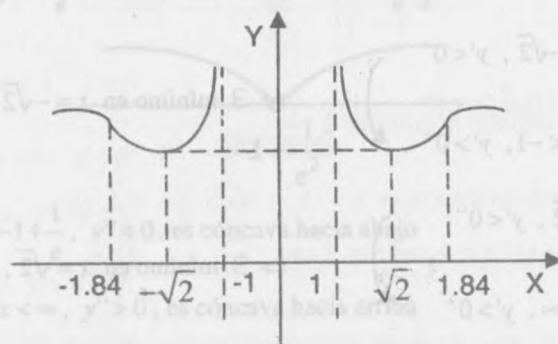
Para $x < -1.89$, $y'' < 0$, es cóncava hacia abajo

$-1.89 < x < -1$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba

$1.89 < x < \infty$, $y'' < 0$, es cóncava hacia abajo

$1 < x < 1.84$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba

tiene asíntotas verticales en $x = -1$, $x = 1$



956

$$y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

Desarrollo

El campo de existencia es $\mathbb{R}^+ - \{0\}$

$$y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x(x^2+1-\sqrt{x^2+1})}$$

Luego $y' = 0$ para $x = 0$, pero $x = 0 \notin \mathbb{R}^+ - \{0\}$ por lo tanto no hay punto de inflexión

Para $x > 0$, $y' > 0$, la gráfica es creciente.

Aplicación de la Derivada

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x(x^2+1-\sqrt{x^2+1})} \Rightarrow y'' = \frac{\sqrt{x^2+1}-3-2x^2}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1-\sqrt{x^2+1})^2}$$

$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y'' = 0$ por lo tanto no hay puntos de inflexión.

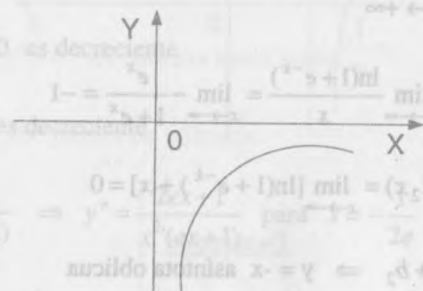
Luego para $x > 0$, $y'' < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo.

Para $x = 0$ es una asíntota vertical.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = 0$$

como $y = kx + b \Rightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal



957

$$y = \ln(1 + e^{-x})$$

Desarrollo

El campo de existencia es todo $\mathbb{R}$.

$$y = \ln(1 + e^{-x}) \Rightarrow y' = -\frac{1}{e^x + 1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $y' = 0$ por lo tanto no hay punto de inflexión para $x \in \mathbb{R}$, $y' < 0$, la gráfica es decreciente.

$$y' = -\frac{1}{e^x + 1} \Rightarrow y'' = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}, y'' = 0$$

por lo tanto no hay punto de inflexión.

Para $x \in \mathbb{R}$, $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba.

No tiene asíntotas verticales. Cuando $x \rightarrow \infty$, $y = 0$

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} = 0$$

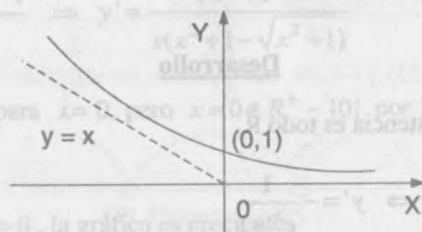
$$b_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$$

luego $y = 0$, $x \rightarrow +\infty$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^x}{1 + e^x} = -1$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(1 + e^{-x}) + x] = 0$$

Luego $y = k_2 x + b_2 \Rightarrow y = -x$ asíntota oblicua



958 $y = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$

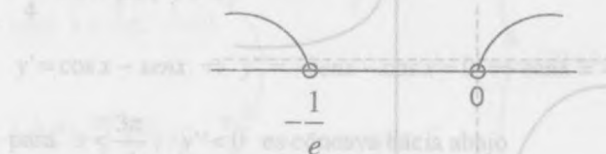
Desarrollo

El campo de existencia es $< -\infty, -\frac{1}{e} > \cup < 0, \infty >$ es decir que no está definido

pero $[-\frac{1}{e}, 0]$

$$y = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x(x+1)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $y' = 0$, no hay puntos críticos



