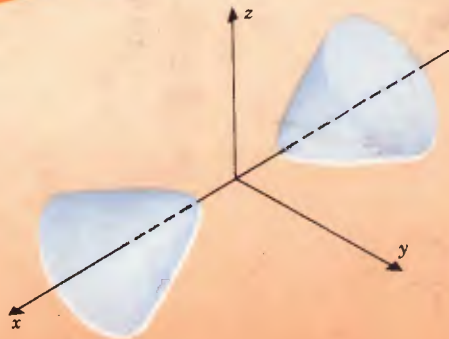
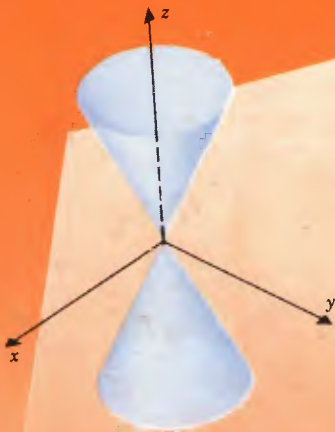


3 edición

HOWARD ANTON

INTRODUCCIÓN AL

# ÁLGEBRA LINEAL



LIMUSA

Contenido de esta obra:

- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES
- DETERMINANTES
- VECTORES EN LOS ESPACIOS BIDIMENSIONAL Y TRIDIMENSIONAL
- ESPACIOS VECTORIALES
- TRANSFORMACIONES LINEALES
- EIGENVALORES (VALORES PROPIOS), EIGENVECTORES (VECTORES PROPIOS)
- APLICACIONES
- INTRODUCCION A LOS METODOS NUMERICOS DEL ALGEBRA LINEAL





# Introducción al álgebra lineal

VERSIÓN AUTORIZADA EN ESPAÑOL  
DE LA OBRA PUBLICADA EN INGLÉS POR  
JOHN WILEY & SONS, INC., CON EL TÍTULO:  
ELEMENTARY LINEAR ALGEBRA,  
3RD. EDITION.  
© JOHN WILEY & SONS, INC.  
ISBN 0-471-05338-4

VERSIÓN EN ESPAÑOL:  
JOSÉ HERNÁNDEZ PÉREZ  
CASTELLANOS  
INGENIERO INDUSTRIAL DE LA ESCUELA MILI-  
TAR DE INGENIEROS.  
PROFESOR TITULAR DE MATEMÁTICAS Y COOR-  
DINADOR DE MATEMÁTICAS DE LA ESCUELA  
SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉC-  
TRICA DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
DE MÉXICO

LA PRESENTACIÓN Y DISPOSICIÓN EN CONJUNTO DE  
INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

SON PROPIEDAD DEL EDITOR. NINGUNA PARTE DE  
ESTA OBRA PUEDE SER REPRODUCIDA O TRANSMI-  
TIDA, MEDIANTE NINGÚN SISTEMA O MÉTODO,  
ELECTRÓNICO O MECÁNICO (INCLUYENDO EL FOTD-  
COPIADO, LA GRABACIÓN O CUALQUIER SISTEMA  
DE RECUPERACIÓN Y ALMACENAMIENTO DE IN-  
FORMACIÓN), SIN CONSENTIMIENTO POR ESCRITO  
DEL EDITOR.

DERECHOS RESERVADOS:

© 1994, EDITORIAL LIMUSA, S.A. DE C.V.  
GRUPO NORIEGA EDITORES  
BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.  
C.P. 06040  
TELÉFONO 521-21-05  
FAX 512-29-03  
CANIEM Núm. 121

PRIMERA EDICIÓN: 1986  
1988, 1989, 1989, 1990, 1991,  
1992, 1993, 1994

HECHO EN MÉXICO  
ISBN 968-18-1660-9  
(13209)

LIMUSA  
NORIEGA EDITORES  
MÉXICO • Veracruz • España • Colombia



## Prólogo

A Pat y a mis hijos Brian, David y Lauren

Este libro se propone un tratamiento elemental del álgebra lineal, apropiado para estudiantes del primer y segundo años del nivel universitario. No es equivalente al álgebra; sin embargo, se incluye cierto número de ejercicios para estudiantes que tengan conocimiento de álgebra elemental más tratados con claridad: "Para estudiantes que hayan estudiado álgebra".

El propósito principal de escribir este libro es presentar los fundamentos del álgebra lineal de la manera más clara posible. El aspecto pedagógico es lo más importante; el formalismo es secundario. De modo que se escriben las ideas básicas al estudiar por medio de ejemplos numéricos (más de 300) y la interpretación geométrica.

El tratamiento de las demostraciones varía. Aquellas que son elementales y tienen un contenido pedagógico significativo se presentan con precisión, en forma apropiada para los principiantes. Otras muchas demostraciones que son más difíciles, pero pedagógicamente valiosas, aparecen al final de la sección y marcadas "Opcionales". No obstante, otras demostraciones se omiten por completo, haciendo hincapié en la motivación del teorema. Siempre que se omite una demostración, trato de mostrar el resultado, a menudo con varias líneas acerca de su interpretación en el espacio bidimensional o tridimensional.

Min propia experiencia me ha llevado a concluir que la notación  $\mathbb{R}^n$  es más un estorbo que una ayuda para los principiantes en el álgebra lineal; por consiguiente, en general he evitado su uso.

Un axioma pedagógico es que el profesor debe ir de lo familiar a lo desconocido y de lo concreto a lo abstracto; en el ordenamiento de los capítulos se ha tenido en cuenta este principio.

El capítulo 1 trata de los sistemas de ecuaciones lineales, como resolverlos y algunas de sus propiedades. También contiene el material básico sobre matrices y sus propiedades aritméticas.

El capítulo 2 se refiere a los determinantes. Se ha aplicado el enfoque clásico de las propiedades. En opinión del autor, es menos abstracta que el enfoque a través de  $n$  formas lineales alternantes y da al estudiante una mejor comprensión intuitiva del tema que un desarrollo inductivo.

# Prólogo

En este texto se proporciona un tratamiento elemental del álgebra lineal, apropiado para estudiantes del primero y segundo años del nivel licenciatura. *No* se requiere saber Cálculo; sin embargo, se incluye cierto número de ejercicios para estudiantes que tengan conocimiento de él; estos ejercicios están marcados con claridad: “Para estudiantes que hayan estudiado cálculo”.

Mi propósito principal al escribir este libro es presentar los fundamentos del álgebra lineal de la manera más clara posible. El aspecto pedagógico es lo más importante; el formalismo es secundario. En donde es posible, las ideas básicas se estudian por medio de ejemplos numéricos (más de 200) y la interpretación geométrica.

Mi tratamiento de las demostraciones varía. Aquéllas que son elementales y tienen un contenido pedagógico significativo se presentan con precisión, en forma apropiada para los principiantes. Unas cuantas demostraciones que son más difíciles, pero pedagógicamente valiosas, aparecen al final de la sección y marcadas “Opcional”. No obstante, otras demostraciones se omiten por completo, haciendo hincapié en la aplicación del teorema. Siempre que se omite una demostración, trato de motivar el resultado, a menudo con un análisis acerca de su interpretación en el espacio bidimensional o tridimensional.

Mi propia experiencia me ha llevado a concluir que la notación  $\Sigma$  es más un estorbo que una ayuda para los principiantes en el álgebra lineal; por consiguiente, en general he evitado su uso.

Un axioma pedagógico es que el profesor debe ir de lo familiar a lo desconocido y de lo concreto a lo abstracto; en el ordenamiento de los capítulos se ha tenido en cuenta este principio.

El **capítulo 1** trata de los sistemas de ecuaciones lineales, cómo resolverlos y algunas de sus propiedades. También contiene el material básico sobre matrices y sus propiedades aritméticas.

El **capítulo 2** se refiere a los determinantes. Se ha aplicado el enfoque clásico de las permutaciones. En opinión del autor, es menos abstracto que el enfoque a través de  $n$  formas lineales alternantes y da al estudiante una mejor comprensión intuitiva del tema que un desarrollo inductivo.

El **capítulo 3** presenta los vectores en los espacios bidimensional y tridimensional como flechas, y desarrolla la geometría analítica de las rectas y los planos en el espacio tridimensional. Dependiendo de los conocimientos previos de los estudiantes, se puede omitir este capítulo sin perder continuidad (véase la guía para el profesor a continuación de este prólogo).

En los **capítulos 4 y 5** se desarrollan los resultados básicos acerca de los espacios vectoriales reales de dimensión finita y las transformaciones lineales. Se empieza con un estudio de  $R^n$  y se avanza lentamente hacia el concepto general de vector.

El **capítulo 6** trata del problema de los eigenvalores (valores propios) y la diagonalización.

En el **capítulo 7** se dan algunas aplicaciones del álgebra lineal a problemas de aproximación, sistemas de ecuaciones diferenciales, series de Fourier y la identificación de secciones cónicas y superficies cuadráticas. Las aplicaciones a la administración, biología, ingeniería, economía, las ciencias sociales y las ciencias físicas se incluyen en una publicación opcional (en inglés) que constituye un suplemento para este texto, *Aplicaciones de Algebra Lineal* por Chris Rorres y el autor (publicada en español por Editorial Limusa). En el suplemento se incluyen temas como: curvas del mejor ajuste a datos empíricos, dinámica de la población, procesos de Markov, cosecha óptima, modelos de Leontief en la economía, aplicaciones a la ingeniería, teoría de las gráficas y una introducción a la programación lineal.

En el **Capítulo 8** se presentan los métodos numéricos del álgebra lineal; no se requiere tener acceso a medios de computación, ya que se pueden resolver los ejercicios a mano o con la ayuda de una calculadora de bolsillo. En este capítulo se dan al estudiante conocimientos básicos de cómo se pueden resolver prácticamente ciertos problemas del álgebra lineal. También, muchos estudiantes completan sus estudios del álgebra lineal con la ingenua creencia de que, en la práctica, los eigenvalores se encuentran al resolver la ecuación característica. Es posible que algunos profesores deseen utilizar esta sección en conjunción con un curso de programación.

He incluido gran número de ejercicios. Cada conjunto de ejercicios se inicia con problemas rutinarios de "habilidad" y progresa hacia problemas más teóricos. Al final del texto se dan las respuestas a todos los problemas de cálculo.

Puesto que se tiene más material en este libro que el que se puede cubrir en un curso de un semestre o un trimestre, el profesor tendrá que seleccionar los temas; para auxiliarlo en esta sección, he agregado una guía para el profesor, a continuación de este prólogo.

### CARACTERISTICAS DE LA TERCERA EDICION

La amplia aceptación de las dos primeras ediciones ha sido lo más satisfactorio y el autor agradece los muchos comentarios favorables y las sugerencias constructivas que ha recibido del público. Como respuesta a estas sugerencias he realizado los siguientes cambios:

- Se han introducido ejercicios suplementarios al final de los capítulos 1, 2, 4, 5 y 6. Estos ejercicios son diferentes de los que se encuentran al final de las secciones y deben proporcionar alguna variedad adicional.



- Se ha agregado una sección nueva sobre la geometría de las transformaciones lineales en el plano (sección 5.3). Este material es muy útil para el profesor; le ayuda a reducir el nivel de abstracción en el estudio de las transformaciones lineales.
- Se han simplificado algunos de los ejercicios de cálculo que eran innecesariamente tediosos.
- El ejemplo 40 de la sección 4.6 y el análisis que lo precede son nuevos. Se muestra cómo encontrar una base para el subespacio generado por un conjunto de vectores "independientes" del conjunto. Este método proporciona una base que es un subconjunto del conjunto dado de vectores.
- La segunda edición del suplemento, *Applications of Linear Algebra*, contiene algunos temas nuevos: Geometría plana, Equilibrio de los cuerpos rígidos, El problema de asignación y Gráficas con computadora.

**LIBROS COMPLEMENTARIOS\***

**CURSO ESTANDAR**

- *Student Solutions Manual for Elementary Linear Algebra* contiene soluciones detalladas para la mayoría de los ejercicios teóricos y muchos ejercicios de cálculo.
- *Solutions Manual for Applications of Linear Algebra* contiene soluciones detalladas para todos los ejercicios.
- Una publicación opcional complementaria, titulada *Aplicaciones de Algebra Lineal* (Chris Rorres y Howard Anton, 1979, publicado en español por Editorial Limusa), contiene aplicaciones a administración, biología, ingeniería, economía, ciencias sociales y ciencias físicas. Este suplemento también contiene un "minicurso" en programación lineal que se puede cubrir aproximadamente en seis clases.

Capítulo 4	11 Clases
Capítulo 5	8 Clases
Capítulo 6	7 Clases

Este programa es tan flexible, permite aprovechar una cantidad adecuada de tiempo de clase en el aula para analizar los problemas dejados como tarea, pero también dedicar poco de ese tiempo al material marcado como "opcional". El profesor puede desarrollar su curso sobre este material según lo permita el tiempo, incluyendo clases acerca del material opcional y los capítulos 3, 7 y 8.

**CURSO ORIENTADO A LAS APLICACIONES**

Los profesores que desean hacer hincapié en las aplicaciones a los métodos numéricos pueden preferir el programa que sigue, el cual llega a los eigenvalores y eigenvectores con mayor rapidez.

Capítulo 1	7 Clases
Capítulo 2	5 Clases
Secciones 4.1-4.6	8 Clases
Secciones 5.1-5.2	3 Clases

\*Sólo existen las ediciones originales en inglés, publicadas por John Wiley & Sons, Inc., Nueva York.

# Guía para el profesor

## CURSO ESTANDAR

Se puede omitir el capítulo 3, sin perder la continuidad, si los estudiantes han estudiado con anterioridad rectas, planos y vectores geométricos en los espacios bidimensional y tridimensional. Dependiendo del tiempo disponible y la preparación de los estudiantes, el instructor tal vez desee agregar todo de este capítulo al material fundamental que se sugiere a continuación:

Capítulo 1	7 Clases
Capítulo 2	5 Clases
Capítulo 4	14 Clases
Capítulo 5	6 Clases
Capítulo 6	5 Clases

Este programa es un tanto flexible; permite aprovechar una cantidad apreciable de tiempo de clase en el aula para analizar los problemas dejados como tarea, pero supone que se dedica poco de ese tiempo al material marcado como "opcional". El profesor puede desarrollar su curso sobre este material según lo permita el tiempo, incluyendo clases acerca del material opcional y los capítulos 3, 7 y 8.

## CURSO ORIENTADO A LAS APLICACIONES

Los profesores que deseen hacer hincapié en las aplicaciones a los métodos numéricos pueden preferir el programa que sigue, el cual llega a los eigenvalores y eigenvectores con mayor rapidez:

Capítulo 1	7 Clases
Capítulo 2	5 Clases
Secciones 4.1-4.6	8 Clases
Secciones 5.1-5.2	3 Clases
Secciones 6.1-6.2	3 Clases

Siempre que se eliminen las secciones 5.4 y 5.5, el profesor debe omitir el material opcional que está al final de la 6.1, iniciar la sección 6.2 con las formas matriciales de los problemas 1 y 2, y eliminar el ejemplo 9 de esa sección.

Una vez que se cubra el material mencionado, el profesor puede elegir temas del capítulo 7 u 8 del texto, o bien, elegir temas del suplemento, *Applications of Linear Algebra*. Dependiendo de los temas que se seleccionen, es posible que sea necesario cubrir algo del material de las secciones 4.7-4.10 ó 5.3-5.5.

CURSO ESTÁNDAR

Se puede omitir el capítulo 3, sin perder la continuidad, si los estudiantes han estudiado los materiales vectoriales, planos y vectores producidos en los cursos bidimensionales y tridimensionales. Dependiendo del tiempo disponible y la preparación de los estudiantes, el instructor tal vez desee agregar todo de este capítulo al material fundamental que se requiere a continuación.

Capítulo 1	7 Clases
Capítulo 2	3 Clases
Capítulo 4	14 Clases
Capítulo 5	6 Clases
Capítulo 6	2 Clases

Este programa es un tanto flexible; permite proporcionar una cantidad específica de tiempo de clase en el aula para analizar los problemas dejados como tareas pero supone que dedica parte de ese tiempo al material marcado como "opcional". El profesor puede desarrollar su curso sobre este material según lo permita el tiempo, incluyendo clases sobre el material opcional y los capítulos 3, 7 y 8.

CURSO ORIENTADO A LAS APLICACIONES

Los profesores que tienen interés en las aplicaciones a los métodos numéricos pueden preferir el programa que sigue, el cual llega a los eigenvalores y eigenvectores con mayor rapidez.

Capítulo 1	7 Clases
Capítulo 2	2 Clases
Secciones 4.1-4.6	8 Clases
Secciones 5.1-5.3	3 Clases
Secciones 6.1-6.3	3 Clases



# Agradecimientos

Agradezco la colaboración de

- Profesor Joseph Buckley, *Western Michigan University*
- Profesor Harold S. Engelsohn, *Kingsborough Community College*
- Profesor Lawrence D. Kugler, *University of Michigan*
- Profesor Robert W. Negus, *Rio Hondo Junior College*
- Profesor Hal G. Moore, *Brigham Young University*
- Profesor William A. Brown, *University of Maine at Portland-Gorham*
- Profesor Ralph P. Grimaldi, *Rose-Hulman Institute of Technology*
- Profesor Robert M. McConnel, *University of Tennessee*
- Profesor James R. Wall, *Auburn University*
- Profesor Roger H. Marty, *Cleveland State University*
- Profesor Donald R. Sherbert, *University of Illinois*
- Profesor Joseph L. Ullman, *University of Michigan*

Expreso también mi agradecimiento al Profesor William F. Trench de la Drexel University, quien leyó el manuscrito completo; sus sugerencias mejoraron inmensamente tanto el estilo como el contenido del texto. Por su mecanografía exacta y experta, les doy las gracias a Susan R. Gershuni y Kathleen R. McCabe; también agradezco al Profesor Dale Lick el haberme alentado en mi trabajo en sus primeras etapas, al Profesor Robert Higgins por su ayuda al resolver los problemas y a Frederick C. Corey de John Wiley, quien ayudó a que la primera edición se convirtiese en realidad. Por último, estoy en deuda con todo el equipo de producción y, en especial, con mi editor Gary W. Ostedt por sus innovadoras contribuciones a esta nueva edición.

Howard Anton

# Contenido

## 1 Sistemas de ecuaciones lineales y matrices 19

- 1.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales 19
- 1.2 Eliminación gaussiana 26
- 1.3 Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales 38
- 1.4 Matrices y operaciones matriciales 42
- 1.5 Reglas de la aritmética matricial 50
- 1.6 Matrices elementales y un método para hallar  $A^{-1}$  60
- 1.7 Resultados adicionales acerca de los sistemas de ecuaciones y la inversibilidad 68

## 2 Determinantes-77

- 2.1 La función determinante 77
- 2.2 Evaluación de los determinantes por reducción en los renglones 84
- 2.3 Propiedades de la función determinante 90
- 2.4 Desarrollo por cofactores; regla de Cramer 97

## 3 Vectores en los espacios bidimensional y tridimensional 113

- 3.1 Introducción a los vectores (geométricos) 113
- 3.2 Normas de un vector; aritmética vectorial 123
- 3.3 Producto escalar (punto); proyecciones 126
- 3.4 Producto vectorial (cruz) 133
- 3.5 Rectas y planos en el espacio tridimensional 142

**4 Espacios vectoriales 151**

- 4.1 Espacio euclidiano  $n$  dimensional **151**
- 4.2 Espacios vectoriales generales **157**
- 4.3 Subespacios **163**
- 4.4 Independencia lineal **172**
- 4.5 Base y dimensión **178**
- 4.6 Espacio de renglones y columnas de una matriz; rango; aplicaciones para hallar bases **186**
- 4.7 Espacios de productos interiores **197**
- 4.8 Longitud y ángulo en los espacios de productos interiores **203**
- 4.9 Bases ortonormales; proceso de Gram-Schmidt **211**
- 4.10 Coordenadas; cambio de base **222**

**5 Transformaciones lineales 247**

- 5.1 Introducción a las transformaciones lineales **247**
- 5.2 Propiedades de las transformaciones lineales: núcleo (kernel) y recorrido **256**
- 5.3 Transformaciones lineales de  $R^n$  hacia  $R^m$ ; geometría de las transformaciones lineales de  $R^2$  hacia  $R^2$  **265**
- 5.4 Matrices de las transformaciones lineales **284**
- 5.5 semejanza **292**

**6 Eigenvalores (valores propios), eigenvectores (vectores propios) 301**

- 6.1 Eigenvalores y eigenvectores **301**
- 6.2 Diagonalización **309**
- 6.3 Diagonalización ortogonal; matrices simétricas **318**

**7 Aplicaciones\* 329**

- 7.1 Aplicación a las ecuaciones diferenciales **329**
- 7.2 Aplicación a problemas de aproximación; series de Fourier **336**
- 7.3 Formas cuadráticas; aplicación a las secciones cónicas **343**
- 7.4 Formas cuadráticas; aplicación a las superficies cuadráticas **354**

\*En un suplemento en inglés a este texto se encuentran otras aplicaciones a la administración, la economía y las ciencias físicas y sociales.



**8 Introducción a los métodos numéricos del álgebra lineal 363**

- 8.1** Eliminación gaussiana con condensación pivotal **363**
- 8.2** Los métodos de Gauss-Seidel y de Jacobi **369**
- 8.3** Aproximación de los eigenvalores por el método de las potencias **375**
- 8.4** Aproximación de los eigenvalores no dominantes por deflación **385**

**Respuestas a los ejercicios 391**

**Índice 419**

**1.1 INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

En esta sección se da la terminología básica y se analiza un método para resolver los sistemas de ecuaciones lineales.

Cual recta en el plano  $xy$  se puede representar algebraicamente mediante una ecuación de la forma

$$a_1x + a_2y = b$$

Cual ecuación de este tipo se conoce como ecuación lineal en las variables  $x$  y  $y$ . En forma general, se define una ecuación lineal en las  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  como aquella que se pueda expresar en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

en donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $b$  son constantes reales.

**Ejemplo 1**

Las siguientes son ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 7 & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 7 \\ y &= 3x + 3z + 1 & x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 1 \end{aligned}$$

Observe que una ecuación lineal no comprende radicales o raíces de variables. Todas las variables se presentan únicamente a la primera potencia y no aparecen como argumento para funciones trigonométricas, logarítmicas u exponenciales. Las que siguen no son ecuaciones lineales:

# 1 Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

## 1.1 INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En esta sección se da la terminología básica y se analiza un método para resolver los sistemas de ecuaciones lineales.

Una recta en el plano  $xy$  se puede representar algebraicamente mediante una ecuación de la forma

$$a_1x + a_2y = b$$

Una ecuación de este tipo se conoce como ecuación lineal en las variables  $x$  y  $y$ . En forma general, se define una *ecuación lineal* en las  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  como aquella que se puede expresar en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

en donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $b$  son constantes reales.

### Ejemplo 1

Las siguientes son ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{l} x + 3y = 7 \\ y = \frac{1}{2}x + 3z + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \end{array}$$

Observe que una ecuación lineal no comprende productos o raíces de variables. Todas las variables se presentan únicamente a la primera potencia y no aparecen como argumento para funciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales. Las que siguen *no* son ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + 3y^2 &= 7 & 3x + 2y - z + xz &= 4 \\ y - \operatorname{sen} x &= 0 & \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Una **solución** de una ecuación lineal  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$  es una sucesión de  $n$  números  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , tales que la ecuación se satisface cuando se hace la sustitución  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ . El conjunto de todas las soluciones de la ecuación es su **conjunto solución**.

### Ejemplo 2

Encuéntrese el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

$$(i) 4x - 2y = 1 \quad (ii) x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$$

A fin de encontrar las soluciones de (i), se puede asignar un valor arbitrario a  $x$  y despejar  $y$ , o bien, elegir un valor arbitrario para  $y$  y despejar  $x$ . Si se sigue el primer procedimiento y se asigna a  $x$  un valor arbitrario  $t$ , se obtiene

$$x = t, \quad y = 2t - \frac{1}{2}$$

Estas fórmulas describen el conjunto solución en términos del parámetro arbitrario  $t$ . Es posible obtener soluciones numéricas particulares al sustituir  $t$  por valores específicos. Por ejemplo,  $t = 3$  proporciona la solución  $x = 3, y = 11/2$ , y  $t = 1/2$  proporciona la solución  $x = -1/2, y = -3/2$ .

Si se sigue el segundo procedimiento y se asigna a  $y$  el valor arbitrario  $t$ , se obtiene

$$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}, \quad y = t$$

Aun cuando estas fórmulas son diferentes a las obtenidas con anterioridad, proporcionan el mismo conjunto solución cuando se hace variar  $t$  sobre todos los números reales posibles. Por ejemplo, las fórmulas previas dieron la solución  $x = 3, y = 11/2$  cuando  $t = 3$ , mientras que estas fórmulas conducen a esta solución cuando  $t = 11/2$ .

Para encontrar el conjunto solución de (ii) se puede asignar valores arbitrarios a dos variables cualesquiera y despejar la tercera variable. En particular, si se asignan los valores arbitrarios  $s$  y  $t$  a  $x_2$  y  $x_3$ , respectivamente, y se despeja  $x_1$ , se obtiene

$$x_1 = 5 + 4s - 7t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = t$$

Un conjunto finito de ecuaciones lineales en las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se conoce como **sistema de ecuaciones lineales** o **sistema lineal**. Una sucesión de números  $s_1, s_2, \dots, s_n$  es una **solución** del sistema si  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$  es una solución de toda ecuación en tal sistema. Por ejemplo, el sistema

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \quad 3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

tiene la solución  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ , puesto que estos valores satisfacen las dos ecuaciones. Sin embargo,  $x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 1$  no es una solución, ya que estos valores sólo satisfacen la primera de las dos ecuaciones del sistema.



No todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen soluciones. Por ejemplo, si se multiplica la segunda ecuación del sistema

$$\begin{aligned}x + y &= 4 \\2x + 2y &= 6\end{aligned}$$

por  $1/2$ , es evidente que no hay solución alguna, ya que las dos ecuaciones del sistema resultante

$$\begin{aligned}x + y &= 4 \\x + y &= 3\end{aligned}$$

se contradicen entre sí.

Cuando un sistema de ecuaciones no tiene solución se dice que es *inconsistente*. Si existe al menos una solución, se le denomina *consistente*. A fin de ilustrar las posibilidades que pueden presentarse al resolver sistemas de ecuaciones lineales, considérese un sistema general de dos ecuaciones lineales en las incógnitas  $x$  y  $y$ :

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y &= c_1 & (a_1, b_1 \text{ ninguno es cero}) \\a_2x + b_2y &= c_2 & (a_2, b_2 \text{ ninguno es cero})\end{aligned}$$

Las gráficas de estas ecuaciones son rectas; se hará referencia a ellas como  $l_1$  y  $l_2$ . Puesto que un punto  $(x, y)$  está sobre una recta si y sólo si los números  $x$  y  $y$  satisfacen la ecuación de la misma, las soluciones del sistema de ecuaciones corresponden a puntos de intersección de  $l_1$  y  $l_2$ . Se tienen tres posibilidades (figura 1.1):

- Las rectas  $l_1$  y  $l_2$  pueden ser paralelas, en cuyo caso no existe intersección alguna y, como consecuencia, no hay solución para el sistema.
- Las rectas  $l_1$  y  $l_2$  pueden intersectarse en sólo un punto, en cuyo caso el sistema tiene exactamente una solución.
- Las rectas  $l_1$  y  $l_2$  pueden coincidir, en cuyo caso existe una infinidad de puntos de intersección y, por consiguiente una infinidad de soluciones para el sistema.

Aun cuando sólo se han considerado dos ecuaciones con dos incógnitas, posteriormente se demuestra que se cumple este mismo resultado para sistemas arbitrarios; es decir,

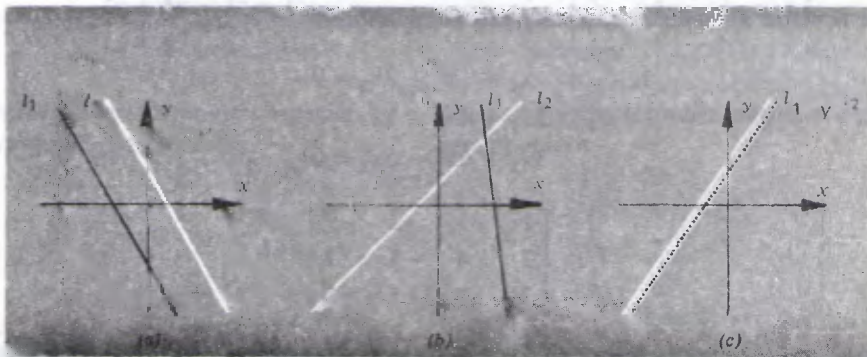


Figura 1.1 (a) Ninguna solución. (b) Una solución. (c) Una infinidad de soluciones.





El método básico para resolver un sistema de ecuaciones lineales es reemplazar el sistema dado por uno nuevo que tenga el mismo conjunto solución, pero que sea más fácil de resolver. En general, este sistema nuevo se obtiene siguiendo una serie de pasos aplicando los tres tipos siguientes de operaciones a fin de eliminar sistemáticamente las incógnitas.

1. Multiplicar una de las ecuaciones por una constante diferente de cero.
2. Intercambiar dos de las ecuaciones.
3. Sumar un múltiplo de una de las ecuaciones a otra.

Puesto que los renglones (líneas horizontales) de una matriz aumentada corresponden a las ecuaciones del sistema asociado, estas tres operaciones corresponden a las operaciones siguientes sobre los renglones de la matriz aumentada:

1. Multiplicar uno de los renglones por una constante diferente de cero.
2. Intercambiar dos de los renglones.
3. Sumar un múltiplo de uno de los renglones a otro renglón.

Estas se denominan *operaciones elementales sobre los renglones*. El ejemplo que sigue ilustra cómo pueden aplicarse estas operaciones para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Como en la sección que sigue se deduce un procedimiento sistemático para hallar las soluciones, no es necesario preocuparse por la forma en que se seleccionaron los pasos en este ejemplo. Por el momento, la atención debe centrarse en comprender los cálculos y el análisis.