$x < -\frac{1}{e}$, $y' < 0$ es decreciente

$x > 0$, $y' < 0$ es decreciente

$$y' = -\frac{1}{x(x+1)} \Rightarrow y'' = \frac{2x+1}{x^2(x+1)} \text{ para } x = -\frac{1}{2e}$$

$y'' = 0$ pero $-\frac{1}{2e} \in < -\infty, -\frac{1}{e} > \cup < 0, \infty >$, por lo tanto no tiene punto de inflexión

para $x < -\frac{1}{e}$, $y'' < 0$ es cóncava hacia abajo

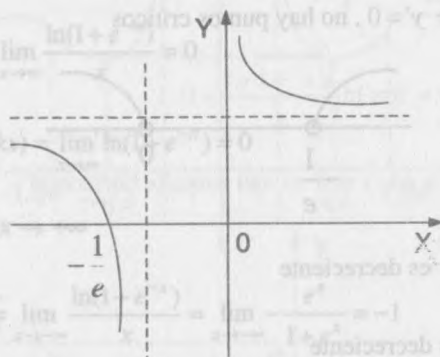
$x > 0$, $y'' > 0$, es cóncava hacia arriba

asíntota vertical es $x = 0$, $x = -\frac{1}{e}$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e + \frac{1}{x})}{x} = 0 \quad \text{para L'Hospital}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e + \frac{1}{x}) = 1$$

Luego como $y = kx + b \Rightarrow y = 1$ asíntota vertical



959 $y = \sin x + \cos x$

Desarrollo

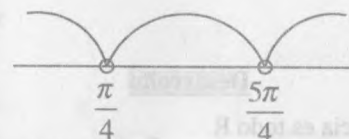
El campo de existencia es todo $\mathbb{R}$

Como $y(x) = y(x + 2\pi)$ la función es periódica con periodo $x = 2\pi$

$$y = \sin x + \cos x \Rightarrow y' = \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x$$

$$\text{de donde } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Aplicación de la Derivada



$$0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad y' > 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ máximo en } x = \frac{\pi}{4}, \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}, \quad y' < 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ mínimo en } x = \frac{5\pi}{4}, \left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$$

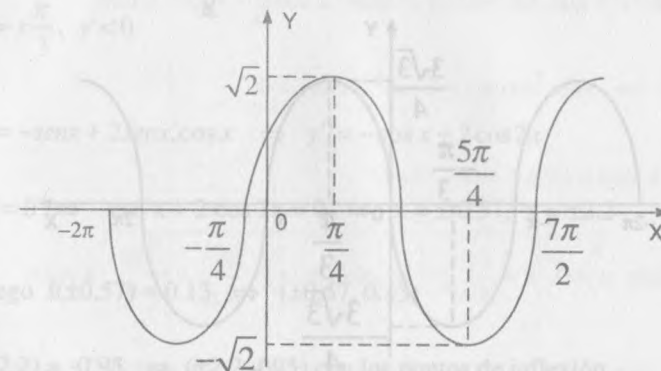
$$\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi, \quad y' > 0$$

$$y' = \cos x - \sin x \Rightarrow y'' = -\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{para } x < \frac{3\pi}{4}, \quad y'' < 0 \text{ es cóncava hacia abajo}$$

$$x > \frac{3\pi}{4}, \quad y'' > 0, \text{ es cóncava hacia arriba}$$

$$\text{para } \left(\frac{3\pi}{4} + k\pi, 0\right) \text{ puntos de inflexión}$$