### Ejemplo 3

A continuación, en la columna de la izquierda se resuelve un sistema de ecuaciones lineales realizando las operaciones sobre las propias ecuaciones del sistema y en la columna de la derecha, se resuelve el mismo sistema realizando las operaciones sobre los renglones de la matriz aumentada.

$$\begin{array}{l} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Súmese  $-2$  veces la primera ecuación a la segunda para obtener

$$\begin{array}{l} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{array}$$

Súmese  $-3$  veces la segunda ecuación a la tercera para obtener

Súmese  $-2$  veces el primer renglón al segundo para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Súmese  $-3$  veces el primer renglón al tercero para obtener



$$\begin{array}{r} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ 3y - 11z = -27 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right]$$

Multiplíquese la segunda ecuación por  $1/2$  para obtener

$$\begin{array}{r} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ 3y - 11z = -27 \end{array}$$

Multiplíquese el segundo renglón por  $1/2$  para obtener

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right]$$

Súmese  $-3$  veces la segunda ecuación a la tercera para obtener

$$\begin{array}{r} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ -\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2} \end{array}$$

Súmese  $-3$  veces el segundo renglón al tercero para obtener

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right]$$

Multiplíquese la tercera ecuación por  $-2$  para obtener

$$\begin{array}{r} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{array}$$

Multiplíquese el tercer renglón por  $-2$  para obtener

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Súmese  $-1$  veces la segunda ecuación a la primera para obtener

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{2}z = \frac{35}{2} \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{array}$$

Súmese  $-1$  veces el segundo renglón al primero para obtener

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Súmese  $-\frac{11}{2}$  veces la tercera ecuación a la primera y  $\frac{7}{2}$  veces la tercera ecuación a la segunda para obtener

$$\begin{array}{r} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}$$

Súmese  $-\frac{11}{2}$  veces el tercer renglón al primero y  $\frac{7}{2}$  veces el tercer renglón al segundo para obtener

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Ahora es evidente la solución

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$$

EJERCICIOS 1.1

1. ¿Cuáles de las siguientes son ecuaciones lineales en  $x_1, x_2, y x_3$ ?

- (a)  $x_1 + 2x_1x_2 + x_3 = 2$       (b)  $x_1 + x_2 + x_3 = \text{sen } k$  ( $k$  es una constante)  
 (c)  $x_1 - 3x_2 + 2x_3^{1/2} = 4$       (d)  $x_1 = \sqrt{2}x_3 - x_2 + 7$   
 (e)  $x_1 + x_2^{-1} - 3x_3 = 5$       (f)  $x_1 = x_3$

2. Halle el conjunto solución para:

- (a)  $6x - 7y = 3$       (b)  $2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 8$   
 (c)  $-3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 8x_4 = 5$       (d)  $2v - w + 3x + y - 4z = 0$

3. Halle la matriz aumentada para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

- (a)  $x_1 - 2x_2 = 0$       (b)  $x_1 + x_3 = 1$   
 $3x_1 + 4x_2 = -1$        $-x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$   
 $2x_1 - x_2 = 3$   
 (c)  $x_1 + x_3 = 1$       (d)  $x_1 = 1$   
 $2x_2 - x_3 + x_5 = 2$        $x_2 = 2$   
 $2x_3 + x_4 = 3$

4. Halle un sistema de ecuaciones lineales que corresponda a cada una de las matrices aumentadas siguientes.

- (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$       (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$   
 (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$       (d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5. ¿Para qué valor, o para qué valores, de la constante  $k$  el siguiente sistema de ecuaciones lineales no tiene soluciones? ¿Tiene exactamente una solución? ¿Tiene una infinidad de soluciones?

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

6. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \\ ex + fy &= m \end{aligned}$$

Analice las posiciones relativas de las rectas  $ax + by = k$ ,  $cx + dy = l$  y  $ex + fy = m$  cuando:

- a) El sistema no tiene soluciones  
 b) El sistema tiene exactamente una solución  
 c) El sistema tiene infinidad de soluciones
7. Demuestre que si el sistema de ecuaciones del ejercicio 6 es consistente, entonces se puede descartar al menos una ecuación de él, sin alterar el conjunto solución.
8. Sea  $k = l = m = 0$  en el ejercicio 6; demuestre que el sistema debe ser consistente. ¿Qué se puede decir acerca del punto de intersección de las tres rectas, si el sistema tiene exactamente una solución?
9. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= a \\x &+ z = b \\2x + y + 3z &= c\end{aligned}$$

Demuestre que para que este sistema sea consistente,  $a$ ,  $b$  y  $c$  deben satisfacer  $c = a + b$ .

10. Demuestre que si las ecuaciones lineales  $x_1 + kx_2 = c$  y  $x_1 + lx_2 = d$  tienen el mismo conjunto solución, entonces las ecuaciones son idénticas.

## 1.2 ELIMINACION GAUSSIANA

En esta sección se da un procedimiento sistemático para resolver sistemas de ecuaciones lineales; se basa en la idea de reducir la matriz aumentada a una forma que sea lo suficientemente simple como para que el sistema de ecuaciones se pueda resolver por observación.

En el último paso del ejemplo 3 se obtuvo la matriz aumentada

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \quad (1.1)$$

a partir de la cual la solución del sistema resultó evidente.

La matriz (1.1) es un ejemplo de una que se encuentra en la *forma escalonada en los renglones reducida*. Para encontrarse en esta forma, una matriz debe tener las siguientes propiedades:

1. Si un renglón no consta completamente de ceros, entonces el primer número diferente de cero en el renglón es un 1. (A este 1 se le denomina **1 principal**.)
2. Si existen renglones que consten completamente de ceros, entonces se agrupan en la parte inferior de la matriz.
3. Si dos renglones sucesivos no constan completamente de ceros, el 1 principal del renglón inferior se presenta más hacia la derecha que el 1 principal del renglón superior.



4. Cada columna que contenga un 1 principal tiene ceros en todas las demás posiciones.

Si una matriz tiene las propiedades 1, 2 y 3 se dice que está en la *forma escalonada en los renglones*.

#### Ejemplo 4

Las matrices siguientes están en la forma escalonada en los renglones reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices que siguen están en la forma escalonada en los renglones.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El lector debe verificar que cada una de las matrices anteriores satisface todos los requisitos necesarios.

**OBSERVACION.** No es difícil ver que una matriz en la forma escalonada en los renglones debe tener ceros debajo de cada 1 principal (véase el ejemplo 4). Como contraste, una matriz en la forma escalonada en los renglones reducida debe tener ceros arriba y abajo de cada 1 principal.

Si, por una sucesión de operaciones elementales sobre los renglones, la matriz aumentada correspondiente a un sistema de ecuaciones lineales se pone en la forma escalonada en los renglones reducida, entonces es posible obtener el conjunto solución para el sistema por observación, o bien en el peor de los casos, después de unos cuantos sencillos pasos. El ejemplo que sigue ilustra estas consideraciones.

#### Ejemplo 5

Supóngase que la matriz aumentada correspondiente a un sistema de ecuaciones lineales se ha reducido por medio de operaciones sobre los renglones a la forma escalonada en los renglones reducida que se da. Resuélvase el sistema.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Solución para a).* El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 4$$

Por observación,  $x_1 = 5, x_2 = -2, x_3 = 4$ .

*Solución para b).* El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$x_1 + 4x_4 = -1$$

$$x_2 + 2x_4 = 6$$

$$x_3 + 3x_4 = 2$$

Puesto que  $x_1, x_2$  y  $x_3$  corresponden a 1 principales en la matriz aumentada, se les llamará **variables principales**. Al despejar las variables principales en términos de  $x_4$  da

$$x_1 = -1 - 4x_4$$

$$x_2 = 6 - 2x_4$$

$$x_3 = 2 - 3x_4$$

Dado que a  $x_4$  se le puede asignar un valor arbitrario, por ejemplo  $t$ , se tiene una infinidad de soluciones. El conjunto solución queda dado por las fórmulas

$$x_1 = -1 - 4t, \quad x_2 = 6 - 2t, \quad x_3 = 2 - 3t, \quad x_4 = t$$

*Solución para c).* El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$x_1 + 6x_2 + 4x_5 = -2$$

$$x_3 + 3x_5 = 1$$

$$x_4 + 5x_5 = 2$$

Aquí las variables principales son  $x_1, x_3$  y  $x_4$ . Al despejar las variables principales en términos de las variables restantes da

$$x_1 = -2 - 6x_2 - 4x_5$$

$$x_3 = 1 - 3x_5$$

$$x_4 = 2 - 5x_5$$

Como a  $x_5$  se le puede asignar un valor arbitrario,  $t$ , y a  $x_2$  un valor arbitrario  $s$ , se tiene una infinidad de soluciones. El conjunto solución queda dado por las fórmulas

$$x_1 = -2 - 4t - 6s, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 1 - 3t, \quad x_4 = 2 - 5t, \quad x_5 = t$$

*Solución para d).* La última ecuación en el sistema correspondiente es

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

Ya que nunca es posible satisfacer esta ecuación, no existe solución para el sistema.

Se acaba de ver qué fácil es resolver un sistema de ecuaciones lineales, una vez que su matriz aumentada se encuentra en la forma escalonada en los renglones reducida. Ahora se explica un procedimiento paso a paso, conocido como *eliminación de Gauss-Jordan*,\* que se puede aplicar a fin de llevar cualquier matriz a la forma escalonada en los renglones reducida. A medida que se enuncie cada paso del procedimiento, se ilustra la idea llevando a esa forma a la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

**Paso 1.** Se localiza la columna (línea vertical) que no consta completamente de ceros y que esté más a la izquierda.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Columna más a la izquierda que no consta completamente de ceros

**Paso 2.** Se intercambia el renglón superior con otro renglón, si es necesario, para llevar un elemento diferente de cero a la parte superior de la columna que se encontró en el paso 1.

\* *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855). A veces conocido como el "príncipe de los matemáticos", Gauss hizo valiosas contribuciones a la teoría de los números, teoría de funciones, probabilidad y estadística. Descubrió una manera de calcular las órbitas de los asteroides, hizo descubrimientos básicos en la teoría electromagnética e inventó un telégrafo.

*Camille Jordan* (1838-1922). Jordan fue profesor en la École Polytechnique en París. Fue pionero en varias ramas de las matemáticas, incluyendo la teoría de las matrices. Se hizo en particular famoso por el Teorema de la Curva de Jordan, el cual afirma: una curva simple cerrada (como un círculo o un cuadrado) divide al plano en dos regiones conexas que no se intersecan.



$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Se intercambiaron el primero y segundo renglones de la matriz ejemplo.

**Paso 3.** Si el elemento que está arriba en la parte superior de la columna encontrada en el paso 1 es  $a$ , se multiplica el primer renglón por  $1/a$ , para introducir un 1 principal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

El primer renglón de la matriz anterior se multiplicó por  $1/2$ .

**Paso 4.** Se suman múltiplos apropiados del renglón superior a los renglones de abajo, de modo que todos los elementos debajo del 1 principal se conviertan en ceros.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Se sumó  $-2$  veces el primer renglón de la matriz anterior al tercer renglón.

**Paso 5.** Se intercambia el renglón superior de la matriz y se empieza nuevamente con el paso 1 aplicado a la submatriz que queda. Se continúa de esta manera hasta que la matriz *completa* quede en forma escalonada en los renglones.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Columna más a la izquierda que no consta completamente de ceros en la submatriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Se multiplicó el primer renglón de la submatriz por  $-1/2$ , para introducir un 1 principal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Se sumó  $-5$  veces el primer renglón al segundo de ella misma para introducir un cero debajo del 1 principal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Se cubrió el renglón superior de la submatriz y se regresó una vez más al paso 1.

Columna más a la izquierda que no consta completamente de ceros en la nueva submatriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se multiplicó el primer (y único) renglón de la nueva submatriz por 2, para introducir un 1 principal.

La matriz *completa* está ahora en la forma escalonada en los renglones. A fin de encontrar la forma escalonada en los renglones reducida se necesitan los siguientes pasos adicionales:

**Paso 6.** Empezando con el último renglón diferente de cero y yendo hacia arriba, se suman múltiplos apropiados de cada renglón a los de arriba, para introducir ceros arriba de los 1 principales.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se sumó 7/2 veces el tercer renglón de la matriz anterior al segundo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se sumó -6 veces el tercer renglón al primero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se sumó 5 veces el segundo renglón al primero.

La última matriz está en la forma escalonada en los renglones reducida.

**Ejemplo 6**

Resuélvase por medio de la eliminación de Gauss-Jordan.

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$$

$$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1$$

$$5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5$$

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6$$

La matriz aumentada para el sistema es

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{array} \right]$$

Al sumar  $-2$  veces el primer renglón al segundo y al cuarto da

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{array} \right]$$

Al multiplicar el segundo renglón por  $-1$  y, a continuación, sumar  $-5$  veces el segundo al tercero, y  $-4$  veces el segundo al cuarto da

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{array} \right]$$

Al intercambiar el tercero y cuarto renglones y después de multiplicar el tercer renglón de la matriz resultante por  $1/6$  se llega a la forma escalonada en los renglones

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Al sumar  $-3$  veces el tercer renglón al segundo y después de sumar 2 veces el segundo renglón de la matriz resultante al primero, se obtiene la forma escalonada en los renglones reducida

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



(Se ha descartado la última ecuación,  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$ , puesto que será satisfecha automáticamente por las soluciones de las ecuaciones restantes.) Al despejar las variables principales, se obtiene

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$

$$x_3 = -2x_4$$

$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Si se asignan a  $x_2$ ,  $x_4$  y  $x_5$  los valores arbitrarios  $r$ ,  $s$  y  $t$  respectivamente, la solución queda dada por las fórmulas

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

### Ejemplo 7

A menudo conviene más resolver un sistema de ecuaciones lineales, llevando la matriz aumentada hacia la forma escalonada, sin llevar a cabo todos los pasos hasta la escalonada reducida. Cuando se hace esto, se puede resolver el sistema de ecuaciones que corresponde por medio de una técnica llamada *sustitución hacia atrás*. Ahora se ilustra este método utilizando el sistema del ejemplo 6.

Por lo obtenido en los cálculos del ejemplo 6, una forma escalonada en los renglones de la matriz aumentada es

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para resolver el sistema de ecuaciones correspondiente

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 1$$

$$x_6 = \frac{1}{3}$$

se procede como sigue:

**Paso 1.** Se despejan las variables principales en las ecuaciones.

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$$

$$x_3 = 1 - 2x_4 - 3x_6$$

$$x_6 = \frac{1}{3}$$

**Paso 2.** Empezando con la ecuación de abajo y yendo hacia arriba, se sustituye sucesivamente cada ecuación en todas las ecuaciones que están arriba de ella.

Al sustituir  $x_6 = 1/3$  en la segunda ecuación da

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$$

$$x_3 = -2x_4$$

$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Al sustituir  $x_3 = -2x_4$  en la primera ecuación da

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$

$$x_3 = -2x_4$$

$$x_6 = \frac{1}{3}$$

**Paso 3.** Se asignan valores arbitrarios a variables no principales cualesquiera.

Si se asignan a  $x_2$ ,  $x_4$  y  $x_5$  los valores arbitrarios  $r$ ,  $s$  y  $t$ , respectivamente, el conjunto solución queda dado por las fórmulas

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

Esto concuerda con la solución obtenida en el ejemplo 6.

El método de resolver sistemas de ecuaciones lineales reduciendo la matriz aumentada a la forma escalonada en los renglones se llama *eliminación gaussiana*.

### Ejemplo 8

Resuélvase

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

Por eliminación gaussiana.

**Solución.** Este es el sistema del ejemplo 3. En ese ejemplo se convirtió la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

a la forma escalonada en los renglones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El sistema correspondiente a esta matriz es

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\z &= 3\end{aligned}$$

Al despejar las variables principales da

$$\begin{aligned}x &= 9 - y - 2z \\y &= -\frac{17}{2} + \frac{7}{2}z \\z &= 3\end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación de abajo en las que se encuentran arriba queda

$$\begin{aligned}x &= 3 - y \\y &= 2 \\z &= 3\end{aligned}$$

y al sustituir la segunda ecuación en la de arriba da

$$\begin{aligned}x &= 1 \\y &= 2 \\z &= 3\end{aligned}$$

lo cual concuerda con la solución encontrada por medio de la eliminación de Gauss-Jordan en el ejemplo 3.

**OBSERVACION.** El procedimiento que se ha dado para reducir una matriz a la forma escalonada en los renglones o a la escalonada en los renglones reducida resulta apropiado para utilizar computadoras porque es sistemático. Sin embargo, a veces este procedimiento introduce fracciones, las que, de lo contrario, se podrían evitar al hacer variar los pasos en la forma correcta. Por consiguiente, una vez que haya dominado el procedimiento básico, es posible que el lector desee hacer variar los pasos en problemas específicos a fin de evitar fracciones (véase el ejercicio 13). Se puede probar, aunque no se hará, que no importa en qué forma se hagan variar las operaciones elementales sobre los renglones, siempre se llega a la misma forma escalonada en los renglones reducida; es decir, la forma escalonada en los renglones reducida es única. No obstante, una forma escalonada en los renglones *no* es única; al cambiar la sucesión de operaciones elementales sobre los renglones es posible llegar a una forma escalonada en los renglones diferente (véase ejercicio 14).

## EJERCICIOS 1.2

1. ¿Cuáles de las siguientes matrices está en la forma escalonada en los renglones reducida?

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2. ¿Cuáles de las siguientes matrices están en la forma escalonada en los renglones?

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. En cada inciso suponga que la matriz aumentada para un sistema de ecuaciones lineales se ha llevado por medio de operaciones sobre los renglones a la forma escalonada en los renglones reducida que se da. Resuelva el sistema.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. En cada inciso suponga que la matriz aumentada para un sistema de ecuaciones lineales se ha llevado por medio de operaciones sobre los renglones a la forma escalonada en los renglones que se da. Resuelva el sistema.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Resuelva cada uno de los sistemas que siguen por medio de la eliminación de Gauss-Jordan.

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -7x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{cases}$$

6. Resuelva cada uno de los sistemas del ejercicio 5 por eliminación gaussiana.

7. Resuelva cada uno de los sistemas siguientes por eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad 2x_1 - 3x_2 = -2 & \text{(b)} \quad 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -15 & \text{(c)} \quad 4x_1 - 8x_2 = 12 \\
 2x_1 + x_2 = 1 & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 & 3x_1 - 6x_2 = 9 \\
 3x_1 + 2x_2 = 1 & 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 & -2x_1 + 4x_2 = -6 \\
 & 11x_1 + 7x_2 = -30 &
 \end{array}$$

8. Resuelva cada uno de los sistemas del ejercicio 7 por eliminación gaussiana.

9. Resuelva cada uno de los sistemas que siguen por eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 & \text{(b)} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\
 -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 & x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2 \\
 & x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5
 \end{array}$$

10. Resuelva cada uno de los sistemas del ejercicio 9 por eliminación gaussiana.

11. Resuelva los sistemas que siguen, en donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad 2x + y = a & \text{(b)} \quad x_1 + x_2 + x_3 = a \\
 3x + 6y = b & 2x_1 + 2x_3 = b \\
 & 3x_2 + 3x_3 = c
 \end{array}$$

12. ¿Para qué valores de  $a$  el sistema que sigue no tiene soluciones? ¿Tiene exactamente una solución? ¿Tiene infinidad de soluciones?

$$\begin{array}{rcl}
 x + 2y - 3z & = & 4 \\
 3x - y + 5z & = & 2 \\
 4x + y + (a^2 - 14)z & = & a + 2
 \end{array}$$

13. Lleve

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

a la forma escalonada en los renglones reducida sin introducir fracción alguna.

14. Encuentre dos formas escalonadas en los renglones diferentes para

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

15. Resuelva el sistema de ecuaciones no lineales que sigue para los ángulos desconocidos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , en donde  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \beta \leq 2\pi$  y  $0 \leq \gamma < \pi$ .

$$2 \operatorname{sen} \alpha - \cos \beta + 3 \tan \gamma = 3$$

$$4 \operatorname{sen} \alpha + 2 \cos \beta - 2 \tan \gamma = 2$$

$$6 \operatorname{sen} \alpha - 3 \cos \beta + \tan \gamma = 9$$

16. Describa las formas escalonadas en los renglones reducidas que sean posibles para

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

17. Demuestre que si  $ad - bc \neq 0$ , entonces la forma escalonada en los renglones reducida de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ es } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18. Aplique el resultado del ejercicio 17 para demostrar que si  $ad - bc \neq 0$ , entonces el sistema

$$ax + by = k$$

$$cx + dy = l$$

tiene exactamente una solución.

### 1.3 SISTEMAS HOMOGÉNEOS DE ECUACIONES LINEALES

Como ya se señaló, todo sistema de ecuaciones lineales tiene una solución, una infinidad de soluciones, o bien, ninguna solución. A medida que se avance, se presentan situaciones en las que no se tiene interés en encontrar las soluciones para un sistema dado, si no que, por el contrario, se trata de decidir cuántas soluciones tiene el sistema. En esta sección se consideran varios casos en los que es posible, por simple observación, llegar a proposiciones acerca del número de soluciones.

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es *homogéneo* si todos los términos constantes son cero; es decir, el sistema tiene la forma

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

Todo sistema homogéneo de ecuaciones lineales es consistente, ya que  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$  siempre es una solución. Esta solución se conoce como *solución trivial*; si existen otras soluciones, se dice que son *soluciones no triviales*.

Dado que un sistema homogéneo de ecuaciones lineales debe ser consistente, se tiene una solución o una infinidad de soluciones. Puesto que una de estas soluciones es la trivial, se puede afirmar lo siguiente:



**EJER** Para un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, se cumple exactamente una de las siguientes proposiciones:

1. El sistema tiene sólo la solución trivial.
2. El sistema tiene una infinidad de soluciones no triviales además de la trivial.

Existe un caso en el que queda asegurado que un sistema homogéneo tiene soluciones no triviales; a saber, siempre que el sistema comprende más incógnitas que ecuaciones. Para ver la razón, considérese el ejemplo que sigue de cuatro ecuaciones en cinco incógnitas.

### Ejemplo 9

Resuélvase el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que sigue, aplicando la eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

La matriz aumentada para el sistema es

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Al llevar esta matriz a la forma escalonada en los renglones reducida, se obtiene

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

El sistema correspondiente de ecuaciones es

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_5 &= 0 \\ x_3 + x_5 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Despejando las variables principales se llega a

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 - x_5 \\ x_3 &= -x_5 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto solución queda dado por

$$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = t$$

Nótese que se obtiene la solución trivial cuando  $s = t = 0$ .

En el ejemplo 9 se ilustran dos hechos importantes acerca de la resolución de sistemas homogéneos de ecuaciones lineales. En primer lugar, ninguna de las tres operaciones elementales sobre los renglones puede alterar la columna final de ceros en la matriz aumentada, de modo que el sistema de ecuaciones correspondiente a la forma escalonada en los renglones reducida de la matriz aumentada también debe ser un sistema homogéneo (véase el sistema 1.3 del ejemplo 9). En segundo lugar, dependiendo de si la forma escalonada en los renglones reducida de la matriz aumentada tiene algún renglón sólo con ceros, el número de ecuaciones en el sistema reducido es igual o menor que el número de ecuaciones en el sistema original (compárense los sistemas 1.2 y 1.3 del ejemplo 9). Por consiguiente, si el sistema homogéneo dado tiene  $m$  ecuaciones en  $n$  incógnitas con  $m < n$ , si existen  $r$  renglones diferentes de cero en la forma escalonada en los renglones reducida de la matriz aumentada, se tendrá  $r < n$ ; así entonces, el sistema de ecuaciones correspondiente a la forma escalonada en los renglones reducida de la matriz aumentada se verá

$$\begin{array}{rcl} \cdots x_{k_1} & + \Sigma(\ ) & = 0 \\ \cdots x_{k_2} & + \Sigma(\ ) & = 0 \\ & \vdots & \\ & x_{k_r} + \Sigma(\ ) & = 0 \end{array} \quad (1.4)$$

en donde  $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$  son las variables principales y  $\Sigma(\ )$  denota sumas que comprenden las  $n - r$  variables restantes. Al despejar las variables principales da

$$\begin{array}{l} x_{k_1} = -\Sigma(\ ) \\ x_{k_2} = -\Sigma(\ ) \\ \vdots \\ x_{k_r} = -\Sigma(\ ) \end{array}$$

Como en el ejemplo 9, es posible asignar valores arbitrarios a las variables del segundo miembro y obtener así una infinidad de soluciones para el sistema.

En resumen, se tiene el importante teorema que sigue:

**Teorema 1.** *Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con más incógnitas que ecuaciones siempre tiene una infinidad de soluciones.*

**OBSERVACION.** Nótese que el teorema 1 sólo se aplica a los sistemas homogéneos. Un sistema no homogéneo con más incógnitas que ecuaciones no necesariamente es consistente (ejercicio 11); sin embargo, si el sistema es consistente, tendrá una infinidad de soluciones. Se omite la demostración.

EJERCICIOS 1.3

1. Sin utilizar lápiz ni papel, determine cuáles de los sistemas homogéneos que siguen tienen soluciones no triviales.

(a)  $x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0$       (b)  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$   
 $4x_1 - 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$                        $x_2 + 4x_3 = 0$   
 $3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0$                        $5x_3 = 0$

(c)  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$       (d)  $x_1 + x_2 = 0$   
 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$                $2x_1 + 2x_2 = 0$

En los ejercicios 2 al 5, resuelva el sistema homogéneo dado de ecuaciones lineales.

2.  $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$                       3.  $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$   
 $x_1 + 2x_2 = 0$                                    $5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$   
 $x_2 + x_3 = 0$

4.  $2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0$       5.  $x + 6y - 2z = 0$   
 $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0$                        $2x - 4y + z = 0$   
 $-2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$   
 $x_1 + 3x_2 + x_4 = 0$   
 $x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$

6. ¿Para cuál valor, o cuáles valores, de  $\lambda$  el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales?

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)x + y &= 0 \\ x + (\lambda - 3)y &= 0 \end{aligned}$$

7. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \\ ex + fy &= 0 \end{aligned}$$

Analice las posiciones relativas de las rectas  $ax + by = 0$ ,  $cx + dy = 0$  y  $ex + fy = 0$ , cuando:

- a) el sistema tiene únicamente la solución trivial
- b) el sistema tiene soluciones no triviales.

8. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

- a) Demuestre que si  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  es cualquier solución y  $k$  es cualquier constante, entonces  $x = kx_0$ ,  $y = ky_0$  también es una solución.
- b) Demuestre que si  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  y  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  son dos soluciones cualesquiera, entonces  $x = x_0 + x_1$ ,  $y = y_0 + y_1$  también es una solución.



9. Considere los sistemas de ecuaciones

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & ax + by = k \\ & cx + dy = l \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(II)} & ax + by = 0 \\ & cx + dy = 0 \end{array}$$

- a) Demuestre que si tanto  $x = x_1, y = y_1$  como  $x = x_2, y = y_2$  son soluciones de I, entonces  $x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2$  es una solución de II.
- b) Demuestre que si  $x = x_1, y = y_1$  es una solución de I y  $x = x_0, y = y_0$  es una solución de II, entonces  $x = x_1 + x_0, y = y_1 + y_0$  es una solución de I.
10. a) En el sistema de ecuaciones numerado (1.4), explique por qué sería incorrecto denotar las variables principales por  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , en lugar de  $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kr}$ , como se ha hecho.
- b) El sistema de ecuaciones numerado (1.3) es un caso específico de (1.4). ¿Cuáles valores tiene  $r$  en este caso? ¿Cuáles son  $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kr}$  en este caso? Escriba por completo las sumas denotadas por  $\Sigma(\quad)$  en (1.4).
11. Encuentre un sistema lineal inconsistente que tenga más incógnitas que ecuaciones.

## 1.4 MATRICES Y OPERACIONES MATRICIALES

Los arreglos rectangulares de números reales surgen en muchos contextos que no son los de las matrices aumentadas para sistemas de ecuaciones lineales. En esta sección se consideran esos arreglos como objetos por derecho propio y se desarrollan algunas de sus propiedades que se usan en el trabajo posterior en este texto.

**Definición.** Una *matriz* es un arreglo rectangular de números. Los números del arreglo se conocen como *elementos* de la matriz.

### Ejemplo 10

Los objetos siguientes son matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3] \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [4]$$

Como se indica en estos ejemplos, las matrices tienen tamaños diferentes. El **tamaño** de una matriz se describe especificando el número de renglones (líneas horizontales) y columnas (líneas verticales) que se presentan en ella. La primera matriz del ejemplo 10 tiene 3 renglones y 2 columnas, por tanto su tamaño es de 3 por 2 (lo cual se escribe  $3 \times 2$ ). El primer número siempre indica el número de renglones y el segundo el número de columnas. Así entonces, las matrices restantes del ejemplo 10 tienen los tamaños  $1 \times 4, 3 \times 3, 2 \times 1$  y  $1 \times 1$ , respectivamente.

Se usarán letras mayúsculas para denotar matrices y minúsculas para denotar las cantidades numéricas; por tanto, se podría escribir

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Al analizar las matrices, por lo común se da el nombre de *escalares* a las cantidades numéricas. En este texto, *todos los escalares serán números reales*.

Si  $A$  es una matriz, se usará  $a_{ij}$  para denotar el elemento que está en el renglón  $i$  y la columna  $j$  de  $A$ . Por consiguiente, una matriz general de  $3 \times 4$  se puede escribir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Naturalmente, si se usa  $B$  para denotar la matriz, entonces se usará  $b_{ij}$  para el elemento que está en el renglón  $i$  y la columna  $j$ . Así entonces, una matriz general de  $m \times n$  podría escribirse

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Una matriz  $A$  con  $n$  renglones y  $n$  columnas se denomina *matriz cuadrada de orden  $n$*  y se dice que los elementos  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  están en la *diagonal principal* de  $A$  (véase la figura 1. 2).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Figura 1.2

Hasta ahora se han utilizado las matrices para abreviar el trabajo al resolver sistemas de ecuaciones lineales. No obstante, para otras aplicaciones conviene desarrollar una “aritmética de matrices”, en la que sea posible sumar y multiplicar las matrices en una forma útil. El resto de esta sección se dedica al desarrollo de esta aritmética.

Se dice que dos matrices son *iguales* si tienen el mismo tamaño y los elementos correspondientes en las dos matrices son iguales.

**Ejemplo 11**

Considérense las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquí  $A \neq C$ , puesto que  $A$  y  $C$  no tienen el mismo tamaño. Por la misma razón,  $B \neq C$ . También  $A \neq B$ , ya que no todos los elementos correspondientes son iguales.

**Definición.** Si  $A$  y  $B$  son dos matrices cualesquiera del mismo tamaño, entonces la **suma**  $A + B$  es la matriz que se obtiene al sumar los elementos correspondientes de las dos matrices. Las matrices de tamaños diferentes no se pueden sumar.

### Ejemplo 12

Considérense las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

en tanto que  $A + C$  y  $B + C$  no están definidas.

**Definición.** Si  $A$  es una matriz cualquiera y  $c$  es cualquier escalar, entonces el **producto**  $cA$  es la matriz que se obtiene al multiplicar cada elemento de  $A$  por  $c$ .