960

$$y = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$$

Desarrollo

El campo de existencia es todo $\mathbb{R}$

Como $y(x) = y(x + 2\pi)$ la función es periódica con periodo $x = 2\pi$

$$y = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \Rightarrow y' = \cos x + \cos 2x$$

$$y' = 0 \Rightarrow \cos x = -\cos 2x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

para $x < \frac{\pi}{3}, y' > 0^+$

$$\Rightarrow \exists x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

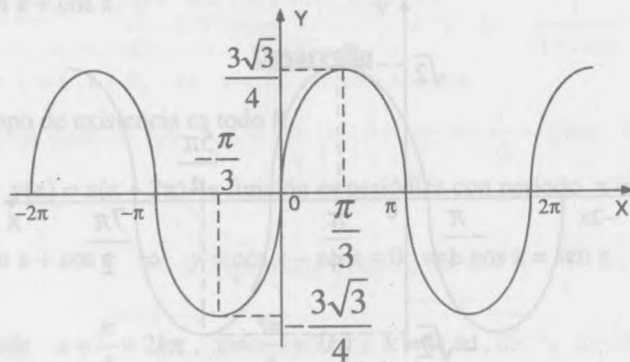
$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}, y' < 0^-$

$$\Rightarrow \exists \text{ mínimo en } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$x > \frac{5\pi}{3}, y' > 0^+$

$$y' = \cos x + \cos 2x \Rightarrow y'' = -\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} 2x$$

$$y'' = 0 \Rightarrow -\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} 2x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$



961

$$y = \cos x - \cos^2 x$$

Desarrollo

El campo de existencia es todo $\mathbb{R}$

$$y = \cos x - \cos^2 x \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$y' = 0 \Rightarrow -\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3}, x = \pm \pi, x = \pm \frac{5\pi}{3}$$

como $y(x) = y(x + 2\pi)$ la función es periódica

para $x < \pm\pi, y' < 0$

$$\Rightarrow \text{en } x = \pm\pi \exists \text{ mínimo } (\pm\pi, -2)$$

$x > \pm\pi, y' > 0$

$x < \pm \frac{\pi}{3}, y' > 0$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} \exists \text{ máximo } \left(\pm \frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$$

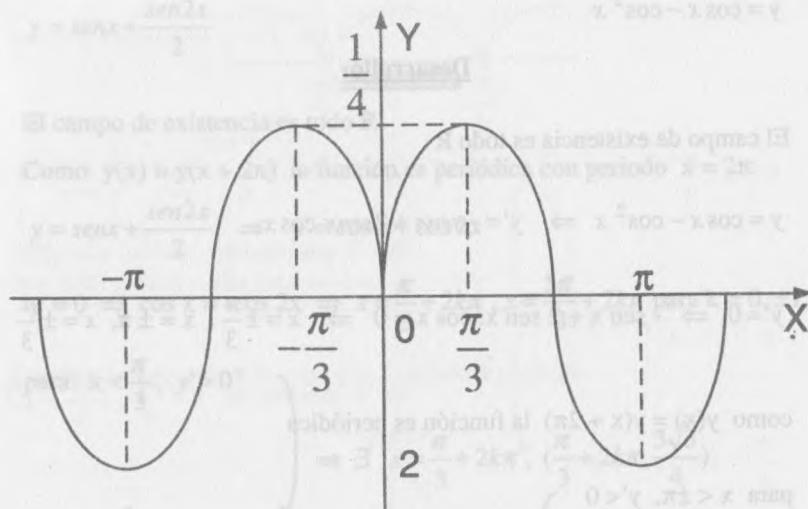
$x > \pm \frac{\pi}{3}, y' < 0$

$$y' = -\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x \Rightarrow y'' = -\cos x + 2\cos 2x$$

$$y'' = 0 \Rightarrow -\cos x + 2\cos 2x = 0 \Rightarrow x = \pm 0.57, x = \pm 2.2$$

$$\text{Luego } f(\pm 0.57) = 0.13 \Rightarrow (\pm 0.57, 0.13)$$

$$f(\pm 2.2) = -0.95 \Rightarrow (\pm 2.2, -0.95) \text{ con los puntos de inflexión}$$