### Ejemplo 13

Si  $A$  es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$2A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (-1)A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si  $B$  es una matriz cualquiera, entonces  $-B$  denota el producto  $(-1)B$ . Si  $A$  y  $B$  son dos matrices del mismo tamaño, entonces  $A - B$  se define como la suma  $A + (-B) = A + (-1)B$ .

### Ejemplo 14

Considérense las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$



Con base en las definiciones dadas

$$-B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

y

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que es posible obtener  $A - B$  directamente, restando los elementos de  $B$  de los elementos correspondientes de  $A$ .

En párrafo anterior se definió la multiplicación de una matriz por un escalar. Entonces, la pregunta siguiente es: ¿cómo se multiplican dos matrices? Tal vez la definición más natural de la multiplicación de matrices podría parecer: "multiplíquense los elementos correspondientes". Sin embargo, sorprende el hecho de que esta definición no sería muy útil para la mayoría de los problemas. La experiencia ha conducido a los matemáticos a concluir la siguiente definición menos intuitiva pero más útil de multiplicación de matrices.

**Definición.** Si  $A$  es una matriz de  $m \times r$  y  $B$  es una de  $r \times n$ , entonces el **producto**  $AB$  es la matriz de  $m \times n$  cuyos elementos se determinan como sigue. Para encontrar el elemento en el renglón  $i$  y la columna  $j$  de  $AB$ , distingase el renglón  $i$  de la matriz  $A$  y la columna  $j$  de la  $B$ . Multiplíquense los elementos correspondientes del renglón y columna y, a continuación, súmense los productos resultantes.

### Ejemplo 15

Considérense las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Dado que  $A$  es una matriz de  $2 \times 3$  y  $B$  es una de  $3 \times 4$ , el producto  $AB$  es una matriz de  $2 \times 4$ . Para determinar, por ejemplo, el elemento del renglón 2 y la columna 3 de  $AB$ , se distingue el renglón 2 de  $A$  y la columna 3 de  $B$ . Entonces, como se ilustra a continuación, se multiplican los elementos correspondientes y se suman estos productos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & 26 & \square \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

El elemento del renglón 1 y la columna 4 de  $AB$  se calcula como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & 13 \\ \square & \square & 26 & \square \end{bmatrix}$$

$$(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$$

Los cálculos para los productos restantes son:

$$(1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) = 12$$

$$(1 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 7) = 27$$

$$(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) = 30$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) = 8$$

$$(2 \cdot 1) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 7) = -4$$

$$(2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) = 12$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

La definición de la multiplicación de matrices requiere que el número de columnas del primer factor  $A$  sea igual al número de renglones del segundo factor  $B$ , para formar el producto  $AB$ . Si no se satisface esta condición, el producto no está definido. Un modo de determinar si un producto de dos matrices está definido, es escribir el tamaño del primer factor y, a la derecha del mismo, el tamaño del segundo factor. Si, como en la figura 1.3, los números interiores son iguales, entonces el producto está definido. Entonces, los números exteriores dan el tamaño del producto.



Figura 1.3

### Ejemplo 16

Supóngase que  $A$  es una matriz de  $3 \times 4$ ,  $B$  es una de  $4 \times 7$  y  $C$  una de  $7 \times 3$ . Entonces  $AB$  está definido y es una matriz de  $3 \times 7$ ;  $CA$  está definido y es una matriz de  $7 \times 4$ ;  $BC$  está definido y es una matriz de  $4 \times 3$ . Todos los productos  $AC$ ,  $CB$  y  $BA$  están definidos.

### Ejemplo 17

Si  $A$  es una matriz general de  $m \times r$  y  $B$  una matriz general de  $r \times n$ , entonces, como lo sugieren las líneas sombreadas de abajo, el elemento que queda en el renglón  $i$  y la columna  $j$  de  $AB$  está dado por la fórmula

$$\begin{aligned}
 & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ir}b_{rj} \\
 AB = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{ir}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rj} & \dots & b_{rn} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La multiplicación de matrices tiene una aplicación importante a los sistemas de ecuaciones lineales. Considérese cualquier sistema de  $m$  ecuaciones lineales en  $n$  incógnitas:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \vdots & \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned}$$

Puesto que dos matrices son iguales si y sólo si sus elementos correspondientes son iguales, es posible reemplazar las  $m$  ecuaciones de este sistema por la ecuación matricial única

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

La matriz de  $m \times 1$  del primer miembro de esta ecuación se puede escribir como un producto para dar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Si se designan estas matrices por  $A$ ,  $X$ , y  $B$ , respectivamente, se ha reemplazado el sistema original de  $m$  ecuaciones en  $n$  incógnitas por la ecuación matricial única

$$AX = B \tag{1.5}$$

Parte de lo que se ve posteriormente se dedica a la resolución de ecuaciones matriciales como ésta, para la matriz de incógnitas  $X$ . Como consecuencia de este enfoque matricial, se obtienen nuevos métodos efectivos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. La matriz  $A$  dada en (1.5) se llama *matriz de coeficientes* para el sistema.



## Ejemplo 18

A veces es útil encontrar un renglón o columna particular de un producto  $AB$ , sin calcular el producto completo. Se deja como ejercicio demostrar que los elementos en la  $j$ -ésima columna de  $AB$  son los elementos del producto  $AB_j$ , en donde  $B_j$  es la matriz formada al usar únicamente la  $j$ -ésima columna de  $B$ . Por tanto, si  $A$  y  $B$  son las matrices del ejemplo 15, la segunda columna de  $AB$  se puede obtener por medio del cálculo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

segunda columna      segunda columna  
de  $B$                       de  $AB$

De modo análogo, los elementos del  $i$ -ésimo renglón de  $AB$  son los elementos del producto  $A_i B$ , en donde  $A_i$  es la matriz formada al usar únicamente el  $i$ -ésimo renglón de  $A$ . Por consiguiente, es posible obtener el primer renglón del producto  $AB$  del ejemplo 15 por medio del cálculo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \end{bmatrix}$$

primer renglón de  $A$                       primer renglón de  $AB$

## EJERCICIOS 1.4

1. Suponga que  $A$  y  $B$  son matrices de  $4 \times 5$  y que  $C$ ,  $D$  y  $E$  son matrices de  $5 \times 2$ ,  $4 \times 2$ , y  $5 \times 4$ , respectivamente. Determine cuáles de las siguientes expresiones matriciales están definidas. Para las que estén definidas, dé el tamaño de la matriz resultante.

- (a)  $BA$       (b)  $AC + D$       (c)  $AE + B$   
(d)  $AB + B$       (e)  $E(A + B)$       (f)  $E(AC)$

2. a) Demuestre que si tanto  $AB$  como  $BA$  están definidas entonces  $AB$  y  $BA$  son matrices cuadradas.  
b) Demuestre que si  $A$  es una matriz de  $m \times n$  y  $A(BA)$  está definido, entonces  $B$  es una matriz de  $n \times m$ .
3. Resuelva la siguiente ecuación matricial para  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$

$$\begin{bmatrix} a - b & b + c \\ 3d + c & 2a - 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule

- (a)  $AB$       (b)  $D + E$       (c)  $D - E$   
 (d)  $DE$       (e)  $ED$       (f)  $-7B$

5. Utilizando las matrices del ejercicio 4, calcule (cuando se pueda):

- (a)  $3C - D$       (b)  $(3E)D$   
 (c)  $(AB)C$       (d)  $A(BC)$   
 (e)  $(4B)C + 2B$       (f)  $D + E^2$  (donde  $E^2 = EE$ )

6. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplique el método del ejemplo 18 para encontrar

- a) el primer renglón de  $AB$       b) el tercer renglón de  $AB$   
 c) la segunda columna de  $AB$       d) la primera columna de  $BA$   
 e) el tercer renglón de  $AA$       f) la tercera columna de  $AA$

7. Sean  $C$ ,  $D$  y  $E$  las matrices del ejercicio 4. Realizando los menos cálculos posibles, determine el elemento del renglón 2 y columna 3 de  $C(DE)$ .

8. a) Demuestre que si  $A$  tiene un renglón de ceros y  $B$  es cualquier matriz para la que  $AB$  está definido, entonces  $AB$  también tiene un renglón de ceros.

b) Encuentre un resultado semejante que comprenda una columna de ceros.

9. Suponga que  $A$  es cualquier matriz de  $m \times n$  y que  $0$  sea la matriz de  $m \times n$  para la que cada uno de los elementos es cero. Demuestre que si  $kA = 0$ , entonces  $k = 0$ , o bien  $A = 0$ .

10. Sea  $I$  la matriz de  $m \times n$  cuyo elemento del renglón  $i$  y columna  $j$  es

$$\begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Demuestre que  $AI = IA = A$  para toda matriz  $A$  de  $n \times n$ .

11. Se dice que una matriz cuadrada es una **matriz diagonal**, si todos los elementos que no están en la diagonal principal son ceros. Demuestre que el producto de matrices diagonales también es una matriz diagonal. Enuncie una regla para multiplicar matrices diagonales.

12. a) Demuestre que los elementos de la  $j$ -ésima columna de  $AB$  son los elementos del producto  $AB_j$ , en donde  $B_j$  es la matriz formada a partir de la  $j$ -ésima columna de  $B$ .

b) Demuestre que los elementos del  $i$ -ésimo renglón de  $AB$  son los elementos del producto  $A_i B$ , en donde  $A_i$  es la matriz formada por el  $i$ -ésimo renglón de  $A$ .



### 1.5 REGLAS DE LA ARITMETICA MATRICIAL

Aun cuando muchas de las reglas de la aritmética para los números reales también se cumplen para las matrices, hay algunas excepciones; una de las excepciones más importantes se presenta en la multiplicación de matrices. Para los números reales  $a$  y  $b$ , siempre se tiene  $ab = ba$ . Esta propiedad a menudo se denomina *ley conmutativa para la multiplicación*. Sin embargo, en el caso de las matrices,  $AB$  y  $BA$  no necesariamente son iguales. Es posible que la igualdad no se cumpla por tres razones. Puede suceder, por ejemplo, que  $AB$  esté definido, pero  $BA$  no. Este es el caso si  $A$  es una matriz de  $2 \times 3$  y  $B$  una de  $3 \times 4$ . También puede suceder que tanto  $AB$  como  $BA$  estén definidos, pero tengan tamaños diferentes. Esta es la situación si  $A$  es una matriz de  $2 \times 3$  y  $B$  una de  $3 \times 2$ . Por último, como se muestra en el ejemplo que sigue, se puede tener  $AB \neq BA$ , incluso si  $AB$  y  $BA$  están ambos definidos y tienen el mismo tamaño.

#### Ejemplo 19

Considérense las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar da

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde,  $AB \neq BA$ .

Aunque la ley conmutativa para la multiplicación no es válida en la aritmética matricial, muchas leyes conocidas de la aritmética se cumplen para las matrices. En el teorema que sigue se resumen algunas de las más importantes, junto con sus denominaciones.

**Teorema 2.** *Suponiendo que los tamaños de las matrices son tales que es posible efectuar las operaciones indicadas, son válidas las reglas que siguen de la aritmética matricial:*

- (a)  $A + B = B + A$  (Ley conmutativa para la adición)
- (b)  $A + (B + C) = (A + B) + C$  (Ley asociativa para la adición)
- (c)  $A(BC) = (AB)C$  (Ley asociativa para la multiplicación)
- (d)  $A(B + C) = AB + AC$  (Ley distributiva)
- (e)  $(B + C)A = BA + CA$  (Ley distributiva)
- (f)  $A(B - C) = AB - AC$
- (g)  $(B - C)A = BA - CA$
- (h)  $a(B + C) = aB + aC$
- (i)  $a(B - C) = aB - aC$
- (j)  $(a + b)C = aC + bC$
- (k)  $(a - b)C = aC - bC$
- (l)  $(ab)C = a(bC)$
- (m)  $a(BC) = (aB)C = B(aC)$



Cada una de las ecuaciones de este teorema sostiene una igualdad entre matrices. Para probar una de estas igualdades, es necesario demostrar que la matriz del primer miembro tiene el mismo tamaño que la matriz del segundo miembro, y que los elementos correspondientes en los dos miembros son iguales. Como ilustración, se probará (h). Algunas de las demostraciones restantes se dan como ejercicios.

*Demostración de (h).* Puesto que el primer miembro comprende la operación  $B + C$ ,  $B$  y  $C$  deben tener el mismo tamaño, por ejemplo  $m \times n$ . Se deduce que  $a(B + C)$  y  $aB + aC$  también son matrices de  $m \times n$ , por tanto, tienen el mismo tamaño.

Sea  $l_{ij}$  cualquier elemento del primer miembro y  $r_{ij}$  el elemento correspondiente del segundo. Para completar la demostración, es necesario demostrar que  $l_{ij} = r_{ij}$ . Si  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  y  $c_{ij}$  son los elementos del  $i$ -ésimo renglón y  $j$ -ésima columna de  $A$ ,  $B$  y  $C$ , respectivamente, entonces, por las definiciones de las operaciones matriciales,

$$l_{ij} = a(b_{ij} + c_{ij}) \quad \text{y} \quad r_{ij} = ab_{ij} + ac_{ij}$$

Debido a que  $a(b_{ij} + c_{ij}) = ab_{ij} + ac_{ij}$ , se tiene  $l_{ij} = r_{ij}$ , lo cual completa la demostración. **c**

Aunque las operaciones de adición y multiplicación de matrices se definieron para pares de éstas, las leyes asociativas (b) y (c) permiten denotar sumas y productos de tres matrices, como  $A + B + C$  y  $ABC$ , sin introducir paréntesis algunos. Esto queda justificado por el hecho de que no importa cómo se introduzcan los paréntesis, las leyes asociativas garantizan que se obtendrá el mismo resultado final. Sin entrar en detalles, se observa que son válidos resultados semejantes para sumas o productos que comprenden cuatro o más matrices. En general, *dados cualquier suma o cualquier producto de matrices, se pueden colocar o quitar pares de paréntesis en cualquier lugar dentro de la expresión, sin afectar el resultado final.*

### Ejemplo 20

Como ilustración de la ley asociativa para la multiplicación de matrices, considérese

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Por otra parte,

$$BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

de manera que

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Por tanto,  $(AB)C = A(BC)$ , como lo garantiza el teorema 2(C).

Una matriz en la que todos los elementos son cero, tales como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [0]$$

se denomina *matriz cero*. Las matrices cero se denotan por  $0$ ; si es importante hacer hincapié en el tamaño, se escribe  $0_{m \times n}$  para la matriz cero de  $m \times n$ .

Si  $A$  es cualquier matriz y  $0$  es la matriz cero con el mismo tamaño, es obvio que  $A + 0 = A$ . La matriz  $0$  desempeña casi la misma función en esta ecuación matricial que el número 0 en la ecuación numérica  $a + 0 = a$ .

Como ahora ya se sabe que algunas de las reglas de la aritmética para los números reales no son válidas en la aritmética de las matrices, sería aventurado suponer que todas las propiedades del número real cero se llevan a las matrices cero. Por ejemplo, considérense los dos resultados estándar que siguen de la aritmética de los números reales:

- i) Si  $ab = ac$  y  $a \neq 0$ , entonces  $b = c$ . (Esta se conoce como *ley de cancelación*.)
- ii) Si  $ad = 0$ , entonces al menos uno de los factores de la izquierda es 0.

Como se muestra en el siguiente ejemplo, los resultados correspondientes son falsos en la aritmética matricial.

### Ejemplo 21

Considérense las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquí

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Aunque  $A \neq 0$ , es *incorrecto* cancelar la  $A$  de ambos miembros de la ecuación  $AB = AC$  y escribir  $B = C$ . Por tanto, la ley de cancelación no se cumple para las matrices.

También,  $AD = 0$ , sin embargo,  $A \neq 0$  y  $D \neq 0$ , de modo que el resultado (ii) que se lista en párrafo anterior no se lleva a la aritmética matricial.



A pesar de estos ejemplos negativos, cierto número de propiedades conocidas del número real 0 se llevan hacia las matrices cero. En el teorema que sigue se resumen algunas de las más importantes; las demostraciones se dejan como ejercicios.

**Teorema 3.** *Suponiendo que los tamaños de las matrices son tales que se pueden efectuar las operaciones indicadas, las siguientes reglas de la aritmética matricial son válidas.*

- (a)  $A + 0 = 0 + A = A$
- (b)  $A - A = 0$
- (c)  $0 - A = -A$
- (d)  $A0 = 0; \quad 0A = 0$

Como aplicación de estos resultados de la aritmética matricial, se probará el teorema que sigue, el cual se anticipó con anterioridad en el texto.

**Teorema 4.** *Todo sistema de ecuaciones lineales no tiene soluciones, tiene exactamente una solución, o bien, una infinidad de soluciones.*

*Demostración.* Si  $AX = B$  es un sistema de ecuaciones lineales, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera: (a) el sistema no tiene soluciones, (b) el sistema tiene exactamente una solución, o bien, (c) el sistema tiene más de una solución. Se completa la demostración si se puede probar que el sistema tiene una infinidad de soluciones en el caso (c).

Supóngase que  $AX = B$  tiene más de una solución y que  $X_1$  y  $X_2$  son dos soluciones diferentes. Por tanto,  $AX_1 = B$  y  $AX_2 = B$ . Al restar estas ecuaciones da  $AX_1 - AX_2 = 0$ , o bien,  $A(X_1 - X_2) = 0$ . Si se hace que  $X_0 = X_1 - X_2$  y  $k$  es cualquier escalar, entonces

$$\begin{aligned} A(X_1 + kX_0) &= AX_1 + A(kX_0) \\ &= AX_1 + k(AX_0) \\ &= B + k0 \\ &= B + 0 \\ &= B \end{aligned}$$

Pero con esto se afirma que  $X_1 + kX_0$  es una solución de  $AX = B$ . Ya que existe una infinidad de valores que puede tomar  $k$ ,  $AX = B$  tiene una infinidad de soluciones. ■

En especial interesantes son las matrices cuadradas que tienen puros 1 en la diagonal principal y 0 en todas las demás posiciones, tales como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{etc.}$$

Una matriz de este tipo se denomina *matriz identidad* y se denota por  $I$ . Si es importante hacer hincapié en el tamaño, se escribe  $I_n$  para la matriz identidad de  $n \times n$ .



Si  $A$  es una matriz de  $m \times n$ , entonces, como se ilustra en el ejemplo que sigue,  $AI_n = A$  y  $I_m A = A$ . Por consiguiente, una matriz identidad desempeña casi la misma función en la aritmética matricial que el número 1 en las relaciones numéricas  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

### Ejemplo 22

Considérese la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

y

$$A I_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

Si  $A$  es una matriz cuadrada cualquiera y si es posible hallar una matriz  $B$  tal que  $AB = BA = I$ , entonces se dice que  $A$  es *invertible* y  $B$  se conoce como *inversa* de  $A$ .

### Ejemplo 23

La matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{es una inversa de} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

puesto que

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

y

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

### Ejemplo 24

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

no es inversible. Para ver por qué, sea

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

una matriz cualquiera de  $3 \times 3$ . Por lo visto en el ejemplo 18 la tercera columna de  $BA$  es

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$BA \neq I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resulta razonable preguntar si una matriz inversible puede tener más de una inversa. El teorema que sigue indica que la respuesta es no: una matriz inversible tiene exactamente una inversa.

**Teorema 5.** Si tanto  $B$  como  $C$  son inversas de la matriz  $A$ , entonces  $B = C$ .

*Demostración.* Supuesto que  $B$  es una inversa de  $A$ ,  $BA = I$ . Al multiplicar por la derecha ambos miembros por  $C$  da  $(BA)C = IC = C$ . Pero  $(BA)C = B(AC) = BI = B$ , de modo que  $B = C$ . ■

Como consecuencia de este importante resultado, ahora se puede hablar de "la" inversa de una matriz inversible. Si  $A$  es inversible, entonces su inversa se denota por medio del símbolo  $A^{-1}$ . Por consiguiente

$$AA^{-1} = I \quad \text{y} \quad A^{-1}A = I$$

La inversa de  $A$  desempeña casi la misma función en la aritmética matricial que la desempeñada por el recíproco  $a^{-1}$  en las relaciones numéricas  $aa^{-1} = 1$  y  $a^{-1}a = 1$ .

**Ejemplo 25**

Considérese la matriz de  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Si  $ad - bc \neq 0$ , entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

dado que  $AA^{-1} = I_2$  y  $A^{-1}A = I_2$  (verifíquese). En la siguiente ecuación se muestra cómo encontrar las inversas de las matrices invertibles cuyos tamaños son mayores que  $2 \times 2$ .

**Teorema 6.** Si  $A$  y  $B$  son matrices invertibles del mismo tamaño, entonces

- a)  $AB$  es invertible
- b)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

*Demostración.* Si se puede demostrar que  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ , entonces se habrá establecido simultáneamente que  $AB$  es invertible y que  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . Pero  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ . Análogamente,  $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ . ■

Aun cuando no se probará, este resultado se puede extender hasta incluir tres o más factores. Por tanto, es posible enunciar la siguiente regla general:

*Un producto de matrices invertibles siempre es invertible, y la inversa del producto es el producto de las inversas en orden inverso.*

### Ejemplo 26

Considérense las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Al aplicar la fórmula dada en el ejemplo 25, se obtiene

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

También

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , según lo garantiza el teorema 6.



Si  $A$  es una matriz cuadrada y  $n$  es un entero positivo, se define

$$A^n = \underbrace{AA \dots A}_n$$

$$A^0 = I$$

Si, además,  $A$  es inversible, se define

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1} A^{-1} \dots A^{-1}}_n$$

**Teorema 7.** Si  $A$  es una matriz inversible, entonces:

- a)  $A^{-1}$  es inversible y  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- b)  $A^n$  es inversible y  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ .
- c) Para cualquier escalar diferente de cero  $k$ ,  $kA$  es inversible y  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ .

*Demostración.*

- a) Dado que  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ,  $A^{-1}$  es inversible y  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- b) Esta parte se deja como ejercicio.
- c) Si  $k$  es cualquier escalar diferente de cero, los resultados (l) y (m) del teorema 2 permiten escribir

$$(kA) \left( \frac{1}{k} A^{-1} \right) = \frac{1}{k} (kA) A^{-1} = \left( \frac{1}{k} k \right) AA^{-1} = (1)I = I$$

De modo análogo  $\left( \frac{1}{k} A^{-1} \right) (kA) = I$ , de manera que  $kA$  es inversible y  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$  ■

Se concluye esta sección con la siguiente observación: si  $A$  es una matriz cuadrada y  $r$  y  $s$  son enteros, entonces son válidas las conocidas leyes de los exponentes que siguen:

$$A^r A^s = A^{r+s} \quad (A^r)^s = A^{rs}$$

Las demostraciones se dejan como ejercicios.

**EJERCICIOS 1.5**

1. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad a = -3 \quad b = 2$$

Demuestre que

$$(a) A + (B + C) = (A + B) + C \quad (b) (AB)C = A(BC)$$

$$(c) (a + b)C = aC + bC \quad (d) a(B - C) = aB - aC$$

2. Utilizando las matrices y los escalares del ejercicio 1, demuestre que

$$(a) a(BC) = (aB)C = B(aC) \quad (b) A(B - C) = AB - AC.$$

3. Aplique la fórmula dada en el ejemplo 25 para calcular las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Verifique que las matrices  $A$  y  $B$  del ejercicio 3 satisfacen la relación  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
5. Sean  $A$  y  $B$  matrices cuadradas del mismo tamaño. ¿Es  $(AB)^2 = A^2B^2$  una identidad matricial válida? Justifique la respuesta.
6. Sea  $A$  una matriz invertible cuya inversa es

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Encuentre la matriz  $A$ .

7. Sea  $A$  una matriz invertible y suponga que la inversa de  $7A$  es

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

Encuentre la matriz  $A$ .

8. Sea  $A$  la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule  $A^3$ ,  $A^{-3}$ , y  $A^2 - 2A + I$ .

9. Sea  $A$  la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine si  $A$  es invertible y, si lo es, encuentre su inversa. (*Sugerencia.* Resuelva  $AX = I$  igualando los elementos correspondientes de los dos miembros.)

10. Encuentre la inversa de

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

11. a) Encuentre las matrices  $A$  y  $B$  de  $2 \times 2$  tales que

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

- b) Demuestre que, si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas tales que  $AB = BA$ , entonces

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

- c) Halle un desarrollo de  $(A + B)^2$  que sea válido para todas las matrices cuadradas  $A$  y  $B$  que tengan el mismo tamaño.

12. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

en donde  $a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \neq 0$ . Demuestre que  $A$  es inversible y encuentre su inversa.

13. Suponga que  $A$  es una matriz cuadrada que satisface  $A^2 - 3A + I = 0$ . Demuestre que  $A^{-1} = 3I - A$ .
14. a) Demuestre que una matriz con un renglón de ceros no puede tener una inversa.  
b) Demuestre que una matriz con una columna de ceros no puede tener una inversa.
15. ¿Es necesariamente inversible la suma de dos matrices inversibles?
16. Sean  $A$  y  $B$  matrices cuadradas tales que  $AB = 0$ . Demuestre que  $A$  no puede ser inversible a menos que  $B = 0$ .
17. En el teorema 3, ¿por qué no se pudo escribir el inciso (d) como  $A0 = 0 = 0A$ ?
18. La ecuación real  $a^2 = 1$  tiene exactamente dos soluciones. Encuentre al menos ocho matrices diferentes de  $3 \times 3$  que satisfagan la ecuación matricial  $A^2 = I_3$ . (Sugerencia. Busque soluciones en las que todos los elementos que no estén en la diagonal principal sean cero.)
19. Sea  $AX = B$  cualquier sistema consistente de ecuaciones lineales y supóngase que  $X_1$  es una solución fija. Demuestre que toda solución para el sistema se puede escribir en la forma  $X = X_1 + X_0$ , en donde  $X_0$  es una solución para  $AX = 0$ . Demuestre también que toda matriz de esta forma es una solución.
20. Aplique los incisos (d) y (m) del teorema 2 a las matrices  $A$ ,  $B$  y  $(-1)C$  para deducir el resultado del inciso (f).
21. Demuestre el inciso (b) del teorema 2.
22. Demuestre el teorema 3.
23. Demuestre el inciso (c) del teorema 2.
24. Demuestre el inciso (b) del teorema 7.
25. Considere las leyes de los exponentes  $A^r A^s = A^{r+s}$  y  $(A^r)^s = A^{rs}$ .  
a) Demuestre que si  $A$  es cualquier matriz cuadrada, estas leyes son válidas para todos los valores enteros no negativos de  $r$  y  $s$ .



- b) Demuestre que si  $A$  es inversible, entonces estas leyes se cumplen para todos los valores enteros negativos de  $r$  y  $s$ .
26. Demuestre que si  $A$  es inversible y  $k$  es cualquier escalar diferente de cero, entonces  $(kA)^n = k^n A^n$  para todos los valores enteros de  $n$ .
27. a) Demuestre que si  $A$  es inversible y  $AB = AC$  entonces  $B = C$ .  
b) Dé una explicación de por qué el inciso (a) y el ejemplo 21 no se contradicen entre sí.
28. Demuestre: Si  $R$  es una matriz cuadrada en la forma escalonada en los renglones reducida y si  $R$  no tiene renglones cero, entonces  $R = I$ .

## 1.6 MATRICES ELEMENTALES Y UN METODO PARA HALLAR $A^{-1}$

En esta sección se desarrolla un esquema o algoritmo sencillo para encontrar la inversa de una matriz inversible.

**Definición.** Se dice que una matriz de  $n \times n$  es una **matriz elemental** si se puede obtener a partir de la matriz identidad de  $n \times n$  realizando una sola operación elemental sobre los renglones.

### Ejemplo 27

A continuación se listan cuatro matrices elementales y las operaciones que las producen:

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (iii) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (iv) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplíquese el segundo renglón de  $I_2$  por  $-3$

Intercámbiense el segundo y cuarto renglones de  $I_4$

Súmese 3 veces el tercer renglón de  $I_3$  al primer renglón

Multiplíquese el primer renglón de  $I_3$  por 1

Cuando se multiplica por la *izquierda* una matriz  $A$  por una matriz elemental  $E$ , el efecto es el de realizar una operación elemental sobre los renglones en  $A$ . Este es el contenido del teorema que sigue, el cual se enuncia sin demostración.

**Teorema 8.** Si la matriz elemental  $E$  resulta al efectuar cierta operación sobre los renglones en  $I_m$  y si  $A$  es una matriz de  $m \times n$ , entonces el producto  $EA$  es la matriz que resulta al efectuar la misma operación sobre los renglones en  $A$ .

En el siguiente ejemplo se ilustra esta idea.

### Ejemplo 28

Considérese la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

y considérese la matriz elemental

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que resulta al sumar 3 veces el primer renglón de  $I_3$  al tercer renglón. El producto  $EA$  es

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

que es precisamente la misma matriz que resulta al sumar 3 veces el primer renglón de  $A$  al tercer renglón.

OBSERVACION. El teorema 8 es principalmente de interés teórico y se aplicará para desarrollar algunos resultados acerca de las matrices y los sistemas de ecuaciones lineales. Desde el punto de vista del cálculo, es preferible efectuar las operaciones sobre los renglones directamente, en lugar de multiplicar por la izquierda por una matriz elemental.

Si se aplica una operación elemental sobre los renglones a una matriz identidad  $I$  para producir una matriz elemental  $E$ , entonces existe una segunda operación sobre los renglones que, al aplicarse a  $E$ , reproduce  $I$ . Por ejemplo, si se obtiene  $E$  al multiplicar el  $i$ -ésimo renglón de  $I$  por una constante diferente de cero  $c$ , entonces es posible recobrar  $I$  si se multiplica el  $i$ -ésimo renglón de  $E$  por  $1/c$ . En la figura 1.4 se listan las diversas posibilidades.

Operación en los renglones sobre $I$ que produce $E$	Operación en los renglones sobre $E$ que produce $I$
Multiplíquese el renglón $i$ por $c \neq 0$	Multiplíquese el renglón $i$ por $1/c$
Intercámbiense los renglones $i$ y $j$	Intercámbiense los renglones $i$ y $j$
Súmese $c$ veces el renglón $i$ al renglón $j$	Súmese $-c$ veces el renglón $i$ al renglón $j$

Figura 1.4

Las operaciones que están a la derecha en esta tabla se denominan *operaciones inversas* de las operaciones correspondientes que están a la izquierda.

### Ejemplo 29

Si se aplican los resultados que se dan en la figura 1.4, las tres primeras matrices elementales que se dan en el ejemplo 27 se pueden llevar nuevamente a matrices identidad al aplicar las siguientes operaciones sobre los renglones: multiplicar el segundo renglón de (i) por  $-1/3$ ; intercambiar el segundo y cuarto renglones de (ii); sumar  $-3$  veces el tercer renglón de (iii) al primer renglón.