962

$$y = \text{sen}^3 x + \cos^3 x$$

Desarrollo

El campo de existencia es todo $\mathbb{R}$.

$$y = \text{sen}^3 x + \cos^3 x \Rightarrow y' = 3\text{sen}^2 x \cdot \cos x - 3\cos^2 x \cdot \text{sen} x$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3\text{sen}^2 x \cos x - 3\cos^2 x \cdot \text{sen} x = 0$$

$$3 \text{sen} x \cdot \cos x (\text{sen} x - \cos x) = 0$$

$$\text{de donde } x = 0, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}, x = 2\pi$$

como $y(x) = y(x + 2\pi)$ la gráfica es periódica con periodo $x = 2\pi$

Aplicación de la Derivada

$$x < 0, y' > 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ máximo en } x = 0, (0, 1)$$

$$0 < x < \frac{\pi}{4}, y' < 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ mínimo en } x = \frac{\pi}{4}, \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, y' > 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ máximo en } x = \frac{\pi}{2}, \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi, y' < 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ mínimo en } x = \pi, (\pi, -1)$$

$$\pi < x < \frac{5\pi}{4}, y' > 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ máximo en } x = \frac{5\pi}{4}, \left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

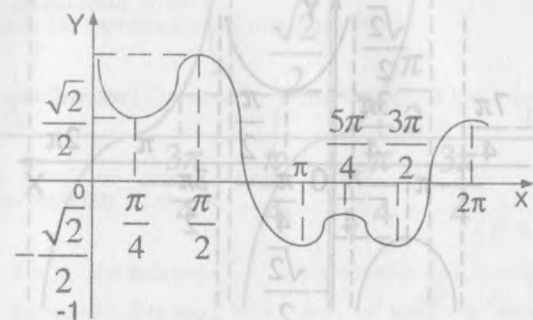
$$\frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}, y' < 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ mínimo en } x = \frac{3\pi}{2}, \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$$

$$\frac{3\pi}{4} < x < 2\pi, y' > 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ máximo en } x = 2\pi, (2\pi, 1)$$

$$x > 2\pi, y' < 0$$



963

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$$

Desarrollo

Como $y(x) = y(x + 2\pi)$ la función es periódica con periodo $x = 2\pi$ luego los puntos de discontinuidad es $\frac{3\pi}{4}$ también en $x = -\frac{\pi}{4}$

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} \Rightarrow y' = -\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

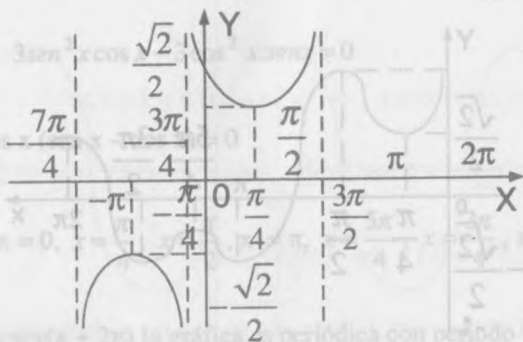
para $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ se tiene $y' = 0$; $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ se tiene $y' = \infty$

para: $x < -\frac{3\pi}{4}, y' > 0$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = -\frac{3\pi}{4}, (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

$x < \frac{\pi}{4}, y' < 0$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = \frac{\pi}{4}, (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\sqrt{2}}{2})$



964

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{4})}$$

Desarrollo

Como $y(x) = y(x + \pi)$ la gráfica es periódica con periodo $x = \pi$ además puntos de discontinuidad son $x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$

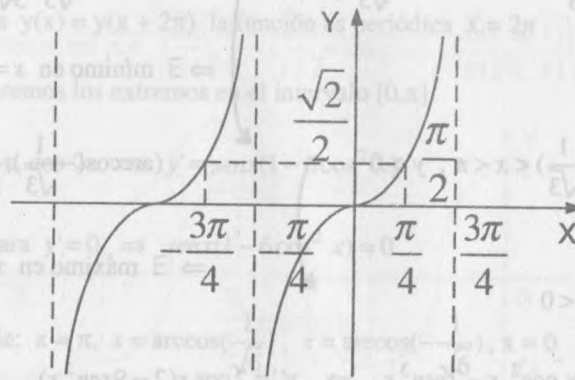
$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{2}}{2(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

$\nexists x \in \mathbb{R}$, tal que $y' = 0$ por lo tanto no hay puntos críticos

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} \Rightarrow y'' = -\frac{\sqrt{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^3} \Rightarrow y'' = \frac{-\sqrt{2} \cos 2x}{(1 + \operatorname{sen} 2x)^2}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Luego los puntos de inflexión: $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\sqrt{2}}{2})$



965 $y = \sin x \cdot \sin 2x$

Desarrollo

El campo de existencia es todo $\mathbb{R}$.

Como $y(x) = y(x + 2\pi)$ la gráfica es periódica cuyo periodo es $x = 2\pi$

Calculando los extremos en el intervalo $[0, \pi]$ se tiene:

$$y' = 4\sin x \cdot \cos^2 x - 2\sin^3 x = 0 \text{ de donde:}$$

$$2\sin x(3\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = \arccos(\pm \frac{1}{\sqrt{3}})$$

para $x < 0, y' < 0$

$$\Rightarrow \exists \text{ mínimo en } x = 0, (0,0)$$

$$0 < x < \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}), y' > 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ máximo en } x = \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

$$\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}) < x < \arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}}), y' > 0$$

$$(\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{3\sqrt{3}})$$

$$\Rightarrow \exists \text{ mínimo en } x = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

$$\arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}}) < x < \pi, y' > 0$$

$$(\arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}}), \frac{4}{3\sqrt{3}})$$

$$x > \pi, y' < 0$$

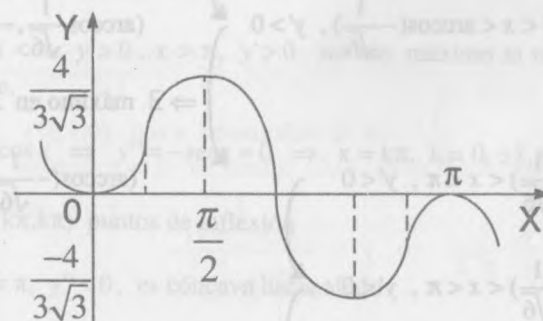
$$\Rightarrow \exists \text{ máximo en } x = \pi, (\pi, 0)$$

$$y' = 4\sin x \cdot \cos^2 x - 2\sin^3 x \Rightarrow y'' = 2\cos x(2 - 9\sin^2 x)$$

para $x = \frac{\pi}{2}, x = \arcsen(\frac{\sqrt{2}}{3}) \Rightarrow x = \pi - \arcsen(\frac{\sqrt{2}}{3})$ se tiene $y'' = 0$ por

tanto: $(\frac{\pi}{2}, 0), (\arcsen(\frac{\sqrt{2}}{3}), \frac{4\sqrt{7}}{27}), (\pi - \arcsen(\frac{\sqrt{2}}{3}), -\frac{4\sqrt{7}}{27})$ son los puntos

inflexión.



966 $y = \cos x \cdot \cos 2x$

Desarrollo

El campo de existencia es todo $\mathbb{R}$.

Además $y(x) = y(x + 2\pi)$ la función es periódica $x = 2\pi$

Calcularemos los extremos en el intervalo $[0, \pi]$

$$y = \cos x \cdot \cos 2x \Rightarrow y' = \sin x(1 - 6\cos^2 x)$$

$$\text{luego para } y' = 0 \Rightarrow \sin x(1 - 6\cos^2 x) = 0$$

$$\text{de donde: } x = \pi, x = \arccos(\frac{1}{\sqrt{6}}), x = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{6}}), x = 0$$

$$\text{Si } x < 0, y' > 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ máximo en } x = 0, (0, 1)$$

$$0 < x < \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right), y' < 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ mínimo en } x = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{6}} < x < \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right), y' > 0$$

$$\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$$

$$\Rightarrow \exists \text{ máximo en } x = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\left(\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) < x < \pi, y' < 0$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) < x < \pi, y' < 0$$