El teorema que sigue da una importante propiedad de las matrices elementales.

**Teorema 9.** *Toda matriz elemental es inversible y la inversa también es una matriz elemental.*

*Demostración.* Si  $E$  es una matriz elemental, entonces se llega a  $E$  llevando a cabo alguna operación sobre los renglones en  $I$ . Sea  $E_0$  la matriz que se obtiene al realizar la inversa de esta operación en  $I$ . Al aplicar el teorema 8 y teniendo en cuenta el hecho de que las operaciones inversas sobre los renglones cancelan el efecto de cada una de las otras, se deduce que

$$E_0E = I \quad \text{y} \quad EE_0 = I$$

Por tanto, la matriz elemental  $E_0$  es la inversa de  $E$ . ■

Si es posible obtener una matriz  $B$  a partir de una matriz  $A$ , efectuando una sucesión finita de operaciones elementales sobre los renglones, entonces, obviamente, se puede regresar de  $B$  hacia  $A$ , llevando a cabo las inversas de estas operaciones, en orden inverso. Las matrices que se pueden obtener una de la otra por medio de una sucesión finita de operaciones elementales sobre los renglones, se dice que son *equivalentes respecto a los renglones*.

El teorema que sigue establece algunas relaciones fundamentales entre las matrices de  $n \times n$  y los sistemas de  $n$  ecuaciones lineales en  $n$  incógnitas. Estos resultados son sumamente importantes y se aplican muchas veces en secciones posteriores.

**Teorema 10.** *Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.*

- $A$  es inversible.
- $AX = 0$  tiene únicamente la solución trivial.
- $A$  es equivalente respecto a los renglones a  $I_n$ .

*Demostración.* Se probará la equivalencia al establecer la cadena siguiente de implicaciones:  $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a)$ .

$a) \Rightarrow b)$ : Supóngase que  $A$  es inversible y que  $X_0$  es cualquier solución para  $AX = 0$ . Por consiguiente,  $AX_0 = 0$ . Al multiplicar los dos miembros de esta ecuación por  $A^{-1}$  se obtiene  $A^{-1}(AX_0) = A^{-1}0$ , o bien  $(A^{-1}A)X_0 = 0$ , o bien  $I_nX_0 = 0$ , o bien  $X_0 = 0$ . Por tanto,  $AX = 0$  sólo tiene la solución trivial.

$b) \Rightarrow c)$ : Sea  $AX = 0$  la forma matricial del sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$



y supóngase que el sistema únicamente tiene la solución trivial. Si se resuelve por la eliminación de Gauss-Jordan, entonces el sistema de ecuaciones correspondiente a la forma escalonada en los renglones reducida de la matriz aumentada será

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ &\vdots \\ x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Por consiguiente, la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

para (1.6) se puede reducir a la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

para (1.7), por una sucesión de operaciones elementales sobre los renglones. Si se descarta la última columna (de ceros) en cada una de estas matrices, es posible concluir que se puede reducir  $A$  hacia  $I_n$  por una sucesión de operaciones elementales sobre los renglones; es decir,  $A$  es equivalente respecto a los renglones a  $I_n$ .

$c) \Rightarrow a)$ : Supóngase que  $A$  es equivalente respecto a los renglones a  $I_n$ , de modo que es posible llevar  $A$  hacia  $I_n$  por una sucesión finita de operaciones elementales sobre los renglones. Por el teorema 8 es posible realizar cada una de estas operaciones multiplicando por la izquierda, por una matriz elemental apropiada. Por tanto, se pueden encontrar las matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_k$  tales que

$$E_k \dots E_2 E_1 A = I_n \tag{1.8}$$

Por el teorema 9,  $E_1, E_2, \dots, E_k$  son inversibles. Al multiplicar los dos miembros de la ecuación (1.8) por la izquierda, sucesivamente por  $E_k^{-1}, \dots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$  se obtiene

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \tag{1.9}$$

Dado que (1.9) expresa a  $A$  como un producto de matrices inversibles, se puede concluir que  $A$  es inversible. ■

OBSERVACION. Como  $I_n$  está en la forma escalonada en los renglones reducida y ya que ésta para una matriz  $A$  es única, el inciso (c) del teorema 10 es equivalente a afirmar que  $I_n$  es la forma escalonada en los renglones reducida de  $A$ .

Como primera aplicación de este teorema, se establecerá un método para determinar la inversa de una matriz invertible.

La inversión del primero y segundo miembros de (1.9) da  $A^{-1} = E_k \dots E_2 E_1$ , o lo que es equivalente,

$$A^{-1} = E_k \dots E_2 E_1 I_n \quad (1.10)$$

con lo cual se afirma que es posible obtener  $A^{-1}$  al multiplicar  $I_n$  sucesivamente por la izquierda, por las matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_k$ . Puesto que cada multiplicación por la izquierda, por una de estas matrices elementales, realiza una operación sobre los renglones, se concluye, al comparar las ecuaciones (1.8) y (1.10), que la sucesión de operaciones sobre los renglones que reduce  $A$  hacia  $I_n$ , reducirá  $I_n$  hacia  $A^{-1}$ . Por tanto, para hallar la inversa de una matriz invertible  $A$ , debe encontrarse una sucesión de operaciones elementales sobre los renglones que reduzca  $A$  hacia la identidad y, a continuación, efectuar esta misma sucesión de operaciones sobre  $I_n$  para obtener  $A^{-1}$ . En el siguiente ejemplo se da un método sencillo para llevar a cabo este procedimiento.

### Ejemplo 30

Encuéntrese la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Se desea reducir  $A$  hacia la matriz identidad por operaciones sobre los renglones y, simultáneamente, aplicar estas operaciones a  $I$  para producir  $A^{-1}$ . Se puede realizar esto, adjuntando la matriz identidad a la derecha de  $A$  y aplicando las operaciones sobre los renglones a ambos lados, hasta que el lado izquierdo se reduce a  $I$ . Entonces la matriz final tendrá la forma  $[I|A^{-1}]$ . Los cálculos se pueden realizar como sigue:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Se sumó  $-2$  veces el primer renglón al segundo y  $-1$  veces el primer renglón al tercero

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Se sumó 2 veces el segundo renglón al tercero

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Se multiplicó el tercer renglón por  $-1$ .

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Se sumó 3 veces el tercer renglón al segundo y  $-3$  veces el tercer renglón al primero.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Se sumó  $-2$  veces el segundo renglón al primero

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

A menudo no se sabrá con anterioridad si una matriz dada es inversible. Si se intenta el procedimiento aplicado en este ejemplo sobre una matriz que no es inversible, entonces, por el inciso (c) del teorema 10, será imposible reducir el lado izquierdo hacia  $I$  por operaciones sobre los renglones. En algún paso del cálculo, se presentará un renglón de ceros en el lado izquierdo; entonces se puede concluir que la matriz dada no es inversible y detener los cálculos.

### Ejemplo 31

Considérese la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el procedimiento del ejemplo 30 da

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Se sumó  $-2$  veces el primer renglón al segundo y el primero al tercero.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Se sumó el segundo renglón al tercero.



Puesto que se ha obtenido un renglón de ceros en el lado izquierdo,  $A$  no es inversible.

### Ejemplo 32

En el ejemplo 30 se demostró que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

es una matriz inversible. Con base en el teorema 10 se puede concluir ahora que el sistema de ecuaciones

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 + 8x_3 = 0$$

tiene únicamente la solución trivial.

### EJERCICIOS 1.6

1. ¿Cuáles de las que siguen son matrices elementales?

(a)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(g)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Determine la operación sobre los renglones que llevará la matriz elemental dada hacia una matriz identidad.

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

Encuentre las matrices elementales  $E_1, E_2, E_3$  y  $E_4$  tales que

(a)  $E_1 A = B$     (b)  $E_2 B = A$     (c)  $E_3 A = C$     (d)  $E_4 C = A$

4. ¿En el ejercicio 3 es posible encontrar una matriz elemental  $E$  tal que  $EB = C$ ? Justifique la respuesta.

En los ejercicios 5-7, aplique el método mostrado en los ejemplos 30 y 31 a fin de encontrar la inversa de la matriz dada, si la matriz es inversible.

5. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$     (c)  $\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

6. (a)  $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$     (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$     (e)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$     (f)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

7. (a)  $\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$     (c)  $\begin{bmatrix} 5 & 11 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. Demuestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es inversible para todos los valores de  $\theta$  y encuentre  $A^{-1}$ .

9. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- a) Encuentre las matrices elementales  $E_1$  y  $E_2$  tales que  $E_2 E_1 A = I$ .
- b) Escriba  $A^{-1}$  como un producto de dos matrices elementales.
- c) Escriba  $A$  como un producto de dos matrices elementales.

10. Efectúe las operaciones sobre los renglones que siguen

sobre

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

multiplicando  $A$  por la izquierda, por una matriz elemental apropiada. En cada caso, verifique la respuesta llevando a cabo la operación sobre los renglones directamente sobre  $A$ .

- Intercambie el primero y tercer renglones.
- Multiplique el segundo renglón por  $1/3$ .
- Suma el doble del segundo renglón al primero.

11. Exprese la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

en la forma  $A = EFR$ , en donde  $E$  y  $F$  son matrices elementales y  $R$  está en la forma escalonada en los renglones.

12. Demuestre que si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

es una matriz elemental, entonces al menos un elemento del tercer renglón debe ser un cero.

13. Encuentre la inversa de cada una de las matrices de  $4 \times 4$  siguientes, en donde  $k_1, k_2, k_3, k_4$  y  $k$  son todas diferentes de cero.

$$(a) \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

- Pruebe que si  $A$  es una matriz de  $m \times n$ , existe una matriz invertible  $C$  tal que  $CA$  está en la forma escalonada en los renglones reducida.
- Pruebe que si  $A$  es una matriz invertible y  $B$  es equivalente respecto a los renglones a  $A$  entonces  $B$  también es invertible.

## 1.7 RESULTADOS ADICIONALES ACERCA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES Y LA INVERSIBILIDAD

En esta sección se establecen más resultados acerca de los sistemas de ecuaciones lineales y la inversibilidad de las matrices. Lo que se vea conducirá a un método para resolver  $n$  ecuaciones en  $n$  incógnitas, que es más eficaz que la eliminación gaussiana, para ciertos tipos de problemas.



**Teorema 11.** Si  $A$  es una matriz inversible de  $n \times n$ , entonces para cada matriz  $B$  de  $n \times 1$ , el sistema de ecuaciones  $AX = B$  tiene exactamente una solución, a saber,  $X = A^{-1}B$ .

*Demostración.* Puesto que  $A(A^{-1}B) = B$ ,  $X = A^{-1}B$  es una solución de  $AX = B$ . Para demostrar que ésta es la única solución, se supondrá que  $X_0$  es una solución arbitraria y, a continuación, se demostrará que  $X_0$  debe ser la solución  $A^{-1}B$ .

Si  $X_0$  es cualquier solución, entonces  $AX_0 = B$ . Al multiplicar los dos miembros por  $A^{-1}$ , se obtiene  $X_0 = A^{-1}B$ . ■

**Ejemplo 33**

Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

En la forma matricial, este sistema se puede escribir como  $AX = B$ , en donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

En el ejemplo 30 se demostró que  $A$  es inversible y que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Por el teorema 11, la solución del sistema es

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

o bien,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 2$ .

La técnica que se ilustró en este ejemplo sólo se aplica cuando la matriz de coeficientes  $A$  es cuadrada, es decir, cuando el sistema tiene tantas ecuaciones como incógnitas. Sin embargo, muchos problemas de la ciencia y la ingeniería comprenden sistemas de este tipo. El método es útil en particular cuando es necesario resolver una serie completa de sistemas

$$AX = B_1, AX = B_2, \dots, AX = B_k$$

cada uno de los cuales tiene la misma matriz cuadrada de coeficientes  $A$ . En este caso, se pueden obtener las soluciones

$$X = A^{-1}B_1, X = A^{-1}B_2, \dots, X = A^{-1}B_k$$

aplicando una inversión de matrices y  $k$  multiplicaciones de matrices. Este procedimiento es más eficaz que el de aplicar por separado la eliminación gaussiana a cada uno de los  $k$  sistemas.

Se hará un paréntesis para ilustrar en qué forma puede surgir esta situación en las aplicaciones. En ciertos problemas de aplicación, se consideran sistemas físicos que pueden describirse como *cajas negras*. Este término indica que se ha despojado al sistema de todo lo superfluo y se contemplan sus características esenciales. Como se ilustra en la figura 1.5, uno se imagina simplemente que si se aplica cierta entrada al sistema, entonces se

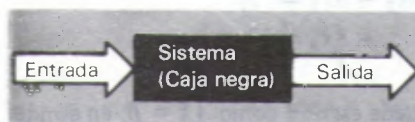


Figura 1.5

obtendrá de él determinada salida. La forma en que funciona el sistema internamente se desconoce o no tiene importancia para el problema —de ahí el nombre de *caja negra*. En el caso de muchos sistemas importantes de caja negra, es posible describir matemáticamente tanto la entrada como la salida en forma de matrices que tienen una sola columna. Por ejemplo, si la caja negra consta de cierta circuitería electrónica, entonces la entrada podría ser una matriz de  $n \times 1$  cuyos elementos fuesen  $n$  voltajes leídos a través de determinadas terminales de entrada, y la salida podría ser una matriz de  $n \times 1$  cuyos elementos fuesen las corrientes resultantes en  $n$  alambres de salida. Hablando matemáticamente, un sistema de este tipo hace nada más que transformar una matriz de entrada de  $n \times 1$  en una matriz de salida de  $n \times 1$ . Para una clase grande de sistemas de caja negra, una matriz de entrada  $C$  está relacionada con la matriz de salida  $B$  por medio de una ecuación matricial

$$AC = B$$

en donde  $A$  es una matriz de  $n \times n$  cuyos elementos son parámetros físicos determinados por el sistema. Un sistema de este tipo es un ejemplo de lo que se conoce como *sistema físico lineal*. En las aplicaciones, a menudo es importante determinar qué entrada se debe aplicar al sistema para lograr una determinada salida deseada. Para un sistema físico lineal del tipo que acaba de describirse, esto equivale a resolver la ecuación  $AX = B$  para la entrada  $X$  desconocida, dada la salida  $B$  que se desea. Por tanto, si se tiene una sucesión de matrices de salida diferentes  $B_1, \dots, B_k$ , y se desea determinar las matrices de entrada que producen estas salidas dadas, será necesario resolver sucesivamente los  $k$  sistemas de ecuaciones lineales

$$AX = B_j \quad j = 1, 2, \dots, k$$

cada uno de los cuales tiene la misma matriz cuadrada  $A$  de coeficientes.

El teorema que sigue simplifica el problema de demostrar que una matriz es inversible. Hasta ahora, para demostrar que una matriz  $A$  de  $n \times n$  es inversible, era necesario encontrar una matriz  $B$  de  $n \times n$  tal que

$$AB = I \quad \text{y} \quad BA = I$$

El teorema que sigue a continuación muestra que si se produce una matriz  $B$  de  $n \times n$  que satisfaga *cualquiera* de las dos condiciones que se dan, entonces la otra condición se cumple automáticamente.

**Teorema 12.** *Sea  $A$  una matriz cuadrada.*

- a) *Si  $B$  es una matriz cuadrada que satisface  $BA = I$ , entonces  $B = A^{-1}$ .*
- b) *Si  $B$  es una matriz cuadrada que satisface  $AB = I$ , entonces  $B = A^{-1}$ .*

*Demostración.* Se probará (a) y se dejará (b) como ejercicio.

- a) Supóngase que  $BA = I$ . Si es posible demostrar que  $A$  es inversible, se puede completar la demostración al multiplicar los dos miembros de  $BA = I$  por  $A^{-1}$  para obtener

$$BAA^{-1} = IA^{-1} \quad \text{o} \quad BI = IA^{-1} \quad \text{o} \quad B = A^{-1}$$

para demostrar que  $A$  es inversible, basta con demostrar que el sistema  $AX = 0$  tiene únicamente la solución trivial (véase el teorema 10). Sin embargo, si se multiplican por la izquierda ambos miembros de  $AX = 0$  por  $B$ , se obtiene  $BAX = B0$ , o bien,  $IX = 0$ , o bien,  $X = 0$ . Por tanto, el sistema de ecuaciones  $AX = 0$  tiene solamente la solución trivial. ■

Ahora se está en condiciones de agregar una cuarta proposición que equivale a las tres dadas en el teorema 10.

**Teorema 13.** *Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces las proposiciones que siguen son equivalentes:*

- a)  *$A$  es inversible.*
- b)  *$AX = 0$  tiene únicamente la solución trivial.*
- c)  *$A$  es equivalente respecto a los renglones a  $I_n$ .*
- d)  *$AX = B$  es consistente para toda matriz  $B$  de  $n \times 1$ .*

*Demostración.* Puesto que se probó en el teorema 10 que (a), (b) y (c) son equivalentes, bastará con probar que (a)  $\Rightarrow$  (d) y (d)  $\Rightarrow$  (a).

a)  $\Rightarrow$  d): Si  $A$  es inversible y  $B$  es cualquier matriz de  $n \times 1$ , entonces  $X = A^{-1}B$  es una solución de  $AX = B$ , según se afirma en el teorema 11. Por tanto,  $AX = B$  es consistente.

d)  $\Rightarrow$  a): Si el sistema  $AX = B$  es consistente para toda matriz  $B$  de  $n \times 1$ , entonces, en particular, los sistemas



$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

serán consistentes. Sea  $X_1$  una solución del primer sistema,  $X_2$  una solución del segundo sistema,  $\dots$ , y  $X_n$  una solución del último sistema, y fórmese una matriz  $C$  de  $n \times n$  que tenga estas soluciones como columnas. Por tanto,  $C$  tiene la forma

$$C = [X_1 \mid X_2 \mid \dots \mid X_n]$$

Como se analizó en el ejemplo 18, las columnas sucesivas del producto  $AC$  serán

$$AX_1, AX_2, \dots, AX_n$$

Por tanto,

$$AC = [AX_1 \mid AX_2 \mid \dots \mid AX_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I$$

Con base en el inciso (b) del teorema 12, se concluye que  $C = A^{-1}$ . Por consiguiente,  $A$  es invertible. ■

Posteriormente en este libro, el problema fundamental que sigue se presenta repetidamente en varios contextos.

**Un problema fundamental.** Sea  $A$  una matriz fija de  $m \times n$ . Hállense todas las matrices  $B$  de  $m \times 1$  tales que el sistema de ecuaciones  $AX = B$  sea consistente.

Si  $A$  es una matriz invertible, el teorema 11 resuelve este problema por completo al afirmar que, para toda matriz  $B$  de  $m \times 1$ ,  $AX = B$  tiene la solución única  $X = A^{-1}B$ . Si  $A$  no es cuadrada, o si  $A$  es cuadrada pero no invertible, entonces no se aplica el teorema 11. En estos casos, sería conveniente poder determinar qué condiciones, si las hay, debe satisfacer la matriz  $B$  para que  $AX = B$  sea consistente. En el ejemplo que sigue se ilustra cómo se puede aplicar la eliminación gaussiana a fin de determinar esas condiciones.

### Ejemplo 34

¿Qué condiciones deben satisfacer  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  para que el sistema de ecuaciones

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1$$

$$x_1 + x_3 = b_2$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3$$

sea consistente?

*Solución.* La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

que se puede llevar a la forma escalonada en los renglones de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

Se sumó  $-1$  veces el primer renglón al segundo y  $-2$  veces el primero al tercero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

Se multiplicó el segundo renglón por  $-1$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

Se sumó el segundo renglón al tercero.

Ahora es evidente, con base en lo expresado en el tercer renglón de la matriz, que el sistema tiene una solución si, y sólo si,  $b_1, b_2$  y  $b_3$  satisfacen la condición

$$b_3 - b_2 - b_1 = 0 \quad \text{o bien} \quad b_3 = b_1 + b_2$$

Para expresar esta condición de otra manera,  $AX = B$  es consistente si y sólo si  $B$  es una matriz de la forma

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

en donde  $b_1$  y  $b_2$  son arbitrarios.

**EJERCICIOS 1.7**

En los ejercicios 1–6, resuelva el sistema aplicando el método del ejemplo 33.

1.  $x_1 + 2x_2 = 7$                       2.  $3x_1 - 6x_2 = 8$   
 $2x_1 + 5x_2 = -3$                        $2x_1 + 5x_2 = 1$

3.  $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1$             4.  $2x_1 + x_2 + x_3 = 7$

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$                        $3x_1 + 2x_2 + x_3 = -3$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$                        $x_2 + x_3 = 5$

$$\begin{array}{ll}
 5. \quad \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = 1 & 6. \quad 3w + x + 7y + 9z = 4 \\
 \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{4}{5}z = 2 & \quad w + x + 4y + 4z = 7 \\
 -\frac{2}{5}x + \frac{1}{10}y + \frac{1}{10}z = 0 & \quad -w - 2y - 3z = 0 \\
 & \quad -2w - x - 4y - 6z = 6
 \end{array}$$

7. Resuelva el sistema

$$\begin{array}{l}
 x_1 + 2x_2 + x_3 = b_1 \\
 x_1 - x_2 + x_3 = b_2 \\
 x_1 + x_2 = b_3
 \end{array}$$

cuando

$$\begin{array}{ll}
 (a) \quad b_1 = -1, b_2 = 3, b_3 = 4 & (b) \quad b_1 = 5, b_2 = 0, b_3 = 0 \\
 (c) \quad b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = 3 & (d) \quad b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = 3, b_3 = \frac{1}{7}
 \end{array}$$

8. ¿Qué condiciones deben satisfacer las  $b$  para que el sistema dado sea consistente?

$$\begin{array}{ll}
 (a) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 3x_3 = b_1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 = b_2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = b_3 \end{array} & (b) \quad \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = b_1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = b_2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = b_3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = b_4 \end{array}
 \end{array}$$

9. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- a) Demuestre que la ecuación  $AX = X$  se puede reescribir como  $(A - I)X = 0$  y aplique este resultado a fin de resolver  $AX = X$  para  $X$ .
- b) Resuelva  $AX = 4X$ .

10. Sin usar lápiz y papel, determine si las matrices siguientes son inversibles.

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

*Sugerencia.* Considere los sistemas homogéneos asociados

$$\begin{array}{ll}
 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 & 5x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\
 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 & 2x_3 - x_4 = 0 \\
 x_3 + 2x_4 = 0 & x_3 + x_4 = 0 \\
 3x_4 = 0 & 7x_4 = 0
 \end{array}$$

11. Sea  $AX = 0$  un sistema homogéneo de  $n$  ecuaciones lineales en  $n$  incógnitas que tiene únicamente la solución trivial. Demuestre que si  $k$  es cualquier entero



- positivo, entonces el sistema  $A^k X = 0$  también tiene solamente la solución trivial.
12. Sea  $AX = 0$  un sistema homogéneo de  $n$  ecuaciones lineales en  $n$  incógnitas y suponga que  $Q$  es una matriz inversible. Demuestre que  $AX = 0$  sólo tiene la solución trivial si, y sólo si,  $(QA)X = 0$  tiene únicamente la solución trivial.
  13. Demuestre que una matriz  $A$  de  $n \times n$  es inversible si, y sólo si, es posible escribirla como un producto de matrices elementales.
  14. Use el inciso (a) del teorema 12 a fin de probar el inciso (b).

**EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS**

1. Aplique la eliminación de Gauss-Jordan para despejar  $x'$  y  $y'$  en términos de  $x$  y  $y$ .

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \\ y &= \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{aligned}$$

2. Aplique la eliminación de Gauss-Jordan para despejar  $x'$  y  $y'$  en términos de  $x$  y  $y$ .

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta \\ y &= x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta \end{aligned}$$

3. Una caja que contiene monedas con las denominaciones de un centavo, cinco centavos y diez centavos tiene 13 de ellas con un valor total de 83 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay en la caja?
4. Halle los enteros positivos que satisfagan

$$\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ x + 5y + 10z &= 44 \end{aligned}$$

5. ¿Para cuál valor, o cuáles valores, de  $a$  el sistema siguiente tiene cero, una y una infinidad de soluciones?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_3 &= 2 \\ (a^2 - 4)x_3 &= a - 2 \end{aligned}$$

6. Sea

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

la matriz aumentada para un sistema lineal. ¿Para cuáles valores de  $a$  y  $b$  el sistema tiene

- a) una solución única;
- b) una solución uniparamétrica;

- c) una solución biparamétrica;  
d) ninguna solución?

7. Halle una matriz  $K$  tal que  $AKB = C$  dado que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Si  $A$  es de  $m \times n$  y  $B$  de  $n \times p$ , ¿cuántas operaciones de multiplicación y cuántas de adición se necesitan para calcular el producto de matrices  $AB$ ?
9. Sea  $A$  una matriz cuadrada.

- a) Demuestre que  $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$ , si  $A^4 = 0$ .  
b) Demuestre que  $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^n$ , si  $A^{n+1} = 0$ .

10. Halle los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  de modo que la gráfica del polinomio  $p(x) = ax^2 + bx + c$  pase por los puntos  $(1, 2)$ ,  $(-1, 6)$  y  $(2, 3)$ .
11. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.) Encuentre los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  de modo que la gráfica del polinomio  $p(x) = ax^2 + bx + c$  pase por el punto  $(-1, 0)$  y tenga una tangente horizontal en  $(2, -9)$ .
12. Pruebe que si  $A$  es una matriz de  $m \times n$  y  $B$  es la matriz de  $n \times 1$  para la cual cada uno de sus elementos es  $1/n$ , entonces

$$AB = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_m \end{bmatrix}$$

en donde  $\bar{r}_i$  es el promedio de los elementos del  $i$ -ésimo renglón de  $A$ .

13. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.) Si

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) & \cdots & c_{1n}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) & \cdots & c_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(x) & c_{m2}(x) & \cdots & c_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

en donde  $c_{ij}(x)$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces se define

$$\frac{dC}{dx} = \begin{bmatrix} c'_{11}(x) & c'_{12}(x) & \cdots & c'_{1n}(x) \\ c'_{21}(x) & c'_{22}(x) & \cdots & c'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c'_{m1}(x) & c'_{m2}(x) & \cdots & c'_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

Demuestre que, si los elementos en  $A$  y  $B$  son funciones diferenciables de  $x$  y el producto  $AB$  está definido, entonces

$$\frac{d}{dx}(AB) = \frac{dA}{dx}B + A\frac{dB}{dx}$$

# 2

## Determinantes

### 2.1 LA FUNCION DETERMINANTE

El lector ya conoce funciones como  $f(x) = \text{sen } x$  y  $f(x) = x^2$ , las cuales asocian un número real  $f(x)$  con un valor real de la variable  $x$ . Dado que tanto  $x$  como  $f(x)$  toman únicamente valores reales, se pueden describir esas funciones como funciones de valor real de una variable real. En esta sección se inicia el estudio de funciones con valor real de una variable matricial, es decir, funciones que asocian un número real  $f(X)$  con una matriz  $X$ . El objetivo principal es el estudio de una de esas funciones denominada función determinante. Lo que se haga sobre la función determinante tendrá aplicaciones importantes a la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales y también conducirá a una fórmula explícita para la inversa de una matriz inversible.

Antes de poder definir la función determinante, es necesario establecer algunos resultados referentes a las permutaciones.

**Definición.** Una *permutación* del conjunto de enteros  $\{1, 2, \dots, n\}$  es un arreglo de esos enteros en cierto orden, sin omisiones o repeticiones.

#### Ejemplo 1

Hay seis permutaciones diferentes del conjunto de enteros  $\{1, 2, 3\}$ ; éstas son

$$\begin{array}{lll} (1, 2, 3) & (2, 1, 3) & (3, 1, 2) \\ (1, 3, 2) & (2, 3, 1) & (3, 2, 1) \end{array}$$

Un método conveniente para listar en forma sistemática las permutaciones es usar un *árbol de permutaciones*. En el ejemplo siguiente se ilustra este método.

#### Ejemplo 2

Lístense todas las permutaciones del conjunto de enteros  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

**Solución.** Considérese las figura 2.1. Los cuatro puntos marcados 1, 2, 3, 4 que están en la parte superior de la figura representan las elecciones posibles para el primer número de la



permutación. Las tres ramas que emanan de estos puntos representan las elecciones posibles para la segunda posición en la permutación. Por tanto, si la permutación se inicia (2, —, —), las tres posibilidades para la segunda posición son 1, 3 y 4. Las dos ramas que emanan de cada punto en la segunda posición representan las elecciones posibles para la tercera. Así entonces, si la permutación se inicia (2, 3, —, —), las dos elecciones posibles para la tercera posición son 1 y 4. Por último, la única rama que emana de cada punto en la tercera posición representa la única elección posible para la cuarta. Por consiguiente, si la permutación se inicia (2, 3, 4, —), la única elección para la cuarta posición es 1. Ahora es posible listar las diferentes permutaciones, recorriendo todas las trayectorias posibles a través del “árbol”, desde la primera posición hasta la última. Por medio de este proceso se obtiene la siguiente lista:

- |              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| (1, 2, 3, 4) | (2, 1, 3, 4) | (3, 1, 2, 4) | (4, 1, 2, 3) |
| (1, 2, 4, 3) | (2, 1, 4, 3) | (3, 1, 4, 2) | (4, 1, 3, 2) |
| (1, 3, 2, 4) | (2, 3, 1, 4) | (3, 2, 1, 4) | (4, 2, 1, 3) |
| (1, 3, 4, 2) | (2, 3, 4, 1) | (3, 2, 4, 1) | (4, 2, 3, 1) |
| (1, 4, 2, 3) | (2, 4, 1, 3) | (3, 4, 1, 2) | (4, 3, 1, 2) |
| (1, 4, 3, 2) | (2, 4, 3, 1) | (3, 4, 2, 1) | (4, 3, 2, 1) |

Al observar este ejemplo se ve que hay 24 permutaciones de {1, 2, 3, 4}. Se pudo haber anticipado este resultado, sin listar realmente las permutaciones, por medio de la argumentación que sigue. Como es posible llenar la primera posición de cuatro maneras y, a continuación, la segunda posición de tres maneras, existen  $4 \cdot 3$  maneras para llenar las primeras dos posiciones. Ya que entonces se puede llenar la tercera posición de dos maneras, se tienen  $4 \cdot 3 \cdot 2$  maneras para llenar las tres primeras posiciones. Por último, puesto que entonces se puede llenar la última posición sólo de una manera, existen  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  maneras para llenar las cuatro posiciones. En general, el conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  tendrá  $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$  permutaciones diferentes.

Para denotar una permutación general del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , se escribirá  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ . Aquí,  $j_1$  es el primer entero de la permutación,  $j_2$  es el segundo, etc. Se dice que ocurre una **inversión** en una permutación  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ , siempre que un entero mayor precede a uno menor. Se puede obtener el número total de inversiones que ocurren en una permutación de la manera siguiente: 1) se encuentra el número de enteros que son menores que  $j_1$  y que siguen a  $j_1$  en la permutación; 2) se encuentra el número de enteros que son menores que  $j_2$  y que siguen a  $j_2$  en la permutación. Se continúa con este proceso de conteo para  $j_3, \dots, j_{n-1}$ . La suma de estos números será el número total de inversiones en la permutación.

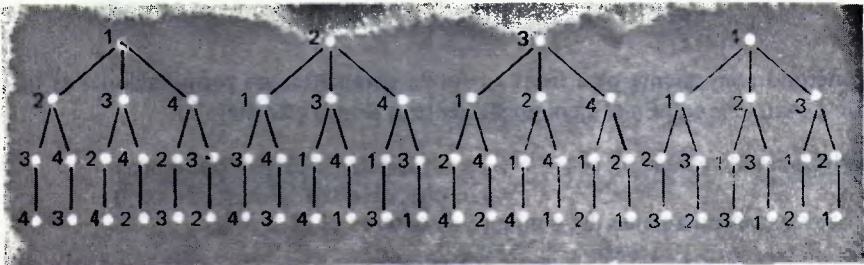


Figura 2.1

**Ejemplo 3**

Determinése el número de inversiones en las permutaciones siguientes:

- (i) (6, 1, 3, 4, 5, 2)                      (ii) (2, 4, 1, 3)                      (iii) (1, 2, 3, 4)

- (i) El número de inversiones es  $5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8$ .  
 (ii) El número de inversiones es  $1 + 2 + 0 = 3$ .  
 (iii) En esta permutación no existen inversiones.

**Definición.** Se dice que una permutación es *par*, si el número total de inversiones es un entero par, y se dice que es *impar*, si el número total de inversiones es un entero impar.

**Ejemplo 4**

En la tabla que aparece a continuación se clasifican las diversas permutaciones de  $\{1, 2, 3\}$  como pares o impares.

Permutación	Número de inversiones	Clasificación
(1, 2, 3)	0	par
(1, 3, 2)	1	impar
(2, 1, 3)	1	impar
(2, 3, 1)	2	par
(3, 1, 2)	2	par
(3, 2, 1)	3	impar

Considérese la matriz  $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por **producto elemental tomado de A** se entiende cualquier producto de  $n$  elementos tomados de  $A$ , sin que dos cualesquiera de ellos provengan del mismo renglón o la misma columna.

**Ejemplo 5**

Listense todos los productos elementales tomados de las matrices

(i)  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$                       (ii)  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

(i) Ya que cada producto elemental tiene dos factores, y como cada factor proviene de un renglón diferente, un producto elemental se puede escribir en la forma

$$a_{1-}a_{2-}$$

en donde con los guiones se designan números correspondientes a las columnas. Supuesto que ninguno de los dos factores del producto provienen de la misma columna, los números de columna deben ser 1 2 ó 2 1. Por lo tanto, los únicos productos elementales son  $a_{11}a_{22}$  y  $a_{12}a_{21}$ .

ii) Puesto que cada producto elemental tiene tres factores, cada uno de los cuales proviene de un renglón diferente, se puede escribir un producto elemental en la forma

$$a_{1-}a_{2-}a_{3-}$$

Ya que dos factores del producto no deben provenir de la misma columna, los números de columna no tienen repeticiones; como consecuencia deben formar una permutación del conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . Estas  $3! = 6$  permutaciones conducen a la siguiente lista de productos elementales:

$$\begin{array}{lll} a_{11}a_{22}a_{33} & a_{12}a_{21}a_{33} & a_{13}a_{21}a_{32} \\ a_{11}a_{23}a_{32} & a_{12}a_{23}a_{31} & a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

Como se señala en este ejemplo, una matriz  $A$  de  $n \times n$  tiene  $n!$  productos elementales. Estos son los productos de la forma  $a_{1j_1}a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ , en donde  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  es una permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Se denomina **producto elemental con signo tomado de  $A$**  a un producto elemental  $a_{1j_1}a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$  multiplicado por  $+1$  o bien,  $-1$ . Se utiliza el  $+$  si  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  es una permutación par y el  $-$  si  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  es una permutación impar.

### Ejemplo 6

Lístense todos los productos elementales con signo de las matrices:

$$(i) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(i)	Producto elemental	Permutación asociada	Par o impar	Producto elemental con signo
	$a_{11}a_{22}$	(1, 2)	par	$a_{11}a_{22}$
	$a_{12}a_{21}$	(2, 1)	impar	$-a_{12}a_{21}$



(ii)	Producto elemental	Permutación asociada	Par o impar	Producto elemental con signo
	$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	par	$a_{11}a_{22}a_{33}$
	$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	impar	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
	$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	impar	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
	$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	par	$a_{12}a_{23}a_{31}$
	$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	par	$a_{13}a_{21}a_{32}$
	$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	impar	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Ahora se tiene ya la posibilidad de definir la función determinante.

**Definición.** Sea  $A$  una matriz cuadrada. La *función determinante* se denota por  $\det$ , y se define  $\det(A)$  como la suma de todos los productos elementales con signo tomados de  $A$ .

**Ejemplo 7**

Con referencia al ejemplo 6, se obtiene

$$(i) \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$(ii) \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Es útil disponer de las dos fórmulas de este ejemplo para su uso posterior. Sin embargo, a fin de evitar la memorización de estas pesadas expresiones, se sugiere recurrir a los artificios mnemónicos que se ilustran en la figura 2.2. La primera fórmula del ejemplo 7 se obtiene a partir de la figura 2.2a, multiplicando los elementos por los que pasa la flecha que apunta hacia la derecha y restando el producto de los elementos por los que pasa la flecha que apunta hacia la izquierda. La segunda fórmula del ejemplo 7 se obtiene copiando la primera y segunda columnas como se muestran en la figura 2.2b. Entonces el determinante se calcula al sumar los productos correspondientes a las flechas que apuntan hacia la derecha y restar los productos correspondientes a las flechas que apuntan hacia la izquierda.

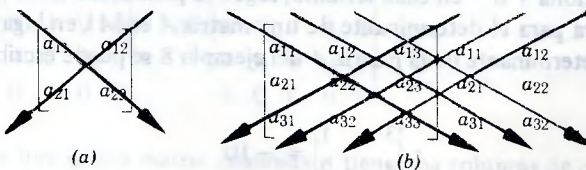


Figura 2.2

## Ejemplo 8

Evalúense los determinantes de

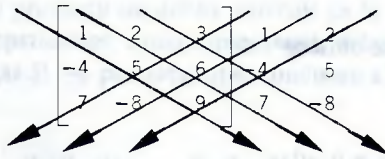
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el método de la figura 2.2a da

$$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

Al aplicar el método de la figura 2.2b da

$$\det(B) = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$$



**Observación.** Se debe hacer hincapié en que los métodos que se describen en la figura 2.2 no funcionan para determinantes de matrices de  $4 \times 4$  o mayores.

La evaluación de los determinantes directamente a partir de la definición crea dificultades de cálculo. De hecho, la evaluación directa de un determinante de  $4 \times 4$  comprendería el cálculo de  $4! = 24$  productos elementales con signo, y un determinante de  $10 \times 10$  comprendería  $10! = 3\,628\,800$  productos elementales con signo. Aun la más rápida de las computadoras digitales actuales no puede manejar el cálculo de un determinante de  $25 \times 25$  con este método, en una cantidad práctica de tiempo. Por tanto, la mayor parte del resto de este capítulo se dedica a desarrollar propiedades de los determinantes que simplificarán su evaluación.

Se concluye esta sección haciendo notar que el determinante de  $A$  a menudo se escribe simbólicamente como

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

en donde  $\Sigma$  indica que se deben sumar los términos sobre todas las permutaciones  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  y se selecciona  $+$  o  $-$  en cada término, según la permutación sea par o impar. Una notación alternativa para el determinante de una matriz  $A$  es  $|A|$ , en lugar de  $\det(A)$ . En esta notación, el determinante de la matriz  $A$  del ejemplo 8 se puede escribir

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

EJERCICIOS 2.1

1. Encuentre el número de inversiones en cada una de las siguientes permutaciones de  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

(a) (3 4 1 5 2)

(b) (4 2 5 3 1)

(c) (5 4 3 2 1)

(d) (1 2 3 4 5)

(e) (1 3 5 4 2)

(f) (2 3 5 4 1)

2. Clasifique cada una de las permutaciones del ejercicio 1 como par o impar.

En los ejercicios 3–10 evalúe el determinante.

3.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

4.  $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

5.  $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -8 & -3 \end{vmatrix}$

6.  $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 4 & k-3 \end{vmatrix}$

7.  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

8.  $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

9.  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

10.  $\begin{vmatrix} k & -3 & 9 \\ 2 & 4 & k+1 \\ 1 & k^2 & 3 \end{vmatrix}$

11. Halle todos los valores  $\lambda$  para los que  $\det(A) = 0$ .

(a)  $A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$

(b)  $A = \begin{bmatrix} \lambda - 6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$

12. Clasifique cada permutación de  $\{1, 2, 3, 4\}$  como par o impar.

13. Utilice los resultados del ejercicio 12 para construir una fórmula para el determinante de una matriz de  $4 \times 4$ .

14. Use la fórmula que se obtuvo en el ejercicio 13 para evaluar

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

15. Aplique la definición de determinante para evaluar

(a)  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(b)  $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16. Pruebe que si una matriz cuadrada  $A$  tiene una columna de ceros, entonces  $\det(A) = 0$ .



## 2.2 EVALUACION DE LOS DETERMINANTES POR REDUCCION EN LOS RENGLONES

En esta sección se muestra que hay la posibilidad de evaluar el determinante de una matriz reduciéndola a la forma escalonada en los renglones. La importancia de este método radica en el hecho de que evita los largos cálculos relacionados con la aplicación directa de la definición de determinante.

Primero se consideran dos clases de matrices cuyo determinante se puede evaluar con facilidad, sin importar el tamaño de la matriz.

**Teorema 1.** Si  $A$  es cualquier matriz cuadrada que contiene un renglón de ceros, entonces  $\det(A) = 0$ .

*Demostración.* Ya que un producto elemental con signo tomado de  $A$  contiene un factor de cada renglón de  $A$ , todo producto elemental con signo contiene un factor del renglón de ceros y, como consecuencia, tiene valor cero. Ya que  $\det(A)$  es la suma de todos los productos elementales con signos, se obtiene  $\det(A) = 0$ . ■

Se dice que una matriz cuadrada es *triangular superior* si todos los elementos que están debajo de la diagonal principal son ceros. De modo análogo, se dice que una matriz cuadrada es *triangular inferior* si todos los elementos que están arriba de la diagonal principal son ceros. Una matriz que se menciona simplemente como *triangular* puede ser superior o inferior.

### Ejemplo 9

Una matriz triangular superior general de  $4 \times 4$  tiene la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Una matriz triangular inferior general de  $4 \times 4$  tiene la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

### Ejemplo 10

Evalúese  $\det(A)$ , en donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

El único producto elemental tomado de  $A$  que puede ser diferente de cero es  $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ . Para ver esto, considérese un producto elemental típico  $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ . Supuesto que  $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$ , debe tenerse  $j_1 = 1$  para tener un producto elemental diferente de cero. Si  $j_1 = 1$ , se debe tener  $j_2 \neq 1$ , dado que dos factores cualesquiera no pueden provenir de la misma columna. Además, como  $a_{23} = a_{24} = 0$ , se ha de tener  $j_2 = 2$  para tener un producto diferente de cero. Al continuar de esta manera, se obtiene  $j_3 = 3$  y  $j_4 = 4$ . Ya que  $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$  se multiplica por  $+1$  al formar el producto elemental con signo, se obtiene

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

Es posible aplicar un argumento semejante al que acaba de presentarse, a cualquier matriz triangular, para llegar al resultado general siguiente:

**Teorema 2.** Si  $A$  es una matriz triangular de  $n \times n$ , entonces  $\det(A)$  es el producto de los elementos de la diagonal principal; es decir,  $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ .

**Ejemplo 11**

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296$$

En el teorema que sigue se muestra en qué forma una operación elemental sobre los renglones de una matriz afecta el valor de su determinante.

**Teorema 3.** Sea  $A$  cualquier matriz de  $n \times n$ .

- (a) Si  $A'$  es la matriz que se obtiene cuando un solo renglón de  $A$  se multiplica por una constante  $k$ , entonces  $\det(A') = k \det(A)$ .
- (b) Si  $A'$  es la matriz que se obtiene al intercambiar dos renglones de  $A$ , entonces  $\det(A') = -\det(A)$ .
- (c) Si  $A'$  es la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo de uno de los renglones de  $A$  a otro renglón, entonces  $\det(A') = \det(A)$ .

Se omite la demostración (véase el ejercicio 15).

## Ejemplo 12

Considérense las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si se evalúan los determinantes de estas matrices por medio del método usado en el ejemplo 8, se obtiene

$$\det(A) = -2, \quad \det(A_1) = -8, \quad \det(A_2) = 2, \quad \det(A_3) = -2$$

Obsérvese que  $A_1$  se obtiene al multiplicar el primer renglón de  $A$  por 4;  $A_2$  al intercambiar los dos primeros renglones; y  $A_3$  al sumar  $-2$  veces el tercer renglón de  $A$  al segundo. Como lo predice el teorema 3, se tienen las relaciones

$$\det(A_1) = 4 \det(A) \quad \det(A_2) = -\det(A) \quad \text{y} \quad \det(A_3) = \det(A)$$

## Ejemplo 13

La proposición (a) del teorema 3 tiene una interpretación alternativa que a veces es útil. Este resultado permite extraer un "factor común" de cualquier renglón de una matriz cuadrada hacia afuera del signo de determinante. Como ilustración, considérense las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

en donde el segundo renglón de  $B$  tiene un factor común de  $k$ . Puesto que  $B$  es la matriz que resulta al multiplicar el segundo renglón de  $A$  por  $k$ , la proposición (a) del teorema 3 afirma que  $\det(B) = k \det(A)$ ; esto es,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ahora se plantea un método alternativo para evaluar los determinantes, que evita la gran cantidad de cálculos relacionados con la aplicación directa de la definición de determinante. La idea básica de este método es aplicar las operaciones elementales sobre los



renglones, a fin de reducir la matriz dada  $A$  hacia una matriz  $R$  que esté en la forma escalonada en los renglones. Puesto que una forma escalonada en los renglones de una matriz cuadrada es triangular superior (ejercicio 14), es posible evaluar  $\det(R)$  aplicando el teorema 2. Entonces se puede obtener el valor de  $\det(A)$  al aplicar el teorema 3 para relacionar el valor desconocido de  $\det(A)$  con el conocido de  $\det(R)$ . En el ejemplo siguiente se ilustra este método.

### Ejemplo 14

Evalúese  $\det(A)$ , en donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

**Solución.** Al reducir  $A$  a la forma escalonada en los renglones y aplicar el teorema 3, se obtiene

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Se intercambian el primero y segundo renglones de  $A$ .

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Se extrajo del signo de  $\det$  un factor de 3 del primer renglón de la matriz precedente (véase el ejemplo 13).

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

Se sumó -2 veces el primer renglón de la matriz precedente al tercer renglón.

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

Se sumó -10 veces el segundo renglón de la matriz precedente al tercer renglón.

$$= (-3)(-55) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Se extrajo del signo de  $\det$  un factor común de -55, del último renglón de la matriz precedente.

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

**OBSERVACION.** El método de reducción en los renglones resulta apropiado para la evaluación de determinantes con computadora debido a que es sistemático y se programa con facilidad. Sin embargo, para cálculos a mano, a menudo son más sencillos los métodos que se desarrollan en secciones subsiguientes.

### Ejemplo 15

Evalúese  $\det(A)$ , en donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Se sumó -2 veces el  
primer renglón  
de A al segundo.

No se necesita reducir más ya que, por el teorema 1, se deduce que  $\det(A) = 0$ .

Con base en este ejemplo debe ser evidente que, siempre que una matriz cuadrada tenga dos renglones proporcionales (como el primero y segundo renglones de  $A$ ), es posible introducir un renglón de ceros al sumar un múltiplo apropiado de uno de estos renglones al otro. Por consiguiente, *si una matriz cuadrada tiene dos renglones proporcionales, su determinante es cero*.

### Ejemplo 16

Cada una de las matrices siguientes tiene dos renglones proporcionales; por tanto, por simple observación se concluye que cada una tiene un determinante cero.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

### EJERCICIOS 2.2

1. Evalúe por observación los siguientes determinantes:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & -40 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

En los ejercicios 2 al 9, evalúe los determinantes de las matrices dadas, reduciéndolas a una forma escalonada en los renglones.

$$2. \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

5. 
$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

6. 
$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

7. 
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

8. 
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

9. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Suponga que 
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 5$$
. Encuentre

(a) 
$$\det \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

(b) 
$$\det \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix}$$

(c) 
$$\det \begin{bmatrix} a+d & h+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

(d) 
$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}$$

11. Aplique la reducción en los renglones para demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

12. Aplique un argumento como el que se da en el ejemplo 10 para demostrar que

(a) 
$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$$

(b) 
$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

13. Pruebe que el teorema 1 es verdadero cuando se reemplaza la palabra "renglón" por "columna".



14. Pruebe que una forma escalonada en los renglones de una matriz cuadrada es triangular superior.
15. Pruebe los siguientes casos especiales del teorema 3.

$$(a) \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

### 2.3 PROPIEDADES DE LA FUNCION DETERMINANTE

En esta sección se desarrollan algunas de las propiedades fundamentales de la función determinante. Lo que aquí se haga proporcionará alguna perspectiva adicional respecto a la relación entre una matriz cuadrada y su determinante. Una de las consecuencias inmediatas de este material será una importante prueba con un determinante en relación con la inversibilidad de una matriz.

Si  $A$  es cualquier matriz  $m \times n$ , entonces la *transpuesta de  $A$*  se denota por  $A^t$  y se define como la matriz de  $n \times m$  cuya primera columna es el primer renglón de  $A$ , su segunda columna es el segundo renglón de  $A$ , su tercera columna es el tercer renglón de  $A$ , etc.

#### Ejemplo 17

Las transpuestas de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 3 \quad 5]$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

son

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$D^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que los tamaños de las matrices son tales que se pueden efectuar las operaciones, la operación transpuesta tiene las propiedades que siguen (véase el ejercicio 13):

#### Propiedades de la operación transpuesta.

- (i)  $(A^t)^t = A$
- (ii)  $(A + B)^t = A^t + B^t$
- (iii)  $(kA)^t = kA^t$ , en donde  $k$  es cualquier escalar
- (iv)  $(AB)^t = B^t A^t$

Recuérdese que el determinante de una matriz  $A$  de  $n \times n$  se define como la suma de todos los productos elementales con signo tomados de  $A$ . Puesto que un producto elemental tiene un factor tomado de cada renglón y uno tomado de cada columna, es obvio que  $A$  y  $A^t$  tienen precisamente el mismo conjunto de productos elementales. Aun cuando se omiten los detalles, se puede demostrar que  $A$  y  $A^t$  tienen en realidad los mismos productos elementales *con signo*; esto conduce al teorema que sigue:

**Teorema 4.** Si  $A$  es cualquier matriz cuadrada, entonces  $\det(A) = \det(A^t)$ .

En virtud de este resultado, casi todo teorema acerca de los determinantes que contiene la palabra "renglón" en su enunciado, también es verdadero cuando se sustituye la palabra "renglón" por "columna". A fin de probar una proposición relacionada con las columnas, sólo se necesita transponer la matriz en cuestión para convertir la proposición acerca de las columnas en una referente a los renglones, y a continuación aplicar el resultado conocido correspondiente, respecto a los renglones. Para ilustrar la idea, supóngase que se desea probar que el intercambio de dos columnas de una matriz cuadrada  $A$  cambia el signo de  $\det(A)$ . Se puede proceder como sigue: Sea  $A'$  la matriz que se obtiene al intercambiar la columna  $r$  y la columna  $s$  de  $A$ . Por tanto  $(A')^t$  es la matriz que se obtiene al intercambiar el renglón  $r$  y el renglón  $s$  de  $A^t$ . Por tanto,

$$\det(A') = \det(A'^t) \quad (\text{Teorema 4})$$

$$= -\det(A^t) \quad (\text{Teorema 3b})$$

$$= -\det(A) \quad (\text{Teorema 4})$$

lo que prueba el resultado

Los ejemplos que siguen ilustran varios hechos respecto a los determinantes que dependen de propiedades relacionadas con las columnas de la matriz.

### Ejemplo 18

Por observación, la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

tiene un determinante, cero, puesto que la primera y segunda columnas son proporcionales.

### Ejemplo 19

Calcúlese el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Se podría calcular este determinante como antes, mediante la aplicación de operaciones elementales sobre los renglones para reducir  $A$  a una forma escalonada en los renglones. Por otra parte, se puede poner  $A$  en la forma triangular inferior en un paso, sumando  $-3$  veces la primera columna a la cuarta, para obtener

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

Este ejemplo señala que siempre conviene no perder de vista las operaciones sobre las columnas que puedan acortar los cálculos.

Supóngase que  $A$  y  $B$  son matrices de  $n \times n$  y que  $k$  es cualquier escalar. Ahora se consideran las relaciones posibles entre  $\det(A)$ ,  $\det(B)$ , y

$$\det(kA), \quad \det(A + B), \quad \text{y} \quad \det(AB)$$

Ya que es posible extraer del signo  $\det$  un factor común de cualquier renglón de una matriz y supuesto que cada uno de los  $n$  renglones de  $kA$  tiene un factor común de  $k$ , se obtiene

$$\det(kA) = k^n \det(A) \quad (2.1)$$



## Ejemplo 20

Considérese las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad 5A = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$$

Por cálculo directo  $\det(A) = 4$  y  $\det(5A) = 100$ . Esto concuerda con la relación (2.1), la cual afirma que  $\det(5A) = 5^2 \det(A)$ .

Desafortunadamente, en general, no existe relación simple entre  $\det(A)$ ,  $\det(B)$  y  $\det(A+B)$ . En particular, es necesario hacer notar que, por lo común,  $\det(A+B)$  no es igual a  $\det(A) + \det(B)$ . El ejemplo siguiente ilustra este hecho.

## Ejemplo 21

Considérese las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad A+B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Se tiene  $\det(A) = 1$ ,  $\det(B) = 8$  y  $\det(A+B) = 23$ ; por tanto,  $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ .

A pesar de este resultado negativo, hay una importante relación referente a las sumas de determinantes que con frecuencia resulta útil. Como ilustración, considérense dos matrices de  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}$$

que difieren únicamente en el segundo renglón. Con base en la fórmula del ejemplo 7, se obtiene

$$\begin{aligned} \det(A) + \det(A') &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}a'_{22} - a_{12}a'_{21}) \\ &= a_{11}(a_{22} + a'_{22}) - a_{12}(a_{21} + a'_{21}) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} \end{bmatrix}$$

Este ejemplo es un caso especial de resultado general que sigue:

Supóngase que  $A$ ,  $A'$  y  $A''$  son matrices de  $n \times n$  que difieren únicamente en un solo renglón, por ejemplo, el  $r$ -ésimo, y que es posible obtener el  $r$ -ésimo renglón de  $A''$  al sumar los elementos correspondientes de los  $r$ -ésimos renglones de  $A$  y  $A'$ . Entonces

$$\det(A'') = \det(A) + \det(A')$$

Se cumple un resultado semejante para las columnas.

### Ejemplo 22

Evaluando los determinantes, el lector puede verificar que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Teorema 5.** Si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

La elegante sencillez de este resultado, comparada con la compleja naturaleza tanto de la multiplicación matricial como de la definición de determinante, es interesante y sorprendente. Se omite la demostración.

### Ejemplo 23

Considérense las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Si tiene  $\det(A)\det(B) = (1)(-23) = -23$ . Por otra parte, el cálculo directo muestra que  $\det(AB) = -23$ , de modo que  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

En el teorema 13 del capítulo 1, se dieron tres proposiciones importantes que son equivalentes a la inversibilidad de una matriz. El ejemplo siguiente ayuda a agregar otro resultado a esa lista.

### Ejemplo 24

El propósito de este ejemplo es demostrar que, si la forma escalonada en los renglones reducida  $R$  de una matriz cuadrada no tiene renglones que consten completamente de ceros, entonces  $R$  debe ser la matriz identidad. Se puede ilustrar este hecho considerando la matriz de  $n \times n$  que sigue

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

En esta matriz, el último renglón puede constar o no completamente de ceros. Si no consta completamente de ceros, la matriz no contiene renglones cero y, como consecuencia, cada uno de los  $n$  renglones tiene un elemento principal de 1. Puesto que estos 1 principales se presentan progresivamente cada vez más hacia la derecha, a medida que se recorre la matriz hacia abajo, cada uno de estos 1 debe estar en la diagonal principal. Ya que los otros elementos de la misma columna en el que se encuentra uno de estos 1 son cero,  $R$  debe ser  $I$ . Por tanto,  $R$  tiene un renglón de ceros, o bien,  $R = I$ .

**Teorema 6.** Una matriz cuadrada  $A$  es inversible si y sólo si  $\det(A) \neq 0$ .

*Demostración.* Si  $A$  es inversible, entonces  $I = AA^{-1}$  de modo que  $1 = \det(I) = \det(A) \det(A^{-1})$ . Por tanto,  $\det(A) \neq 0$ . Inversamente, supóngase que  $\det(A) \neq 0$ . Se demostrará que  $A$  es equivalente respecto a los renglones de  $I$ , y, por consiguiente, se concluirá con base en el teorema 10 del capítulo 1, que  $A$  es inversible. Sea  $R$  la forma escalonada en los renglones reducida de  $A$ . Debido a que  $R$  se puede obtener a partir de  $A$  por medio de una sucesión finita de operaciones elementales sobre los renglones, es posible encontrar las matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_k$  tales que  $E_k \cdots E_2 E_1 A = R$ , o bien,  $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} R$ .

Por tanto,

$$\det(A) = \det(E_1^{-1}) \det(E_2^{-1}) \cdots \det(E_k^{-1}) \det(R)$$

Ya que se está suponiendo que  $\det(A) \neq 0$ , con base en esta ecuación se deduce que  $\det(R) \neq 0$ . Por consiguiente,  $R$  no tiene renglones cero, de modo que  $R = I$  (véase el ejemplo 24). ■

**Corolario.** Si  $A$  es inversible, entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

*Demostración.* Ya que  $A^{-1} A = I$ ,  $\det(A^{-1} A) = \det(I)$ ; es decir,  $\det(A^{-1}) \det(A) = 1$ . Supuesto que  $\det(A) \neq 0$ , se puede completar la demostración al dividir todo entre  $\det(A)$ . ■

### Ejemplo 25

Dado que el primero y tercer renglones de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

son proporcionales,  $\det(A) = 0$ . Por tanto,  $A$  no es inversible.



## EJERCICIOS 2.3

1. Encuentre las transpuestas de

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -8 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (c) [7 \ 0 \ 2] \quad (d) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

2. Verifique el teorema 4 para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Verifique que  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$  cuando

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Aplique el teorema 6 para determinar cuáles de las matrices siguientes son invertibles.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Suponga que  $\det(A) = 5$ , en donde

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Encuentre

$$(a) \det(3A) \quad (b) \det(2A^{-1}) \quad (c) \det((2A)^{-1}) \quad (d) \det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$$

6. Sin evaluar directamente, demuestre que  $x = 0$  y  $x = 2$  satisfacen

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

7. Sin evaluar directamente, demuestre que

$$\det \begin{bmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

8. ¿Para cuál valor, o cuáles valores de  $k$ ,  $A$  no es inversible?

$$(a) A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Suponga que  $A$  y  $B$  son matrices de  $n \times n$ . Demuestre que si  $A$  es inversible, entonces  $\det(B) = \det(A^{-1}BA)$ .
10. (a) Encuentre una matriz  $A$  de  $3 \times 3$  diferente de cero tal que  $A = A^t$ .  
(b) Halle una matriz  $A$  de  $3 \times 3$  diferente de cero tal que  $A = -A^t$ .
11. Sea  $a_{ij}$  el elemento que está en el  $i$ -ésimo renglón y  $j$ -ésima columna de  $A$ .  
¿En cuál renglón y cuál columna de  $A^t$  aparecerá  $a_{ij}$ ?
12. Sea  $AX = 0$  un sistema de  $n$  ecuaciones lineales en  $n$  incógnitas. Demuestre que el sistema tiene una solución no trivial si y sólo si  $\det(A) = 0$ .

13. Sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Demuestre que

$$(a) (A^t)^t = A \quad (b) (A+B)^t = A^t + B^t \quad (c) (AB)^t = B^t A^t \quad (d) (kA)^t = kA^t$$

14. Pruebe que  $(A^t B^t)^t = BA$ .

15. Se dice que una matriz cuadrada  $A$  es *simétrica* si  $A^t = A$  y *antisimétrica* si  $A^t = -A$ . Demuestre que si  $B$  es una matriz cuadrada, entonces

$$(a) BB^t \text{ y } B + B^t \text{ son simétricas} \quad (b) B - B^t \text{ es antisimétrica}$$

## 2.4 DESARROLLO POR COFACTORES; REGLA DE CRAMER

En esta sección se considera un método para evaluar determinantes que resulta útil para cálculos a mano y tiene gran importancia teórica. Como consecuencia de lo que se haga aquí, se obtendrá una fórmula para la inversa de una matriz inversible así como otra para la solución de ciertos sistemas de ecuaciones lineales, en términos de determinantes.

**Definición.** Si  $A$  es una matriz cuadrada, entonces el **menor del elemento**  $a_{ij}$  se denota por  $M_{ij}$  y se define como el determinante de la submatriz que se deja después de eliminar de  $A$  el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna. El número  $(-1)^{i+j} M_{ij}$  se denota por  $C_{ij}$  y se conoce como **cofactor del elemento**  $a_{ij}$ .

### Ejemplo 26

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

El menor del elemento  $a_{11}$  es

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

El cofactor de  $a_{11}$  es

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

Análogamente, el menor del elemento  $a_{32}$  es

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

El cofactor de  $a_{32}$  es

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

Nótese que el cofactor y el menor de un elemento  $a_{ij}$  difieren únicamente en el signo, es decir,  $C_{ij} = \pm M_{ij}$ . Una manera rápida de determinar si se usa el +, o bien, - es aplicar el hecho de que el signo que relaciona  $C_{ij}$  con  $M_{ij}$  está en el  $i$ -ésimo renglón y  $j$ -ésima columna del arreglo

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Por ejemplo,  $C_{11} = M_{11}$ ,  $C_{21} = -M_{21}$ ,  $C_{12} = -M_{12}$ ,  $C_{22} = M_{22}$ , etc.