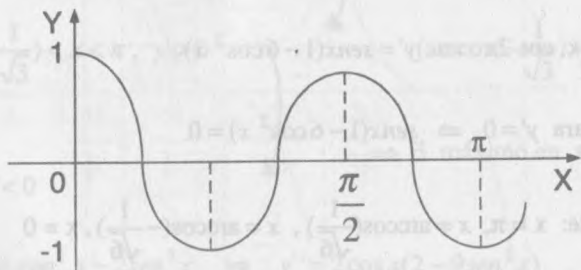
$$\Rightarrow \exists \text{ mínimo en } x = \pi, (\pi, -1)$$

$$x > \pi, y' > 0$$

$$y' = \sin x(1 - 6\cos^2 x) \Rightarrow y'' = \cos x(13 - 18\cos^2 x) \text{ para } x = \frac{\pi}{2},$$

$$x = \arccos\sqrt{\frac{13}{18}}, x = \arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right) \text{ se tiene } y'' = 0. \text{ Luego: } \left(\frac{\pi}{2}, 0\right),$$

$$\left(\arccos\sqrt{\frac{13}{18}}, \frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right), \left(\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right), -\frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right) \text{ son los puntos de inflexión.}$$



$$967 \quad y = x + \sin x$$

Desarrollo

El campo de existencia es todo $\mathbb{R}$

$$y = x + \sin x \Rightarrow y' = 1 + \cos x \text{ de donde } y' = 0$$

$$1 + \cos x = 0 \Rightarrow x = \pi$$

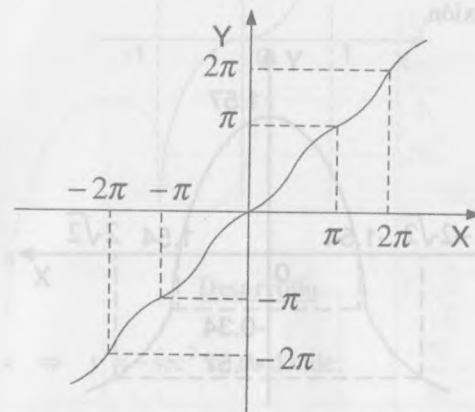
como $x < \pi, y' > 0, x > \pi, y' > 0$ no hay máximo ni mínimo, la gráfica creciente.

$$y' = 1 + \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Luego $(k\pi, k\pi)$ puntos de inflexión

Para $x < \pi, y'' < 0$, es cóncava hacia abajo

$x > \pi, y'' > 0$, es cóncava hacia arriba



$$968 \quad y = \arcsen(1 - \sqrt[3]{x^2})$$

Desarrollo

El campo de existencia $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

$$y = \arcsen(1 - \sqrt[3]{x^2}) \Rightarrow y' = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{2 - \sqrt[3]{x^2}}}$$

Luego $y' = \infty$ cuando $x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{2}$

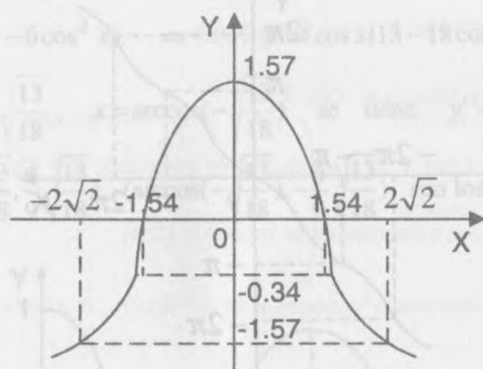
Luego $x = \pm 2\sqrt{2}$ son los extremos del campo de existencia de donde $(\pm 2\sqrt{2}, -1.57)$

Para $x < 0$, $y' > 0$

$x > 0$, $y' < 0$ $\Rightarrow \exists$ máximo en $x = 0$, $(0, 1.57)$

$$y' = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{2 - \sqrt[3]{x^2}}} \Rightarrow y'' = \frac{2(3x^{\frac{2}{3}} - 4)}{9\sqrt[3]{x^5}(2 - x^{\frac{2}{3}})^3}$$

$y'' = 0 \Rightarrow 3x^{\frac{2}{3}} - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.54$ de donde $(\pm 1.54, -0.34)$ son los puntos de inflexión.