Considérese la matriz general de  $3 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

En el ejemplo 7 se demostró que

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (2.2)$$

lo cual se puede volver a escribir como

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

Ya que las expresiones que están dentro de los paréntesis son precisamente los cofactores  $C_{11}$ ,  $C_{21}$  y  $C_{31}$  (verifíquese) se tiene

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \quad (2.3)$$

En la ecuación (2.3) se muestra que es posible calcular el determinante de  $A$  multiplicando los elementos que están en la primera columna de  $A$  por sus cofactores y sumando los productos que resultan. Este método para evaluar  $\det(A)$  se conoce como *desarrollo por cofactores* a lo largo de la primera columna de  $A$ .

### Ejemplo 27

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Evalúese  $\det(A)$  aplicando el desarrollo por cofactores a lo largo de la primera columna de  $A$ .

*Solución.* Con base en (2.3),

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1 \end{aligned}$$

Al reacomodar los términos dados en (2.2) de diversas maneras, es posible obtener otras fórmulas como la (2.3). No debe ser difícil verificar que todas las fórmulas siguientes son correctas (véase el ejercicio 23):

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\
 &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\
 &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\
 &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\
 &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\
 &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nótese que, en cada ecuación, todos los elementos y cofactores provienen del mismo renglón o columna. Estas ecuaciones se conocen como los *desarrollos por cofactores* de  $\det(A)$ .

Los resultados que se acaban de dar para las matrices de  $3 \times 3$  forman un caso especial del teorema general siguiente, el cual se enuncia sin demostración.

**Teorema 7.** *Se puede calcular el determinante de una matriz  $A$  de  $n \times n$  multiplicando los elementos de cualquier renglón (o columna) por sus cofactores y sumando los productos que resulten; es decir, para cada  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq n$ ,*

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la  $j$ -ésima columna)

y

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo del  $i$ -ésimo renglón)

### Ejemplo 28

Sea  $A$  la matriz del ejemplo 27. Evalúese  $\det(A)$  por medio de su desarrollo por cofactores a lo largo del primer renglón.

*Solución.*

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\
 &= 3(-4) - (1)(-11) = -1
 \end{aligned}$$

Esto concuerda con el resultado obtenido en el ejemplo 27.

**OBSERVACION.** En este ejemplo resultó innecesario calcular el último cofactor, puesto que quedó multiplicado por cero. En general, la mejor estrategia para evaluar un determinante por medio del desarrollo por cofactores es llevándolo a cabo a lo largo de un renglón o columna que tenga el mayor número de ceros.

A veces se puede aplicar el desarrollo por cofactores combinado con operaciones sobre los renglones o columnas, para suministrar un método efectivo con el cual evaluar los determinantes. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

## Ejemplo 29

Evalúese  $\det(A)$ , en donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

**Solución.** Al sumar múltiplos apropiados del segundo renglón a los renglones restantes, se obtiene

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollo por cofactores a lo largo de la primera columna

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Se sumó el primer renglón a la tercera columna.

$$= -(-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Desarrollo por cofactores a lo largo de la primera columna

$$= -18$$

En un desarrollo por cofactores se calcula  $\det(A)$  al multiplicar los elementos de un renglón o columna por sus cofactores y sumar los productos resultantes. Resulta que si se multiplican los elementos de cualquier renglón por los factores correspondientes de un renglón *diferente*, la suma de estos productos siempre es cero. (También se cumple este resultado para las columnas). Aun cuando se omite la demostración general, en el ejemplo que sigue se ilustra la idea de la demostración en un caso especial.

## Ejemplo 30

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Considérese la cantidad

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33}$$



que se forma al multiplicar los elementos del primer renglón por los cofactores de los elementos correspondientes del tercer renglón y sumar los productos resultantes. Ahora se demuestra que esta cantidad es igual a cero por medio del siguiente artificio. Constrúyase una nueva matriz  $A'$  reemplazando el tercer renglón de  $A$  con otra copia del primer renglón. Así entonces,

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Sean  $C'_{31}$ ,  $C'_{32}$  y  $C'_{33}$  los cofactores de los elementos que están en el tercer renglón de  $A'$ . Dado que los dos primeros renglones de  $A$  y  $A'$  son los mismos, y ya que el cálculo de  $C_{31}$ ,  $C_{32}$ ,  $C_{33}$ ,  $C'_{31}$ ,  $C'_{32}$  y  $C'_{33}$  sólo comprende elementos de los dos primeros renglones de  $A$  y  $A'$  se deduce que

$$C_{31} = C'_{31}, \quad C_{32} = C'_{32}, \quad C_{33} = C'_{33}$$

Puesto que  $A'$  tiene dos renglones idénticos,

$$\det(A') = 0 \quad (2.5)$$

Por otra parte, la evaluación de  $\det(A')$  mediante el desarrollo por cofactores a lo largo del tercer renglón da

$$\begin{aligned} \det(A') &= a_{11}C'_{31} + a_{12}C'_{32} + a_{13}C'_{33} \\ &= a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por lo expresado en (2.5) y (2.6) se obtiene

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = 0$$

**Definición.** Si  $A$  es una matriz cualquiera de  $n \times n$  y  $C_{ij}$  es el cofactor de  $a_{ij}$ , entonces la matriz

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

se conoce como *matriz de cofactores tomados de  $A$* . La traspuesta de esta matriz se denomina *adjunta de  $A$*  y se denota por  $\text{adj}(A)$ .

### Ejemplo 31

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Los cofactores de  $A$  son

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 12 & C_{12} = 6 & C_{13} = -16 \\ C_{21} = 4 & C_{22} = 2 & C_{23} = 16 \\ C_{31} = 12 & C_{32} = -10 & C_{33} = 16 \end{array}$$

de modo que la matriz de los cofactores es

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

y la adjunta de  $A$  es

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Ahora se cuenta con los elementos para establecer una fórmula para la inversa de una matriz invertible.

**Teorema 8.** Si  $A$  es una matriz invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

*Demostración.* Se demostrará primero que

$$A \text{adj}(A) = \det(A)I$$

Considérese el producto

$$A \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

El elemento del  $i$ -ésimo renglón y  $j$ -ésima columna de  $A \text{adj}(A)$  es

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} \quad (2.7)$$

(véanse las líneas sombreadas arriba).

Si  $i = j$ , entonces (2.7) es el desarrollo por cofactores de  $\det(A)$  a lo largo del  $i$ -ésimo renglón de  $A$  (teorema 7). Por otra parte, si  $i \neq j$ , entonces los  $a$  y los cofactores provienen de renglones diferentes de  $A$ , por tanto el valor de (2.7) es cero. Por tanto,

$$A \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I \quad (2.8)$$

Supuesto que  $A$  es invertible,  $\det(A) \neq 0$ . Por consiguiente, es posible volver a escribir la ecuación (2.8) como

$$\frac{1}{\det(A)} [A \operatorname{adj}(A)] = I$$

o bien,

$$A \left[ \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right] = I$$

Al multiplicar por la izquierda los dos miembros por  $A^{-1}$  da

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \quad \blacksquare \quad (2.9)$$

### Ejemplo 32

Usese (2.9) a fin de encontrar la inversa de la matriz  $A$  del ejemplo 31.

**Solución.** El lector puede comprobar que  $\det(A) = 64$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se observa que para matrices mayores que las de  $3 \times 3$ , el método de inversión de matrices que se da en este ejemplo es, desde el punto de vista del cálculo, inferior a la técnica dada en la sección 1.6. Por otro lado, el método de inversión de la sección 1.6 sólo es un procedimiento de cálculo, o algoritmo, para calcular  $A^{-1}$  y no resulta muy útil para estudiar las propiedades de la inversa. A menudo es posible utilizar la fórmula (2.9) a fin de obtener propiedades de la inversa, sin calcularla realmente (ejercicio 20).



Asimismo, con frecuencia resulta útil tener una fórmula para la solución de un sistema de ecuaciones que se pueda utilizar para estudiar las propiedades de la solución, sin resolver el sistema. El teorema que sigue establece esa fórmula para los sistemas de  $n$  ecuaciones en  $n$  incógnitas. La fórmula se conoce como *regla de Cramer*.

**Teorema 9. (Regla de Cramer).** Si  $AX = B$  es un sistema de  $n$  ecuaciones lineales en  $n$  incógnitas tal que  $\det(A) \neq 0$ , entonces el sistema tiene una solución única. Esta solución es

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

en donde  $A_j$  es la matriz que se obtiene al reemplazar los elementos de la  $j$ -ésima columna de  $A$  por los elementos de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

*Demostración.* Si  $\det(A) \neq 0$ , entonces  $A$  es inversible y, por el teorema 11 de la sección 1.7  $X = A^{-1}B$  es la solución única de  $AX = B$ . Por consiguiente, por el teorema 8 se tiene

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)B = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Al multiplicar las matrices da

$$X = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \cdots + b_n C_{n1} \\ b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \cdots + b_n C_{n2} \\ \vdots \\ b_1 C_{1n} + b_2 C_{2n} + \cdots + b_n C_{nn} \end{bmatrix}$$

Por tanto, el elemento del  $j$ -ésimo renglón de  $X$  es'

$$x_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}}{\det(A)} \quad (2.10)$$

Ahora, sea

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dado que  $A_j$  difiere de  $A$  únicamente en la  $j$ -ésima columna, los cofactores de los elementos  $b_1, b_2, \dots, b_n$  de  $A_j$  son iguales a los cofactores de los elementos correspondientes que están en la  $j$ -ésima columna de  $A$ . Como consecuencia, el desarrollo por cofactores de  $\det(A_j)$  a lo largo de la  $j$ -ésima columna es

$$\det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \dots + b_n C_{nj}$$

Al sustituir este resultado en (2.10) se obtiene

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

### Ejemplo 33

Aplíquese la regla de Cramer para resolver

$$\begin{aligned} x_1 + \quad \quad + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

*Solución.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

Para resolver un sistema de  $n$  ecuaciones en  $n$  incógnitas por la regla de Cramer, se necesita evaluar  $n + 1$  determinantes de matrices de  $n \times n$ . Desde el punto de vista del cálculo, para sistemas con más de tres ecuaciones, la eliminación gaussiana resulta superior, puesto que sólo se ha de reducir una matriz aumentada de  $n \times n + 1$ . Sin embargo, la regla de Cramer da una fórmula para la solución.

## EJERCICIOS 2.4

1. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- (a) Encuentre todos los menores.  
 (b) Halle todos los cofactores.

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

Halle

- (a)  $M_{13}$  y  $C_{13}$       (b)  $M_{23}$  y  $C_{23}$       (c)  $M_{22}$  y  $C_{22}$       (d)  $M_{21}$  y  $C_{21}$

3. Evalúe el determinante de la matriz del ejercicio 1 por medio de un desarrollo por cofactores a lo largo de

- (a) el primer renglón      (b) la primera columna      (c) el segundo renglón  
 (d) la segunda columna      (e) el tercer renglón      (f) la tercera columna

4. Para la matriz del ejercicio 1, halle

- (a)  $\text{adj}(A)$       (b)  $A^{-1}$  aplicando el método del ejemplo 32.

En los ejercicios 5 al 10 evalúe  $\det(A)$  por medio de un desarrollo por cofactores a lo largo de cualquier renglón o columna que se elija.

$$5. A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k \\ k^2 & k^2 & k^2 \end{bmatrix}$$

$$8. A = \begin{bmatrix} k-1 & 2 & 3 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 3 & 4 & k-4 \end{bmatrix}$$

$$9. A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 14 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$10. A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$



11. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Evalúe  $A^{-1}$  aplicando el método del ejemplo 32.  
 (b) Evalúe  $A^{-1}$  aplicando el método del ejemplo 29 de la sección 1.6.  
 (c) ¿Cuál de los dos métodos implica menos cálculos?

En los ejercicios 12 al 17 resuelva por medio de la regla de Cramer, cuando sea factible aplicarla.

12.  $3x_1 - 4x_2 = -5$

$2x_1 + x_2 = 4$

13.  $4x + 5y = 2$

$11x + y + 2z = 3$

$x + 5y + 2z = 1$

14.  $x + y - 2z = 1$

$2x - y + z = 2$

$x - 2y - 4z = -4$

15.  $x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$

$2x_1 - x_2 = -2$

$4x_1 - 3x_3 = 0$

16.  $2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -32$

$7x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 = 14$

$3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 11$

$x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4$

17.  $2x_1 - x_2 + x_3 = 8$

$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 7$

$6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 15$

18. Aplique la regla de Cramer a fin de despejar  $z$ , sin despejar  $x$ ,  $y$  y  $w$ .

$4x + y + z + w = 6$

$3x + 7y - z + w = 1$

$7x + 3y - 5z + 8w = -3$

$x + y + z + 2w = 3$

19. Sea  $AX = B$  el sistema del ejercicio 18.

- (a) Resuélvalo por medio de la regla de Cramer.  
 (b) Resuélvalo por medio de la eliminación de Gauss-Jordan.  
 (c) ¿Con cuál de los dos métodos se realizan menos cálculos?

20. Pruebe que si  $\det(A) = 1$  y todos los elementos de  $A$  son enteros, entonces todos los elementos de  $A^{-1}$  son enteros.

21. Sea  $AX = B$  un sistema de  $n$  ecuaciones lineales en  $n$  incógnitas con coeficientes enteros y constantes enteras. Pruebe que si  $\det(A) = 1$ , entonces la solución  $X$  tiene elementos enteros.

22. Pruebe que si  $A$  es una matriz triangular superior invertible, entonces  $A^{-1}$  es triangular superior.

23. Deduzca el primero y último desarrollos por cofactores de la lista dada en (2.4).

24. Pruebe que la ecuación de la recta que pasa por los puntos distintos  $(a_1, b_1)$  y  $(a_2, b_2)$  se puede escribir como

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

25. Pruebe que  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$  son colineales si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

26. Pruebe que la ecuación del plano que pasa por los puntos no colineales  $(a_1, b_1, c_1)$ ,  $(a_2, b_2, c_2)$  y  $(a_3, b_3, c_3)$  se puede escribir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

### EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

1. Aplique la regla de Cramer para despejar  $x'$  y  $y'$  en términos de  $x$  y  $y$ .

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \\ y &= \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{aligned}$$

2. Aplique la regla de Cramer para despejar  $x'$  y  $y'$  en términos de  $x$  y  $y$ .

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned}$$

3. Mediante el examen del determinante de la matriz de los coeficientes, demuestre que el sistema que sigue tiene una solución no trivial si y sólo si  $\alpha = \beta$ .

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 0 \\ x + y + \beta z &= 0 \\ \alpha x + \beta y + z &= 0 \end{aligned}$$

4. Demuestre que si una matriz cuadrada  $A$  satisface

$$A^3 + 4A^2 - 2A + 7I = 0$$

entonces  $A^t$  también satisface la misma relación.

5. (a) Para el triángulo que se da abajo, aplique la trigonometría a fin de demostrar que

$$b \cos \gamma + c \cos \beta = a$$

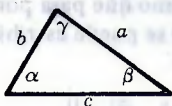
$$c \cos \alpha + a \cos \gamma = b$$

$$a \cos \beta + b \cos \alpha = c$$

y, a continuación, aplique la regla de Cramer para demostrar que

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

- (b) Use la regla de Cramer para obtener fórmulas semejantes para  $\cos \beta$  y  $\cos \gamma$ .



6. Use determinantes para demostrar que, para todos los valores reales de  $\gamma$ , la única solución de

$$x - 2y = \lambda x$$

$$x - y = \lambda y$$

es  $x = 0, y = 0$ .

7. Pruebe que si  $A$  es inversible, entonces  $\text{adj}(A)$  es inversible y

$$[\text{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A = \text{adj}(A^{-1})$$

8. Pruebe que si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces

$$\det[\text{adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}$$

9. (Para los lectores que hayan estudiado cálculo). Demuestre que si  $f_1(x), f_2(x), g_1(x)$  y  $g_2(x)$  son funciones diferenciables, y si

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}$$

entonces

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}$$

10. (a) En la figura que se da al final, el área del triángulo  $ABC$  se puede expresar como

$$\text{área } ABC = \text{área } ADEC + \text{área } CEFB - \text{área } ADFB$$

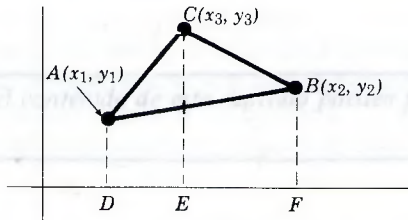


Aplique esto y el hecho de que el área de un trapecio es igual a  $1/2$  de la altura multiplicada por la suma de los lados paralelos, para demostrar que

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

[Nota. En la deducción de esta fórmula, se nombran los vértices de manera que el triángulo se recorra en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, yendo de  $(x_1, y_1)$  a  $(x_2, y_2)$  y a  $(x_3, y_3)$ . Si el recorrido se hace en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, el determinante que se obtiene conduce al *negativo* del área.]

- (b) Aplique el resultado obtenido en el inciso (a) para hallar el área del triángulo con vértices  $(3, 3)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(-2, -1)$ .



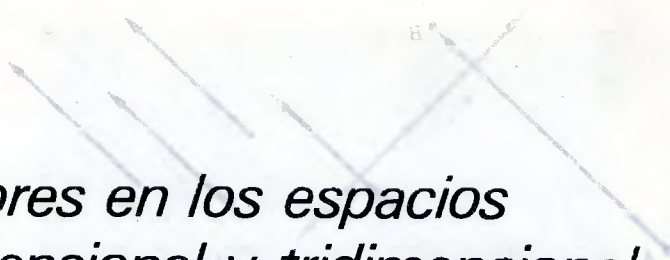
### 3.1 INTRODUCCION A LOS VECTORES (GEOMETRICOS)

En esta sección se presentan geoméricamente los vectores en los espacios bidimensional (espacio 2) y tridimensional (espacio 3). Se definen las operaciones aritméticas sobre los vectores y se establecen algunas propiedades básicas de estas operaciones.

Muchas cantidades físicas, como área, longitud y masa, se definen completamente una vez que se da un número real que representa la magnitud de la misma. Otras cantidades físicas, denominadas vectores, no quedan determinadas por completo hasta que se especifica una magnitud y una dirección.\* Fuerza, desplazamiento y velocidad son ejemplos de vectores.

Los vectores se pueden representar geoméricamente como segmentos rectilíneos dirigidos, o flechas, en los espacios bidimensional y tridimensional; la dirección de la flecha especifica la dirección del vector y la longitud de la misma describe su magnitud. La cola de la flecha se llama *punto inicial* del vector y su punta es el *punto terminal*. Los vectores se denotarán por medio de letras minúsculas negritas como  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{x}$ . Al analizar los vectores, los números se mencionarán como escalares. Todos los escalares que se usen en este libro serán números reales y se denotarán por medio de letras minúsculas cursivas como  $a$ ,  $b$ ,  $k$ ,  $w$  y  $x$ .

\*En algunos libros en español sobre el tema se señala que un vector queda determinado al dar su magnitud, dirección y sentido, considerando la palabra *dirección* sólo con el significado de recta que contiene al vector; en otros, como, cuando se usen palabras como *dirección* y *sense*, en este libro se traduce la palabra *dirección* únicamente por *dirección*, dejando el significado —como en el texto en inglés, lo cual también es correcto en español— tanto de esta que contiene al vector como de sentido que se tiene sobre la misma. (N. de T.)



# 3

## Vectores en los espacios bidimensional y tridimensional

---

Los lectores que conozcan el contenido de este capítulo pueden pasar al capítulo 4, sin pérdida de continuidad.

---

### 3.1 INTRODUCCION A LOS VECTORES (GEOMETRICOS)

En esta sección se presentan geoméricamente los vectores en los espacios bidimensional (espacio 2) y tridimensional (espacio 3). Se definen las operaciones aritméticas sobre los vectores y se establecen algunas propiedades básicas de estas operaciones.

Muchas cantidades físicas, como área, longitud y masa, se definen completamente una vez que se da un número real que representa la magnitud de la misma. Otras cantidades físicas, denominadas *vectores*, no quedan determinadas por completo hasta que se especifican una magnitud y una dirección.\* Fuerza, desplazamiento y velocidad son ejemplos de vectores.

Los vectores se pueden representar geoméricamente como segmentos rectilíneos dirigidos, o flechas, en los espacios bidimensional y tridimensional; la dirección de la flecha especifica la dirección del vector y la longitud de la misma describe su magnitud. La cola de la flecha se llama *punto inicial* del vector y su punta es el *punto terminal*. Los vectores se denotarán por medio de letras minúsculas negritas como  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{x}$ . Al analizar los vectores, los números se mencionarán como *escalares*. Todos los escalares que se usen en este libro serán números reales y se denotarán por medio de letras minúsculas cursivas como  $a$ ,  $k$ ,  $v$ ,  $w$  y  $x$ .

---

\*En muchos libros en español sobre el tema se señala que un vector queda determinado al dar su magnitud, dirección y *sentido*; considerando la palabra *dirección* sólo con el significado de recta que contiene al vector; tal práctica, en no pocos casos, conduce a textos confusos. En este libro se traduce la palabra *direction* simplemente por *dirección*, dándole el significado —como en el texto en inglés, lo cual también es correcto en español— tanto de recta que contiene el vector como de *sentido* que se toma sobre la misma. (N. del T.)

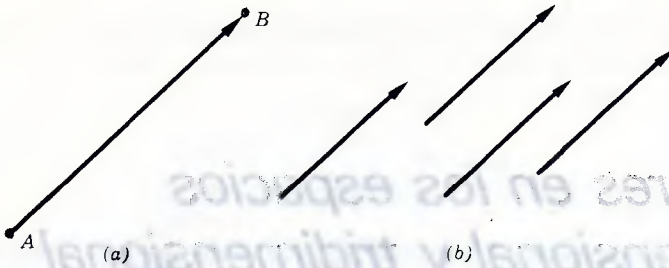


Figura 3.1 a) El vector  $\overline{AB}$ . b) Vectores equivalentes.

Si, como en la figura 3.1a, el punto inicial de un vector  $v$  es  $A$ , y el punto terminal es  $B$ , se escribe

$$v = \overline{AB}$$

Los vectores con la misma longitud y la misma dirección, como los de la figura 3.1b, se dice que son *equivalentes*, puesto que se desea que un vector quede determinado únicamente por su longitud y dirección, los vectores equivalentes se consideran como *iguales* aun cuando puedan estar localizados en posiciones diferentes. Si  $v$  y  $w$  son equivalentes se escribe

$$v = w$$

**Definición.** Si  $v$  y  $w$  son dos vectores cualesquiera, entonces la *suma*  $v + w$  es el vector que se determina como sigue: Colóquese el vector  $w$  de modo que su punto inicial coincida con el punto terminal de  $v$ . El vector  $v + w$  se representa por medio de la flecha que va del punto inicial de  $v$  al terminal de  $w$  (figura 3.2a).

En la figura 3.2b se han construido dos sumas,  $v + w$  (flechas azules) y  $w + v$  (flechas blancas); es evidente que

$$v + w = w + v$$

y que la suma coincide con la diagonal del paralelogramo determinado por  $v$  y  $w$ , al ubicar estos vectores de modo que tengan el mismo punto inicial.

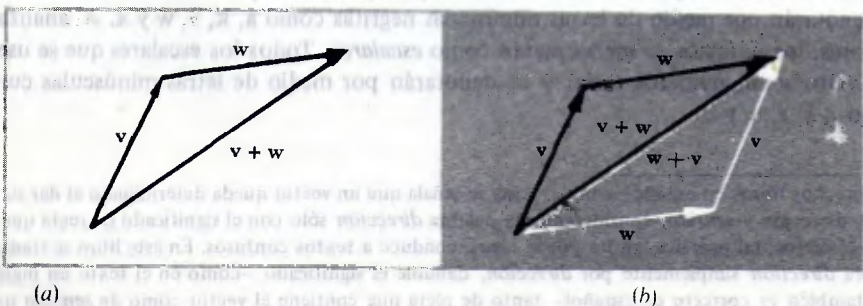


Figura 3.2



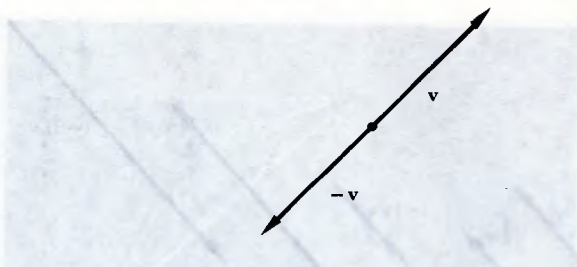


Figura 3.3

El vector de longitud cero se denomina *vector cero* y se denota por  $\mathbf{0}$ . Se define

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

para todo vector  $\mathbf{v}$ . Como no existe dirección natural para el vector cero, se convendrá en que se le puede asignar cualquier dirección que resulte conveniente para el problema que se esté considerando. Si  $\mathbf{v}$  es cualquier vector diferente de cero, es obvio que el único vector  $\mathbf{w}$  que satisface  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$  es el vector que tiene la misma magnitud que  $\mathbf{v}$  pero cuya dirección es la opuesta (figura 3.3). Este vector se conoce como *negativo* (o *inverso aditivo*) de  $\mathbf{v}$  y se escribe

$$\mathbf{w} = -\mathbf{v}$$

Además, se define  $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

**Definición.** Si  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son dos vectores cualesquiera, entonces la sustracción se define por

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

Figura 3.4a).

Para obtener la diferencia  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ , sin construir  $-\mathbf{w}$ , colóquense  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  de modo que coincidan sus puntos iniciales; el vector que va del punto terminal de  $\mathbf{w}$  hacia el punto terminal de  $\mathbf{v}$  es entonces el vector  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  (figura 3.4b)

**Definición.** Si  $\mathbf{v}$  es un vector y  $k$  es el número real (escalar), entonces el *producto*  $k\mathbf{v}$  se define como el vector cuya longitud es  $|k|$  multiplicado por la longitud de  $\mathbf{v}$  y cuya dirección es la misma que la de  $\mathbf{v}$ , si  $k > 0$ , y opuesta a la de  $\mathbf{v}$ , si  $k < 0$ . Se define  $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$  si  $k = 0$  o  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

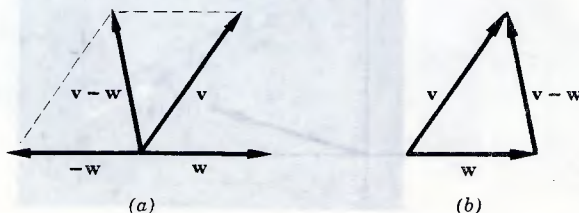


Figura 3.4

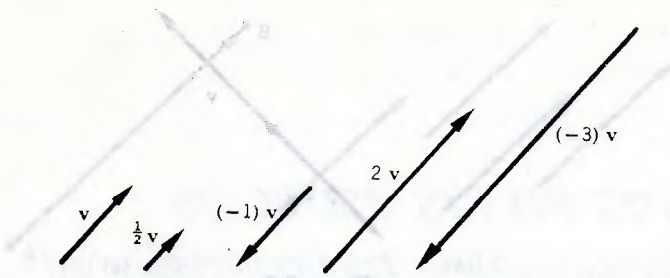


Figura 3.5

En la figura 3.5 se ilustra la relación entre un vector  $v$  y el vector  $\frac{1}{2}v$ ,  $(-1)v$ ,  $2v$  y  $(-3)v$ .

Nótese que el vector  $(-1)v$  tiene la misma longitud que  $v$  pero su dirección es la opuesta. Por tanto,  $(-1)v$  es precisamente el negativo de  $v$ ; es decir,

$$(-1)v = -v$$

Los problemas relacionados con vectores a menudo se simplifican al introducir un sistema de coordenadas rectangulares. Por el momento, el análisis se restringe a vectores en el espacio bidimensional (el plano). Sea  $v$  cualquier vector en el plano y supóngase, como en la figura 3.6, que se ha colocado  $v$  de manera que su punto inicial quede en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Las coordenadas  $(v_1, v_2)$  del punto terminal de  $v$  se llaman **componentes de  $v$** , y se escribe

$$v = (v_1, v_2)$$

Si se colocan vectores equivalentes,  $v$  y  $w$ , de modo que sus puntos iniciales caigan en el origen, entonces es obvio que sus puntos terminales deben coincidir (supuesto que los vectores tienen la misma longitud y la misma dirección). Así entonces, los vectores tienen las mismas componentes. Es igualmente obvio que vectores con las mismas componentes deben tener la misma longitud y la misma dirección y, por consiguiente, son equivalentes. En resumen, dos vectores

$$v = (v_1, v_2) \quad \text{y} \quad w = (w_1, w_2)$$

son equivalentes si y sólo si

$$v_1 = w_1 \quad \text{y} \quad v_2 = w_2$$

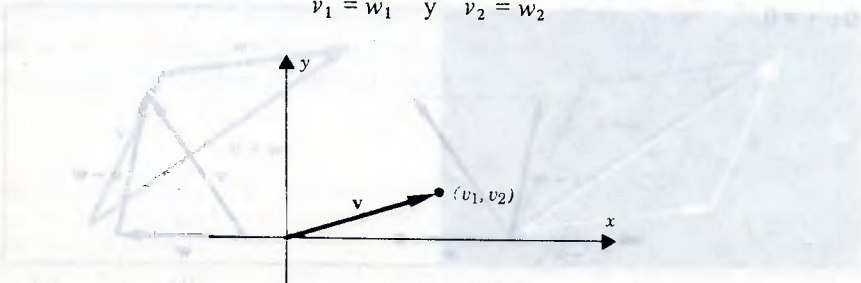


Figura 3.6

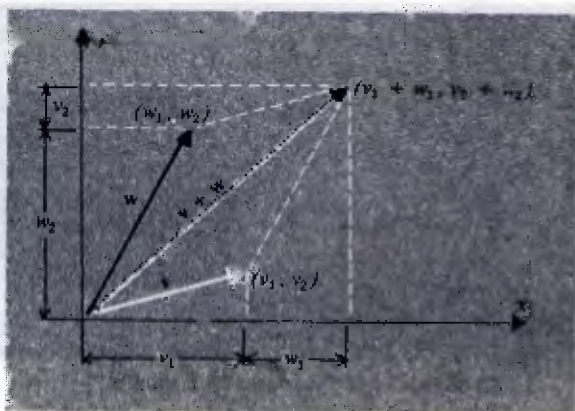


Figura 3.7

Las operaciones de adición vectorial y multiplicación por escalares son muy fáciles de llevar a cabo en términos de componentes. Como se ilustra en la figura 3.7, si

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

entonces

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

Si  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  y  $k$  es un escalar cualquiera, entonces, aplicando un argumento geométrico relacionado con triángulos semejantes, se puede demostrar (ejercicio 14) que

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$$

(figura 3.8).

Así, por ejemplo, si  $\mathbf{v} = (1, -2)$  y  $\mathbf{w} = (7, 6)$  entonces

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1, -2) + (7, 6) = (1 + 7, -2 + 6) = (8, 4)$$

$$4\mathbf{v} = 4(1, -2) = (4(1), 4(-2)) = (4, -8)$$

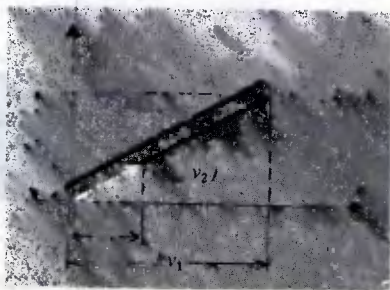


Figura 3.8



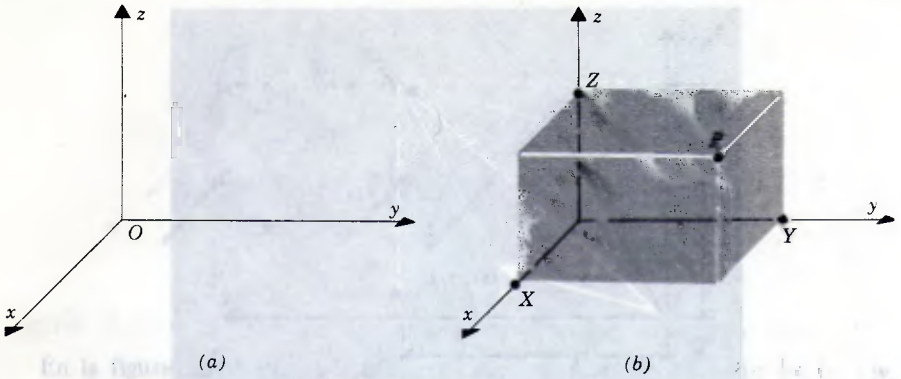


Figura 3.9

Precisamente como los vectores en el plano se pueden describir por parejas de números reales, es posible describir los vectores en el espacio tridimensional por ternas de números reales, introduciendo un sistema de **coordenadas rectangulares**. Para construir un sistema de coordenadas de este tipo, se selecciona un punto  $O$ , conocido como **origen**, y se eligen tres rectas mutuamente perpendiculares, llamadas **ejes de coordenadas**, que pasen por el origen. Se denominan estos ejes como  $x$ ,  $y$  y  $z$  y se selecciona una dirección positiva para cada uno de ellos, así como una unidad de longitud para medir las distancias (figura 3.9a). Cada par de ejes de coordenadas determinan un plano conocido como **plano coordenado**. Estos planos se mencionan como **plano  $xy$** , **plano  $xz$**  y **plano  $yz$** . A cada punto  $P$  en el espacio tridimensional se le asigna una terna de números  $(x, y, z)$ , llamados **coordenadas de  $P$** , como sigue: se pasan tres planos por  $P$  que sean paralelos a los planos coordenados, y se denotan los puntos de intersección de estos planos con los tres ejes coordenados por  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  (figura 3.9b). Las coordenadas de  $P$  se definen como las longitudes con signo

$$x = OX \quad y = OY \quad z = OZ$$

En la figura 3.10 se han situado los puntos cuyas coordenadas son  $(4, 5, 6)$  y  $(-3, 2, -4)$ .

Los sistemas de coordenadas rectangulares en el espacio tridimensional caen en dos categorías, **izquierdos** y **derechos**. Un sistema derecho tiene la propiedad de que un tornillo

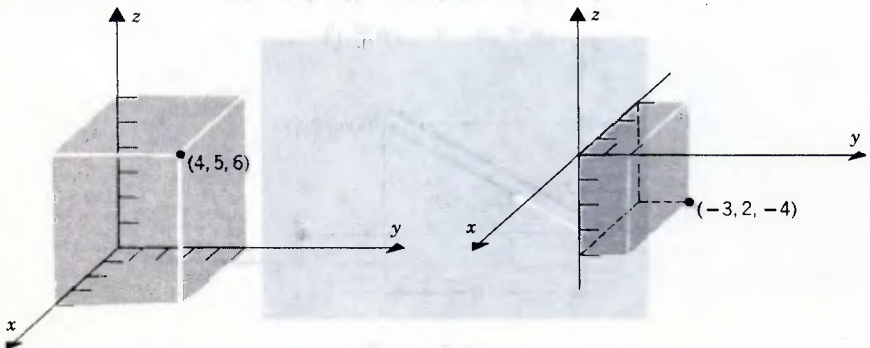


Figura 3.10

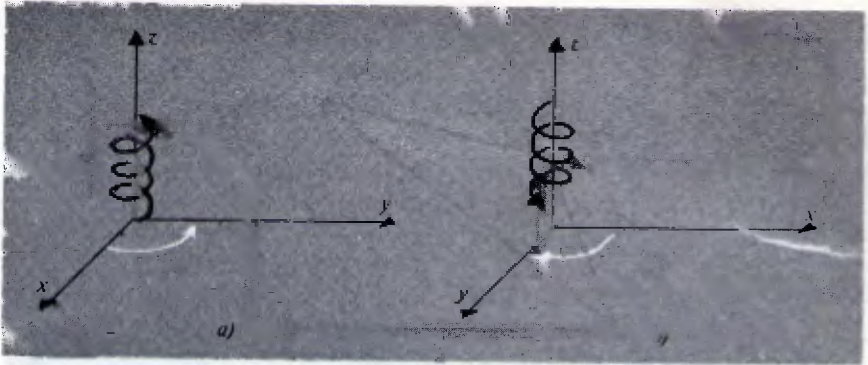


Figura 3.11 a) Derecho. b) Izquierdo.

común que apunte en la dirección positiva del eje  $z$  avanzaría si el eje  $x$  positivo se hiciese girar  $90^\circ$  hacia el eje  $y$  positivo (figura 3.11a). El sistema es izquierdo si el tornillo se desplazase hacia atrás (figura 3.11b).

En este libro sólo se utilizan sistemas derechos de coordenadas.

Si, como en la figura 3.12, un vector  $\mathbf{v}$  en el espacio tridimensional se ubica de modo que su punto inicial quede en el origen de un sistema rectangular de coordenadas, entonces las coordenadas del punto terminal se conocen como **componentes** de  $\mathbf{v}$  y se escribe

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Si  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  y  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  son dos vectores en el espacio tridimensional, entonces es posible aplicar argumentos semejantes a los usados para los vectores en un plano, a fin de establecer los resultados que siguen:

- i)  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son equivalentes si y sólo si  $v_1 = w_1, v_2 = w_2$  y  $v_3 = w_3$
- ii)  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$
- iii)  $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$ , en donde  $k$  es un escalar cualquiera

**Ejemplo 1**

Si  $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$  y  $\mathbf{w} = (4, 2, 1)$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (5, -1, 3), \quad 2\mathbf{v} = (2, -6, 4), \quad -\mathbf{w} = (-4, -2, -1), \\ \mathbf{v} - \mathbf{w} &= \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (-3, -5, 1). \end{aligned}$$

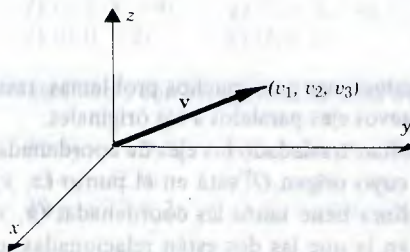


Figura 3.12

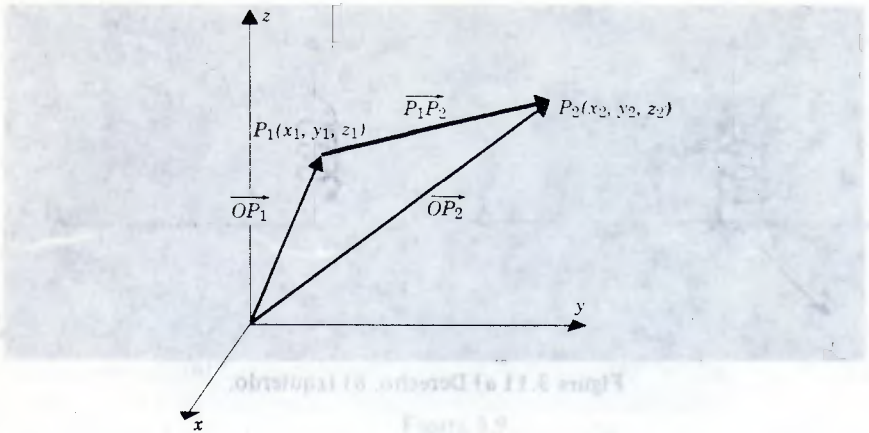


Figura 3.13

A veces surgen vectores que no tienen sus puntos iniciales en el origen. Si el vector  $\overline{P_1P_2}$  tiene el punto inicial  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  y el punto terminal  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ , entonces

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

es decir, las componentes de  $\overline{P_1P_2}$  se obtienen al restar las coordenadas del punto inicial de las coordenadas del punto terminal. Se puede ver esto considerando la figura 3.13; el vector  $\overline{P_1P_2}$  es la diferencia de los vectores  $\overline{OP_2}$  y  $\overline{OP_1}$ , de modo que

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

### Ejemplo 2

Las componentes del vector  $\mathbf{v} = \overline{P_1P_2}$  con punto inicial  $P_1(2, -1, 4)$  y punto terminal  $P_2(7, 5, -8)$  son

$$\mathbf{v} = (7 - 2, 5 - (-1), (-8) - 4) = (5, 6, -12)$$

De modo análogo, en el espacio bidimensional, el vector con punto inicial  $P_1(x_1, y_1)$  y punto terminal  $P_2(x_2, y_2)$  es  $\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ .

### Ejemplo 3

Se pueden simplificar las soluciones para muchos problemas, trasladando los ejes de coordenadas a fin de obtener nuevos ejes paralelos a los originales.

En la figura 3.14a se han trasladado los ejes de coordenadas  $xy$  para obtener un sistema de coordenadas  $x'y'$  cuyo origen  $O'$  está en el punto  $(x, y) = (k, l)$ . Un punto  $P$  en el espacio bidimensional ahora tiene tanto las coordenadas  $(x, y)$  como las coordenadas  $(x', y')$ . Para ver la forma en la que las dos están relacionadas, considérese el vector  $\overline{O'P}$  (figura 3.14b). En el sistema  $xy$ , su punto inicial está en  $(k, l)$  y su punto terminal en



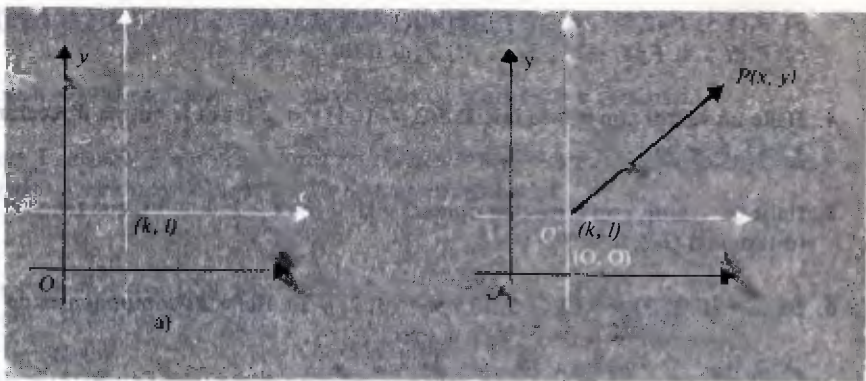


Figura 3.14

$(x, y)$ ; por tanto,  $\overline{OP} = (x - k, y - l)$ . En el sistema  $x'y'$ , su punto inicial está en  $(0, 0)$  y su punto terminal en  $(x', y')$ ; así entonces,  $\overline{O'P} = (x', y')$ . Por tanto,

$$x' = x - k \quad y' = y - l$$

Estas expresiones se denominan *ecuaciones de traslación*.

Como ilustración, si el nuevo origen está en  $(k, l) = (4, 1)$  y las coordenadas  $xy$  de un punto  $P$  son  $(2, 0)$ , entonces las coordenadas  $x'y'$  de  $P$  son  $x' = 2 - 4 = -2$  y  $y' = 0 - 1 = -1$ .

En el espacio tridimensional, las ecuaciones de traslación son

$$x' = x - k \quad y' = y - l \quad z' = z - m$$

en donde  $(k, l, m)$  son las coordenadas  $xyz$  del nuevo origen.

**EJERCICIOS 3.1**

1. Dibuje un sistema derecho de coordenadas y ubique los puntos cuyas coordenadas son:

- |                |                |                |                 |
|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| a) (2, 3, 4)   | b) (-2, 3, 4)  | c) (2, -3, 4)  | d) (2, 3, -4)   |
| e) (-2, -3, 4) | f) (-2, 3, -4) | g) (2, -3, -4) | h) (-2, -3, -4) |
| i) (0, 2, 0)   | j) (0, 0, -2)  | k) (2, 0, 2)   | l) (-2, 0, 0)   |

2. Dibuje los vectores siguientes con los puntos iniciales ubicados en el origen:

- |                      |                      |                       |
|----------------------|----------------------|-----------------------|
| a) $v_1 = (2, 5)$    | b) $v_2 = (-3, 7)$   | c) $v_3 = (-5, -4)$   |
| d) $v_4 = (6, -2)$   | e) $v_5 = (2, 0)$    | f) $v_6 = (0, -8)$    |
| g) $v_7 = (2, 3, 4)$ | h) $v_8 = (2, 0, 2)$ | i) $v_9 = (0, 0, -2)$ |

3. Halle los componentes del vector que tiene el punto inicial  $P_1$  y el punto terminal  $P_2$ .

- a)  $P_1(3, 5), P_2(2, 8)$       b)  $P_1(7, -2), P_2(0, 0)$   
 c)  $P_1(6, 5, 8), P_2(8, -7, -3)$       d)  $P_1(0, 0, 0), P_2(-8, 7, 4)$

4. Halle un vector con punto inicial  $P(2, -1, 4)$  y que tenga la misma dirección que  $\mathbf{v} = (7, 6, -3)$ .

5. Halle un vector, con dirección opuesta a la de  $\mathbf{v} = (-2, 4, -1)$ , que tenga el punto terminal  $Q(2, 0, -7)$ .

6. Sea  $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (2, -3, 1)$  y  $\mathbf{w} = (3, 2, -1)$ . Halle las componentes de

- a)  $\mathbf{u} - \mathbf{w}$       b)  $7\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$       c)  $-\mathbf{w} + \mathbf{v}$   
 d)  $3(\mathbf{u} - 7\mathbf{v})$       e)  $-3\mathbf{v} - 8\mathbf{w}$       f)  $2\mathbf{v} - (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

7. Sean  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  los vectores del ejercicio 6. Encuentre las componentes del vector  $\mathbf{x}$  que satisfaga  $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$ .

8. Sean  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  los vectores del ejercicio 6. Halle los escalares  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  tales que  $c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = (6, 14, -2)$ .

9. Demuestre que no existen los escalares  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  tales que

$$c_1(1, 2, -3) + c_2(5, 7, 1) + c_3(6, 9, -2) = (4, 5, 0).$$

10. Encuentre todos los escalares  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  tales que

$$c_1(2, 7, 8) + c_2(1, -1, 3) + c_3(3, 6, 11) = (0, 0, 0).$$

11. Sea  $P$  el punto  $(2, 3, -2)$  y  $Q$  el punto  $(7, -4, 1)$ .

- a) Encuentre el punto medio del segmento rectilíneo que une a  $P$  con  $Q$ .  
 b) Encuentre el punto del segmento rectilíneo que une a  $P$  con  $Q$  que esté a las  $3/4$  partes de la distancia de  $P$  a  $Q$ .

12. Suponga que un sistema de coordenadas  $xy$  se traslada para obtener un sistema de coordenadas  $x'y'$  cuyo origen  $O'$  tiene las coordenadas  $xy$   $(2, -3)$ .

- a) Halle las coordenadas  $x'y'$  del punto  $P$  cuyas coordenadas  $xy$  son  $(7, 5)$ .  
 b) Encuentre las coordenadas  $xy$  del punto  $Q$  cuyas coordenadas  $x'y'$  son  $(-3, 6)$ .  
 c) Trace los ejes de coordenadas  $xy$  y  $x'y'$  y ubique los puntos  $P$  y  $Q$ .

13. Suponga que un sistema de coordenadas  $xyz$  se traslada para obtener un sistema de coordenadas  $x'y'z'$ . Sea  $\mathbf{v}$  un vector cuyas componentes son  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  en el sistema  $xyz$ . Demuestre que  $\mathbf{v}$  tiene las mismas componentes en el sistema  $x'y'z'$ .

14. Pruebe geoméricamente que si  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , entonces  $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$ . (Restrinja la demostración al caso  $k > 0$  que se ilustra en la figura 3.8. La demostración completa comprendería muchos casos que dependen del cuadrante en el que cae el vector y el signo de  $k$ .)

### 3.2 NORMAS DE UN VECTOR; ARITMETICA VECTORIAL

En esta sección se establecen las reglas básicas de la aritmética vectorial.

**Teorema 1.** Si  $u, v$  y  $w$  son vectores en el espacio bidimensional o tridimensional, y  $k$  y  $l$  son escalares, entonces se cumplen las relaciones siguientes:

- a)  $u + v = v + u$
- b)  $(u + v) + w = u + (v + w)$
- c)  $u + 0 = 0 + u = u$
- d)  $u + (-u) = 0$
- e)  $k(lu) = (kl)u$
- f)  $k(u + v) = ku + kv$
- g)  $(k + l)u = ku + lu$
- h)  $1u = u$

*hacer demos 8)*

Antes de analizar la demostración, observe que se han desarrollado dos enfoques hacia los vectores: *geométrico*, en el que los vectores se representan por medio de flechas o segmentos rectilíneos dirigidos, y *analítico*, en el que se representan por parejas o ternas de números denominados componentes. Como consecuencia, los resultados del teorema 1 se pueden establecer geoméricamente o analíticamente. Como ilustración, se probará el inciso b) en ambas formas. Las demostraciones restantes se dejan como ejercicios.

**Demostración del inciso b) (analítica).** Se dará la demostración para vectores en el espacio tridimensional. La demostración para el espacio bidimensional es semejante. Si  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)$  y  $w = (w_1, w_2, w_3)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 (u + v) + w &= [(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] + (w_1, w_2, w_3) \\
 &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) + (w_1, w_2, w_3) \\
 &= ([u_1 + v_1] + w_1, [u_2 + v_2] + w_2, [u_3 + v_3] + w_3) \\
 &= (u_1 + [v_1 + w_1], u_2 + [v_2 + w_2], u_3 + [v_3 + w_3]) \\
 &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \\
 &= u + (v + w) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

*Demo*

**Demostración del inciso b) (geométrica).** Supóngase que  $u, v$  y  $w$  se representan por  $\overline{PO}$ ,  $\overline{QR}$  y  $\overline{RS}$ , como se muestra en la figura 3.15. Entonces,

$$v + w = \overline{QS} \quad \text{y} \quad u + (v + w) = \overline{PS}$$

También,

$$u + v = \overline{PR} \quad \text{y} \quad (u + v) + w = \overline{PS}$$

*Demo*

Por tanto,

$$u + (v + w) = (u + v) + w \quad \blacksquare$$



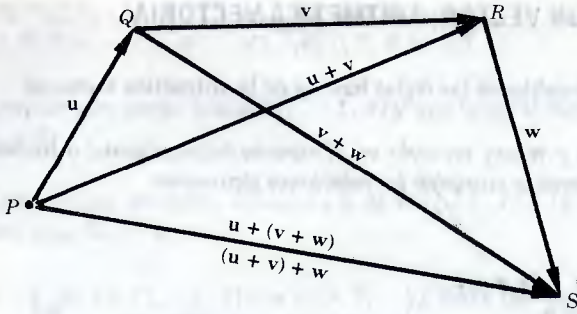


Figura 3.15

A la longitud de un vector  $v$  a menudo se le da el nombre de *norma* de  $v$  y se le denota por  $\|v\|$ . Del teorema de Pitágoras se deduce que la norma de un vector  $v = (v_1, v_2)$  en el espacio bidimensional es

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

(figura 3.16a). Sea  $v = (v_1, v_2, v_3)$  un vector en el espacio tridimensional. Utilizando la figura 3.16b y con dos aplicaciones del teorema de Pitágoras, se obtiene

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= (OR)^2 + (RP)^2 \\ &= (OQ)^2 + (OS)^2 + (RP)^2 \\ &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{3.1}$$

Si  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  son dos puntos en el espacio tridimensional, entonces la distancia  $d$  entre ellos es la norma del vector  $\overline{P_1P_2}$  (figura 3.17). Debido a que

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

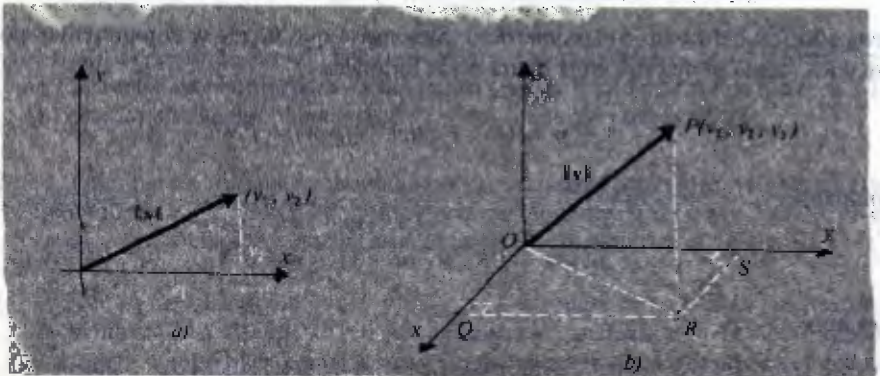


Figura 3.16

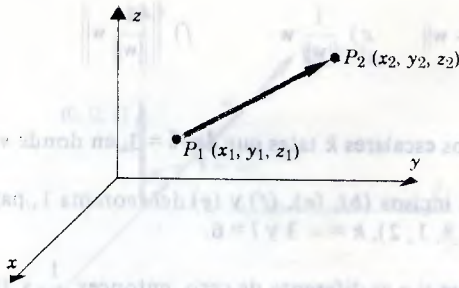


Figura 3.17

de (3.1) se deduce que

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

De modo análogo, si  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  son puntos en el espacio bidimensional, entonces la distancia entre ellos está dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**Ejemplo 4**

La norma del vector  $v = (-3, 2, 1)$  es

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

La distancia  $d$  entre los puntos  $P_1(2, -1, -5)$  y  $P_2(4, -3, 1)$  es

$$d = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-3 + 1)^2 + (1 + 5)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

**EJERCICIOS 3.2**

1. Calcule la norma de  $v$  cuando

- a)  $v = (3, 4)$       b)  $v = (-1, 7)$       c)  $v = (0, -3)$
- d)  $v = (1, 1, 1)$       e)  $v = (-8, 7, 4)$       f)  $v = (9, 0, 0)$

2. Calcule la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$ .

- a)  $P_1(2, 3), P_2(4, 6)$       b)  $P_1(-2, 7), P_2(0, -3)$
- c)  $P_1(8, -4, 2), P_2(-6, -1, 0)$       d)  $P_1(1, 1, 1), P_2(6, -7, 3)$

3. Sea  $u = (1, -3, 2), v = (1, 1, 0)$  y  $w = (2, 2, -4)$ . Encuentre

- a)  $\|u + v\|$       b)  $\|u\| + \|v\|$       c)  $\|-2u\| + 2\|u\|$

$$d) \|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \quad e) \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w} \quad f) \left\| \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w} \right\|$$

4. Halle todos los escalares  $k$  tales que  $\|k\mathbf{v}\| = 3$ , en donde  $\mathbf{v} = (1, 2, 4)$ .
5. Verifique los incisos (b), (e), (f) y (g) del teorema 1, para  $\mathbf{u} = (1, -3, 7)$ ,  $\mathbf{v} = (6, 6, 9)$ ,  $\mathbf{w} = (-8, 1, 2)$ ,  $k = -3$  y  $l = 6$ .
6. Demuestre que si  $\mathbf{v}$  es diferente de cero, entonces  $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$  tiene norma 1.
7. Use el resultado del ejercicio 6 para hallar un vector de norma 1 que tenga la misma dirección que  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ .
8. Sea  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  y  $\mathbf{p} = (x, y, z)$ . Describa el conjunto de todos los puntos  $(x, y, z)$  para los que  $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| = 1$ .
9. Pruebe geoméricamente que si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores en los espacios bidimensional y tridimensional, entonces  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ .
10. Pruebe analíticamente los incisos (a), (c) y (e) del teorema 1.
11. Pruebe analíticamente los incisos (d), (g) y (h) del teorema 1.
12. Pruebe geoméricamente el inciso (f) del teorema 1.

### 3.3 PRODUCTO ESCALAR (PUNTO); PROYECCIONES

En esta sección se presenta un tipo de multiplicación de vectores en los espacios bidimensional y tridimensional. Se establecen las propiedades aritméticas de esta multiplicación y se dan algunas aplicaciones.

Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  dos vectores diferentes de cero en los espacios bidimensional o tridimensional y supóngase que se han situado estos vectores de modo que sus puntos iniciales coincidan. Se dirá que el **ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$**  es el ángulo  $\theta$  determinado por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  que satisfice  $0 \leq \theta \leq \pi$  (figura 3.18).

**Definición.** Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores en los espacios bidimensional o tridimensional y  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , entonces el **producto escalar (punto)** o **producto euclidiano interior**  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  se define por

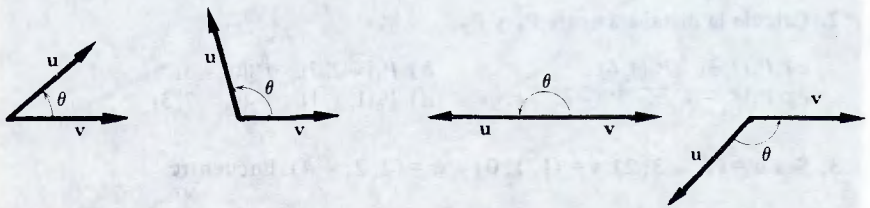


Figura 3.18



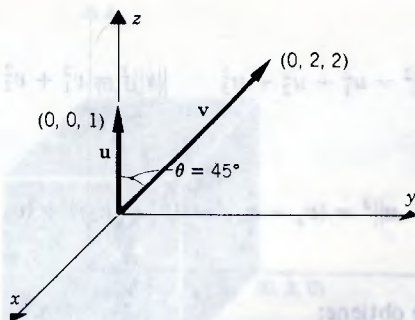


Figura 3.19

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta, & \text{si } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \text{ y } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{si } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ ó } \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases}$$

**Ejemplo 5**

Como se muestra en la figura 3.19, el ángulo entre los vectores  $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$  y  $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$  es de  $45^\circ$ . Por tanto,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta = (\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2})(\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2$$

Sean  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  dos vectores diferentes de cero. Si, como en la figura 3.20,  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , entonces la ley de los cosenos da

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \tag{3.2}$$

Puesto que  $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ , se puede volver a escribir (3.2) como

$$\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

o bien,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

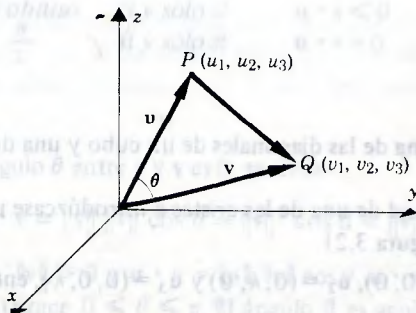


Figura 3.20

Al hacer la sustitución,

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad \|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

y

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

después de simplificar, se obtiene:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad (3.3)$$

Si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  son dos vectores en el espacio bidimensional, entonces la fórmula que corresponde a (3.3) es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

### Ejemplo 6

Considérense los vectores

$$\mathbf{u} = (2, -1, 1) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (1, 1, 2)$$

Hállese  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  y determínese el ángulo  $\theta$  entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

*Solución.*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$$

También  $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$ , de modo que

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto,  $\theta = 60^\circ$ .

### Ejemplo 7

Hállese el ángulo entre una de las diagonales de un cubo y una de sus aristas.

*Solución.* Sea  $k$  la longitud de una de las aristas e introdúzcase un sistema de coordenadas como se muestra en la figura 3.21.

Si se hace  $\mathbf{u}_1 = (k, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, k, 0)$  y  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, k)$ , entonces el vector

$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

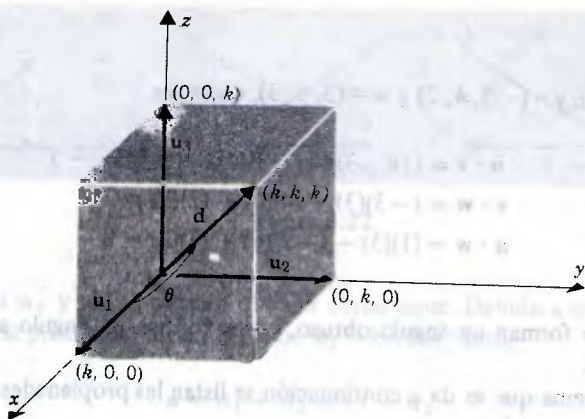


Figura 3.21

es una diagonal del cubo. El ángulo  $\theta$  entre  $d$  y la arista  $u_1$  satisface

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)(\sqrt{3}k^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por tanto,

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \approx 54^\circ 44'$$

En el teorema que sigue se muestra cómo puede usarse el producto escalar para obtener información acerca del ángulo entre dos vectores; también se establece una importante relación entre la norma y el producto escalar.

**Teorema 2.** Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  vectores en el espacio bidimensional o en el tridimensional.

- a)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ ; es decir,  $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}$
- b) Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores diferentes de cero y  $\theta$  es el ángulo entre ellos, entonces

$\theta$ es agudo	si y sólo si	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$
$\theta$ es obtuso	si y sólo si	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$
$\theta = \frac{\pi}{2}$	si y sólo si	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

*Demostración.*

- a) Supuesto que el ángulo  $\theta$  entre  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}$  es 0, se tiene

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta = \|\mathbf{v}\|^2 \cos 0 = \|\mathbf{v}\|^2$$

- b) Dado que  $\|\mathbf{u}\| > 0$ ,  $\|\mathbf{v}\| > 0$  y  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  tiene el mismo signo que  $\cos \theta$ . Supuesto que  $\theta$  satisface  $0 \leq \theta \leq \pi$ , el ángulo  $\theta$  es agudo si y sólo si  $\cos \theta > 0$ ,  $\theta$  es obtuso si y sólo si  $\cos \theta < 0$  y  $\theta = \pi/2$  si y sólo si  $\cos \theta = 0$ . ■



## Ejemplo 8

Si  $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (-3, 4, 2)$  y  $\mathbf{w} = (3, 6, 3)$ , entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(-3) + (-2)(4) + (3)(2) = -5$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (-3)(3) + (4)(6) + (2)(3) = 21$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0$$

Por tanto,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  forman un ángulo obtuso,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  forman un ángulo agudo y  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{w}$  son perpendiculares.