969

$$y = \frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Desarrollo

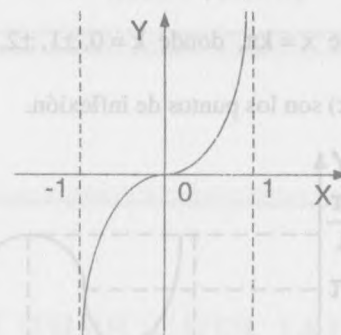
Aplicación de la Derivada

$$y = \frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{1-x^2} - x \arcsen x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $y' = 0$ además $y' = \infty$ cuando $x = \pm 1$ pero estos valores pertenecen al campo de existencia por lo tanto no tiene máximos ni mínimos.

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} - x \arcsen x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \Rightarrow y'' = \frac{x(1-x^2 - \arcsen x(3x + \sqrt{(1-x^2)^3}))}{(1-x^2)^3}$$

$y'' = 0$ cuando $x = 0$ de donde $(0, 0)$ es punto de inflexión, tiene asímptotas verticales en $x = \pm 1$



970

$$y = 2x - \operatorname{tg} x$$

Desarrollo

$$y = 2x - \operatorname{tg} x \Rightarrow y' = -\sec^2 x \text{ de donde:}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2 - \sec^2 x = 0 \Rightarrow \sec x = \pm \sqrt{2} \text{ entonces: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

no está definida para $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

no esta definida para $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

para $x < \frac{\pi}{4}$, $y' > 0$

$\Rightarrow \exists$ máximo en $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k - 1)$

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$, $y' < 0$

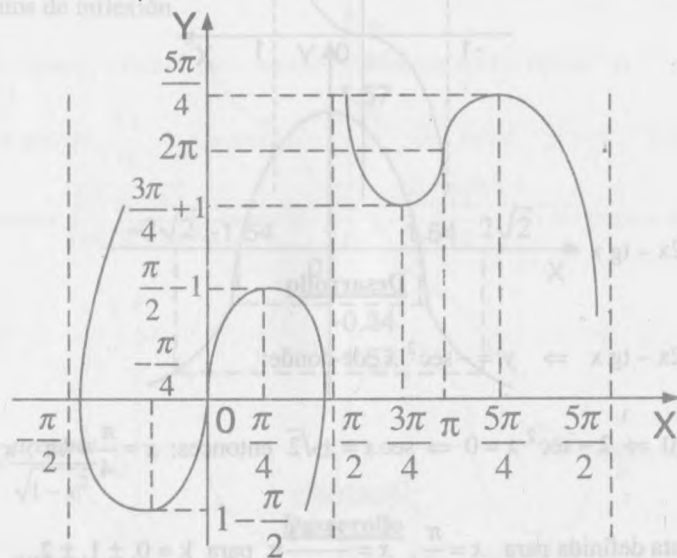
$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $(\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + 1 + 2k\pi)$

$x > \frac{3\pi}{4}$, $y' > 0$

$$y' = 2 - \sec^2 x \Rightarrow y'' = 2 \sec^2 x \cdot \tan x$$

para $y'' = 0$ se tiene $x = k\pi$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

por lo tanto $(k\pi, 2k\pi)$ son los puntos de inflexión.



EDICIONES AL POR MAYOR Y MENOR
ASOCIACIÓN DE VIVIENDA
(EL HERALDO)
MEX. LIMA San Juan de Luisgancha
Teléfono: 3882564 - 2343996 - 9823362
LIMA - PERU

EDITORIAL EDUCAPERU E.I.R.L.