En el teorema que se da a continuación se listan las propiedades aritméticas principales del producto escalar.

**Teorema 3.** Si  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son vectores en el espacio bidimensional o en el tridimensional y  $k$  es un escalar, entonces

a)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

b)  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

c)  $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

d)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$  si  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  y  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$  si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

*Demostración.* Se probará (c) para vectores en el espacio tridimensional y se dejarán las demostraciones que restan como ejercicios. Sean  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ; entonces

$$\begin{aligned} k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= k(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\ &= (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + (ku_3)v_3 \\ &= (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

De modo análogo,  $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$  ■

Con base en el inciso b) del teorema 2, se definen dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  como **ortogonales** (escrito  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ ) si  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ . Si se conviene en que el vector cero forma un ángulo de  $\pi/2$  con todo vector, entonces dos vectores son ortogonales si y sólo si son geoméricamente perpendiculares.

El producto escalar es útil en problemas en los que se tiene interés en “descomponer” un vector en una suma de vectores perpendiculares. Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores diferentes de cero en el espacio bidimensional o en el tridimensional, entonces siempre es posible escribir  $\mathbf{u}$  como

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

en donde  $\mathbf{w}_1$  es un múltiplo escalar de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}_2$  es perpendicular a  $\mathbf{v}$  (figura 3.22). El vector  $\mathbf{w}_1$  recibe el nombre de **proyección ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$**  y el  $\mathbf{w}_2$  es la **componente de  $\mathbf{u}$  ortogonal a  $\mathbf{v}$** .

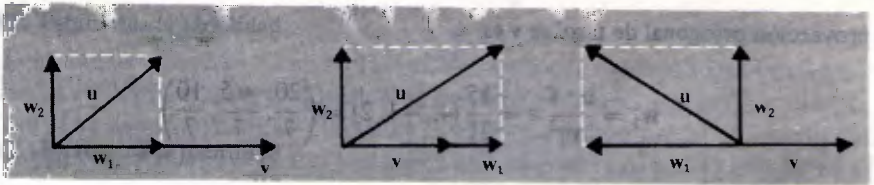


Figura 3.22

Los vectores  $w_1$  y  $w_2$  se pueden obtener como sigue. Debido a que  $w_1$  es un múltiplo escalar de  $v$ , se puede escribir en la forma  $w_1 = kv$ . Por tanto,

$$u = w_1 + w_2 = kv + w_2 \tag{3.4}$$

Al tomar el producto escalar de dos miembros de (3.4) con  $v$  y aplicar los teoremas 2 y 3, se obtiene

$$u \cdot v = (kv + w_2) \cdot v = k\|v\|^2 + w_2 \cdot v$$

Supuesto que  $w_2$  es el perpendicular a  $v$ , se tiene  $w_2 \cdot v = 0$ , de modo que por esta ecuación se llega a

$$k = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}$$

y como  $w_1 = kv$ , se obtiene

$$w_1 = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v \quad \text{proyección ortogonal de } u \text{ sobre } v$$

Al despejar  $w_2$  de  $u = w_1 + w_2$  da

$$w_2 = u - \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v \quad \text{componente de } u \text{ ortogonal a } v$$

**Ejemplo 9**

Considérense los vectores

$$u = (2, -1, 3) \quad \text{y} \quad v = (4, -1, 2)$$

Ya que

$$u \cdot v = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$

y

$$\|v\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$$

la proyección ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$  es

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{15}{21} (4, -1, 2) = \left( \frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7} \right)$$

La componente de  $\mathbf{u}$  ortogonal a  $\mathbf{v}$  es

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = (2, -1, 3) - \left( \frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7} \right) = \left( \frac{-6}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{11}{7} \right)$$

Como comprobación, es posible que el lector desee verificar que  $\mathbf{w}_2$  perpendicular a  $\mathbf{v}$ , mostrando que  $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$ .

### EJERCICIOS 3.3

1. Halle  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  para

a)  $\mathbf{u} = (1, 2), \mathbf{v} = (6, -8)$

b)  $\mathbf{u} = (-7, -3), \mathbf{v} = (0, 1)$

c)  $\mathbf{u} = (1, -3, 7), \mathbf{v} = (8, -2, -2)$

d)  $\mathbf{u} = (-3, 1, 2), \mathbf{v} = (4, 2, -5)$

2. En cada parte del ejercicio 1, halle el coseno del ángulo  $\theta$  entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

3. Determine si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  forman un ángulo agudo, forman un ángulo obtuso o son ortogonales.

a)  $\mathbf{u} = (7, 3, 5), \mathbf{v} = (-8, 4, 2)$

b)  $\mathbf{u} = (6, 1, 3), \mathbf{v} = (4, 0, -6)$

c)  $\mathbf{u} = (1, 1, 1), \mathbf{v} = (-1, 0, 0)$

d)  $\mathbf{u} = (4, 1, 6), \mathbf{v} = (-3, 0, 2)$

4. Halle la proyección ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$  si:

a)  $\mathbf{u} = (2, 1), \mathbf{v} = (-3, 2)$

b)  $\mathbf{u} = (2, 6), \mathbf{v} = (-9, 3)$

c)  $\mathbf{u} = (-7, 1, 3), \mathbf{v} = (5, 0, 1)$

d)  $\mathbf{u} = (0, 0, 1), \mathbf{v} = (8, 3, 4)$

5. En cada uno de los incisos del ejercicio 4, halle la componente de  $\mathbf{u}$  ortogonal a  $\mathbf{v}$ .

6. Verifique el teorema 3 para  $\mathbf{u} = (6, -1, 2), \mathbf{v} = (2, 7, 4)$  y  $k = -5$ .

7. Encuentre dos vectores de norma 1 que sean ortogonales a  $(3, -2)$ .

8. Sean  $\mathbf{u} = (1, 2), \mathbf{v} = (4, -2)$  y  $\mathbf{w} = (6, 0)$ . Halle:

a)  $\mathbf{u} \cdot (7\mathbf{v} + \mathbf{w})$

b)  $\|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w}\|$

c)  $\|\mathbf{u}\| (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

d)  $(\|\mathbf{u}\| \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

9. Dé una explicación de por qué cada una de las expresiones siguientes no tienen significado.

a)  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

b)  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

c)  $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$

d)  $k \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$

10. Use vectores para hallar los cosenos de los ángulos interiores del triángulo con vértices en  $(-1, 0), (-2, 1)$  y  $(1, 4)$ .



11. Establezca la identidad

$$\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

12. Establezca la identidad

$$u \cdot v = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

13. Halle el ángulo entre una de las diagonales de un cubo y una de sus caras. Halle

14. Los *cosenos de dirección* de un vector  $v$  en el espacio tridimensional son los números  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  y  $\cos \gamma$ , en donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son los ángulos entre  $v$  y los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  positivos. Demuestre que si  $v = (a, b, c)$ , entonces  $\cos \alpha = a/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ . Halle  $\cos \beta$  y  $\cos \gamma$ .

15. Demuestre que si  $v$  es ortogonal a  $w_1$  y  $w_2$ , entonces  $v$  es ortogonal a  $k_1 w_1 + k_2 w_2$  para todos los escalares  $k_1$  y  $k_2$ .

16. Sean  $u$  y  $v$  vectores diferentes de cero en el espacio bidimensional o en el tridimensional. Si  $k = \|u\|$  y  $l = \|v\|$ , demuestre que el vector

$$w = \frac{1}{k+l} (kv + lu)$$

biseca el ángulo entre  $u$  y  $v$ ,

### 3.4 PRODUCTO VECTORIAL (CRUZ)

En muchas aplicaciones de los vectores a problemas de la geometría, física e ingeniería, se tiene interés en construir un vector en el espacio tridimensional que sea perpendicular a dos vectores dados. En esta sección se presenta un tipo de multiplicación vectorial que facilita esta construcción.

**Definición.** Si  $u = (u_1, u_2, u_3)$  y  $v = (v_1, v_2, v_3)$  son vectores en el espacio tridimensional, entonces el *producto vectorial (cruz)*  $u \times v$  es el vector definido por

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

o, con la notación de determinantes,

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \quad (3.5)$$

**OBSERVACION.** Existe un patrón en la fórmula (3.5) que es útil tener presente. Si se forma la matriz de  $2 \times 3$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

en donde los elementos del primer renglón son las componentes del primer factor  $\mathbf{u}$ , y los del segundo renglón son las componentes del segundo factor  $\mathbf{v}$ , entonces el determinante de la primera componente de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  se obtiene al eliminar la primera columna de la matriz, el determinante de la segunda componente al eliminar la segunda columna de la matriz, y el determinante de la tercera componente al eliminar la tercera columna de la matriz.

### Ejemplo 10

Halle  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , en donde  $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$  y  $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$ .

*Solución.*

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left( \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (2, -7, -6) \end{aligned}$$

En tanto que el producto escalar (punto) de dos vectores es un escalar, el producto vectorial (cruz) es otro vector. El teorema que sigue da una relación importante entre el producto escalar y el vectorial y también indica que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es ortogonal tanto a  $\mathbf{u}$  como a  $\mathbf{v}$ .

**Teorema 4.** Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores en el espacio tridimensional, entonces,

- a)  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$  ( $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es ortogonal a  $\mathbf{u}$ )  
 b)  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$  ( $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es ortogonal a  $\mathbf{v}$ )  
 c)  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$  (Identidad de Lagrange)

*Demostración.* Sean  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\begin{aligned} a) \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Semejante a (a)

c) Puesto que

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \quad (3.6)$$

y

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \quad (3.7) \end{aligned}$$

Se puede establecer la identidad de Lagrange al "efectuar las multiplicaciones" de los segundos miembros de (3.6) y (3.7) y verificar su igualdad.

**Ejemplo 11**

Considérense los vectores

$$\mathbf{u} = (1, 2, -2) \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = (3, 0, 1)$$

En el ejemplo 10 se demostró que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, -7, -6)$$

Debido a que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$$

y

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0$$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es ortogonal tanto a  $\mathbf{u}$  como a  $\mathbf{v}$ , como lo garantiza el teorema 4.

Las propiedades aritméticas principales del producto vectorial se listan en el teorema siguiente:

**Teorema 5.** Si  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son vectores cualesquiera en el espacio tridimensional y  $k$  es un escalar cualquiera, entonces:

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
- $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
- $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Las demostraciones se deducen inmediatamente de la fórmula 3.5 y de las propiedades de los determinantes; por ejemplo, (a) se puede probar como sigue:

*Demostración.* (a) Al intercambiar  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en (3.5) se intercambian los renglones de los tres determinantes del segundo miembro de (3.5) y, en consecuencia, se cambia el signo de cada componente del producto vectorial. Por tanto,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ . ■

Las demostraciones de los incisos restantes se dejan como ejercicios.

**Ejemplo 12**

Considérense los vectores

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Cada uno de estos vectores tienen longitud 1 y están a lo largo de los ejes de coordenadas (figura 3.23); éstos se conocen como **vectores unitarios estándar** del espacio tridimensional.



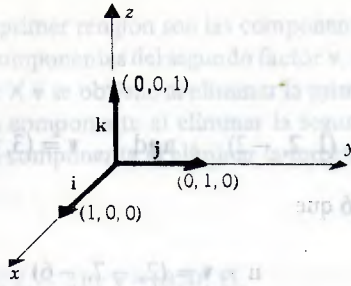


Figura 3.23

Todo vector  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  en el espacio tridimensional se puede expresar en términos de  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ , ya que se puede escribir

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

Por ejemplo,

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

De (3.5) se obtiene

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

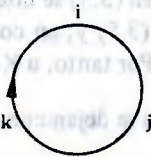
El lector no debe tener problemas en obtener los siguientes resultados.

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

El diagrama que sigue es útil para recordar estos resultados.



Con referencia a este diagrama, el producto vectorial de dos vectores consecutivos al ir en el sentido de las manecillas del reloj es el vector que sigue sobre la circunferencia, y el producto vectorial de dos vectores consecutivos al avanzar en sentido contrario a las manecillas del reloj es el negativo del vector siguiente sobre la circunferencia.

También conviene hacer notar que se puede representar simbólicamente un producto vectorial en la forma de un determinante de  $3 \times 3$ ,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Por ejemplo, si  $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$  y  $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$ , entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

lo cual concuerda con el resultado que se obtuvo en el ejemplo 10.

**Observación.** En general, *no* es cierto que  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ . Por ejemplo,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

y

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = -\mathbf{i}$$

de modo que

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}$$

Por el teorema 4 se sabe que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es ortogonal tanto a  $\mathbf{u}$  como a  $\mathbf{v}$ . Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores diferentes de cero, se puede demostrar que es posible determinar la dirección de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  aplicando la “regla de la mano derecha”\* siguiente (figura 3.24). Sea  $\theta$  el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , y supóngase que se hace girar  $\mathbf{u}$  de modo que describa el ángulo  $\theta$  hasta que coincida con

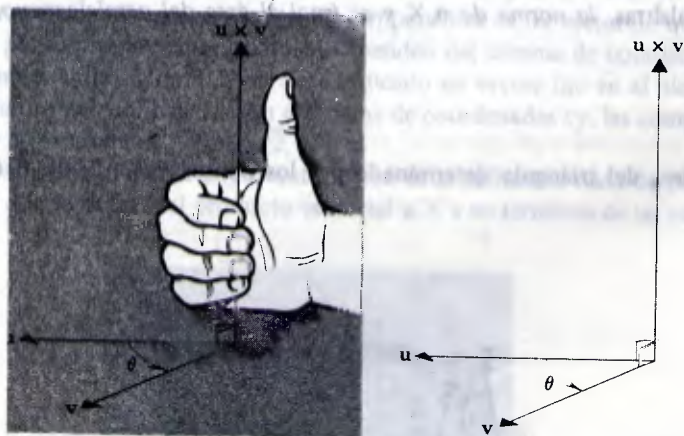


Figura 3.24

\*Recuérdese que, en este texto, se convino en considerar sólo sistemas derechos de coordenadas. Si se hubieran utilizado sistemas izquierdos, aquí se aplicaría la “regla de la mano izquierda”.

v. Si se curvan los dedos de la mano derecha de modo que apunten en la dirección de rotación, entonces el pulgar apunta (aproximadamente) en la dirección de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ .

Quizás el lector considere instructivo practicar esta regla con los productos.

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores diferentes de cero en el espacio tridimensional, entonces la norma de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  tiene una interpretación geométrica útil. La identidad de Lagrange, dada en el teorema 4, afirma que

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \quad (3.8)$$

Si  $\theta$  denota el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , entonces  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ , de modo que se puede volver a escribir (3.8) como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta \quad (3.9)$$

Pero  $\|\mathbf{v}\| \sin \theta$  es la altura del paralelogramo determinado por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  (figura 3.25). Por consiguiente, por lo expresado en (3.9), el área  $A$  de este paralelogramo está dada por

$$A = (\text{base})(\text{altura}) = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

En otras palabras, *la norma de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es igual al área del paralelogramo determinado por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .*

### Ejemplo 13

Hállese el área del triángulo determinado por los puntos  $P_1(2, 2, 0)$ ,  $P_2(-1, 0, 2)$  y  $P_3(0, 4, 3)$ .

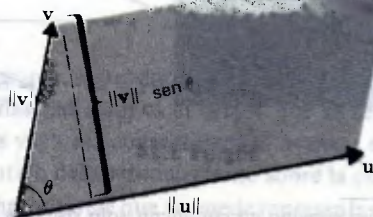


Figura 3.25



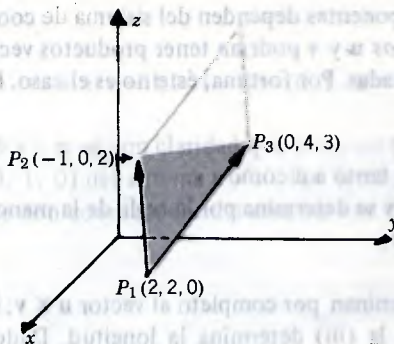


Figura 3.26

**Solución.** El área  $A$  del triángulo es  $1/2$  del área del paralelogramo determinado por los vectores  $\overline{P_1P_2}$  y  $\overline{P_1P_3}$  (figura 3.26).

Al aplicar el método analizado en el ejemplo 2 de la sección 3.1,  $\overline{P_1P_2} = (-3, -2, 2)$  y  $\overline{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$ . Se deduce que

$$\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3} = (-10, 5, -10)$$

y, como consecuencia,

$$A = \frac{1}{2} \|\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3}\| = \frac{1}{2}(15) = \frac{15}{2}$$

Inicialmente, se definió un vector como un segmento rectilíneo dirigido, o flecha, en el espacio bidimensional o en el tridimensional; posteriormente, se introdujeron los sistemas de coordenadas y las componentes para simplificar los cálculos con vectores. Por tanto, un vector tiene una “existencia matemática” sin importar si se haya introducido o no un sistema de coordenadas. Además, las componentes de un vector no quedan determinadas sólo por el propio vector; también dependen del sistema de coordenadas que se elija. Por ejemplo, en la figura 3.27 se tiene indicado un vector fijo en el plano,  $\mathbf{v}$ , y dos sistemas diferentes de coordenadas. En el sistema de coordenadas  $xy$ , las componentes de  $\mathbf{v}$  son  $(1, 1)$ , y en el sistema  $x'y'$  son  $(\sqrt{2}, 0)$ .

Esto lleva a una pregunta importante acerca de la definición dada de producto vectorial. Puesto que se definió el producto vectorial  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  en términos de las componentes

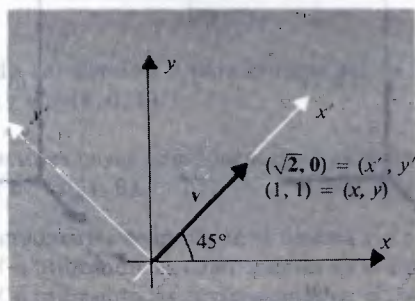


Figura 3.27

de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , y como estas componentes dependen del sistema de coordenadas elegido, parece factible que dos vectores *fijos*  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  podrían tener productos vectoriales diferentes en sistemas diferentes de coordenadas. Por fortuna, éste no es el caso. Para justificar esto, basta con recordar que:

- i)  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es perpendicular tanto a  $\mathbf{u}$  como a  $\mathbf{v}$ .
- ii) La orientación de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  se determina por la regla de la mano derecha.
- iii)  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$ .

Estas tres propiedades determinan por completo al vector  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ; las propiedades (i) y (ii) determinan la dirección, y la (iii) determina la longitud. Dado que estas propiedades dependen únicamente de las longitudes y posiciones relativas de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , y no del sistema derecho de coordenadas que se esté utilizando en particular, el vector  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  permanece inalterado si se introduce un sistema derecho diferente de coordenadas. Este hecho se describe al afirmar que la definición de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es *independiente de las coordenadas*. Este resultado tiene gran importancia para los físicos e ingenieros quienes, con frecuencia, trabajan con muchos sistemas de coordenadas en el mismo problema.

### Ejemplo 14

Considérense dos vectores perpendiculares  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , cada uno de longitud 1 (como se muestra en la figura 3.28a). Si se introduce un sistema de coordenadas  $xyz$ , como se ve en la figura 3.28b, entonces

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0) = \mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (0, 1, 0) = \mathbf{j}$$

de modo que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Por otro lado, si se introduce un sistema de coordenadas  $x'y'z'$ , como se muestra en la figura 3.28c, entonces

$$\mathbf{u} = (0, 0, 1) = \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (1, 0, 0) = \mathbf{i}$$

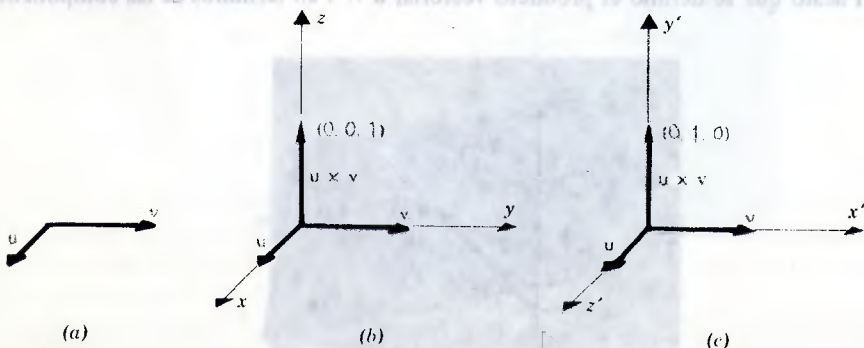


Figura 3.28

de modo que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$$

Pero en las figuras 3.28b y c se ve con claridad que el vector  $(0, 0, 1)$  del sistema  $xyz$  es el mismo que el vector  $(0, 1, 0)$  del sistema  $x'y'z'$ . Por tanto, se obtiene el mismo vector  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , sea que se calcule con coordenadas del sistema  $xyz$  o con las coordenadas del sistema  $x'y'z'$ .

**EJERCICIOS 3.4**

1. Sean  $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 1, 7)$  y  $\mathbf{w} = (1, 4, 5)$ . Calcule:

- a)  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$                       b)  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$                       c)  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$
- d)  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$                       e)  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$                       f)  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$

2. En cada inciso, halle un vector ortogonal tanto a  $\mathbf{u}$  como a  $\mathbf{v}$ .

- a)  $\mathbf{u} = (-7, 3, 1)$                        $\mathbf{v} = (2, 0, 4)$
- b)  $\mathbf{u} = (-1, -1, -1)$                        $\mathbf{v} = (2, 0, 2)$

3. En cada inciso, halle el área del triángulo que tiene los vértices  $P$ ,  $Q$  y  $R$ .

- a)  $P(1, 5, -2)$                        $Q(0, 0, 0)$                        $R(3, 5, 1)$
- b)  $P(2, 0, -3)$                        $Q(1, 4, 5)$                        $R(7, 2, 9)$

4. Verifique el teorema 4 para los vectores  $\mathbf{u} = (1, -5, 6)$  y  $\mathbf{v} = (2, 1, 2)$ .

5. Verifique el teorema 5 para  $\mathbf{u} = (2, 0, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (6, 7, 4)$ ,  $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$  y  $k = -3$ .

6. ¿Qué es erróneo en la expresión  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ?

7. Sean  $\mathbf{u} = (-1, 3, 2)$  y  $\mathbf{w} = (1, 1, -1)$ . Halle todos los vectores  $\mathbf{x}$  que satisfagan  $\mathbf{u} \times \mathbf{x} = \mathbf{w}$ .

8. Sean  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  y  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ . Demuestre que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

9. Use el resultado del ejercicio 8 para calcular  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$  cuando  $\mathbf{u} = (-1, 4, 7)$ ,  $\mathbf{v} = (6, -7, 3)$  y  $\mathbf{w} = (4, 0, 1)$ .

10. Sean  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{n}$  vectores cuyas componentes en el sistema  $xyz$  de la figura 3.28 son  $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$  y  $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ .

- a) Halle las componentes de  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{n}$  en el sistema  $x'y'z'$  de la figura 3.28.
- b) Calcule  $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$  utilizando las componentes en el sistema  $xyz$ .
- c) Calcule  $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$  utilizando las componentes en el sistema  $x'y'z'$ .
- d) Demuestre que los vectores que se obtuvieron en (b) y (c) son los mismos.



11. Pruebe las siguientes identidades.

$$a) (\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$b) (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{z})$$

12. Sean  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  vectores diferentes de cero en el espacio tridimensional, tales que ningún par de ellos son colineales. Demuestre que:

a)  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$  se encuentra en el plano determinado por  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  (suponiendo que los vectores se sitúan de modo que tengan los mismos puntos iniciales).

b)  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$  se encuentra en el plano determinado por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

13. Pruebe que  $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$ . *Sugerencia.* Pruebe primero el resultado en el caso en el que  $\mathbf{z} = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$ , entonces cuando  $\mathbf{z} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$  y, a continuación, cuando  $\mathbf{z} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ . Por último, pruebe para un vector arbitrario  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ , escribiendo  $\mathbf{z} = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$ .

14. Pruebe los incisos (a) y (b) del teorema 5.

15. Pruebe los incisos (c) y (d) del teorema 5.

16. Pruebe los incisos (e) y (d) del teorema 5.

### 3.5 RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

En esta sección se usan los vectores para deducir ecuaciones de rectas y planos en el espacio tridimensional. A su vez, se utilizan estas ecuaciones para resolver algunos problemas básicos de la geometría.

En geometría analítica en el plano, se puede especificar una recta al dar su pendiente y uno de sus puntos. Análogamente, es posible determinar un plano en el espacio tridimensional al dar su inclinación y especificar uno de sus puntos. Un método conveniente para describir la inclinación es especificar un vector (llamado *normal*) que sea perpendicular al plano.

Supóngase que se desea la ecuación del plano que pasa por el punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  y que tiene como normal al vector  $\mathbf{n} = (a, b, c)$ . Evidente, en la figura 3.29, que el plano consta precisamente de aquellos puntos  $P(x, y, z)$  para los cuales el vector  $\overrightarrow{P_0P}$  es ortogonal a  $\mathbf{n}$ ; es decir, para los que

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad (3.10)$$

dado que  $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , (3.10) se puede volver a escribir como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (3.11)$$

A esta expresión se le da el nombre de forma *punto-normal* de la ecuación de un plano.

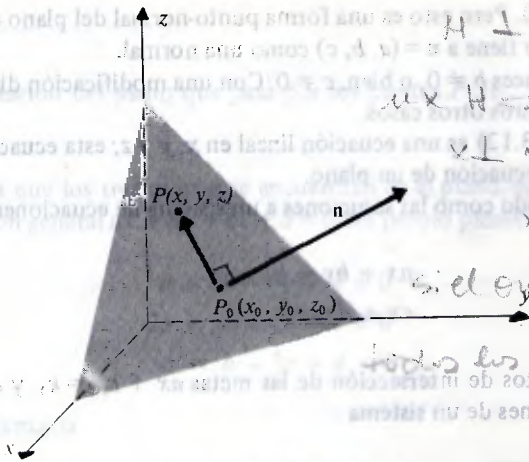


Figura 3.29

## Ejemplo 15

Encuétrase la ecuación del plano que pasa por el punto  $(3, -1, 7)$  y es perpendicular al vector  $\mathbf{n} = (4, 2, -5)$ .

*Solución.* Por la expresión (3.11), una forma punto-normal es

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0$$

Al realizar las multiplicaciones y agrupar los términos, (3.11) se puede escribir en la forma

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (3.12)$$

en donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes, y  $a$ ,  $b$  y  $c$  no son todas cero. Como ilustración, la ecuación del ejemplo 15 se puede escribir como

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0$$

Según lo indica el teorema que sigue, toda ecuación que tiene la forma de (3.12) representa un plano en el espacio tridimensional.

**Teorema 6.** Si  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son constantes, y  $a$ ,  $b$  y  $c$  no son todas cero, entonces la gráfica de la ecuación

$$ax + by + cz + d = 0$$

es un plano que tiene al vector  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  como normal.

*Demostración.* Por hipótesis,  $a$ ,  $b$  y  $c$  no son todas cero. Supóngase, por el momento, que  $a \neq 0$ . Entonces la ecuación  $ax + by + cz + d = 0$  se puede volver a escribir como  $a(x +$

$(d/a) + by + cz = 0$ . Pero esto es una forma punto-normal del plano que pasa por el punto  $(-d/a, 0, 0)$  y que tiene a  $n = (a, b, c)$  como una normal.

Si  $a = 0$ , entonces  $b \neq 0$ , o bien,  $c \neq 0$ . Con una modificación directa del argumento dado se manejarán estos otros casos.

La ecuación (3.12) es una ecuación lineal en  $x, y$  y  $z$ ; esta ecuación se conoce como *forma general* de la ecuación de un plano.

Del mismo modo como las soluciones a un sistema de ecuaciones lineales

$$ax + by = k_1$$

$$cx + dy = k_2$$

corresponden a puntos de intersección de las rectas  $ax + by = k_1$  y  $cx + dy = k_2$  en el plano  $xy$ , las soluciones de un sistema

$$ax + by + cz = k_1$$

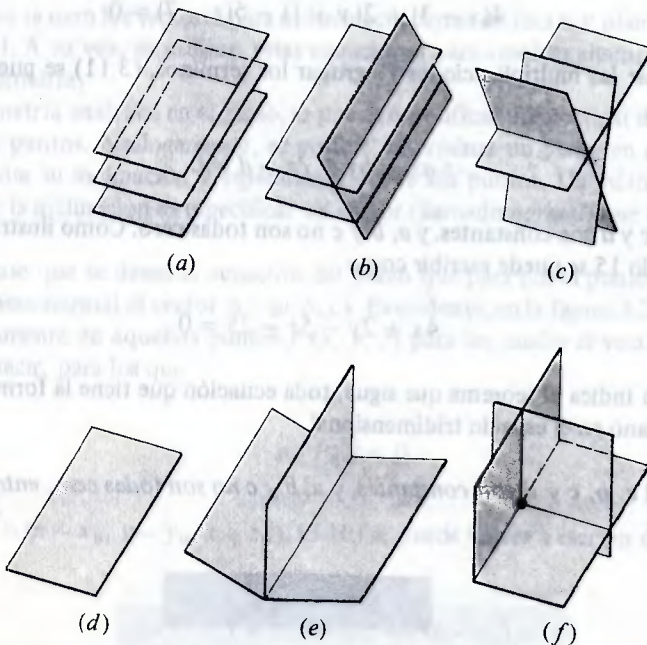
$$dx + ey + fz = k_2$$

(3.13)

$$gx + hy + iz = k_3$$

corresponden a puntos de intersección de los planos  $ax + by + cz = k_1$ ,  $dx + ey + fz = k_2$  y  $gx + hy + iz = k_3$ .

En la figura 3.30 se han ilustrado algunas de las posibilidades geométricas cuando (3.13) tiene cero, una o una infinidad de soluciones.



**Figura 3.30** (a) Ninguna solución (tres planos paralelos). (b) Ninguna solución (dos planos paralelos). (c) Ninguna solución (tres planos sin intersección común). (d) Una infinidad de soluciones (tres planos coincidentes). (e) Una infinidad de soluciones (tres planos que se intersecan en una recta). (f) Una solución (tres planos que se intersecan en un punto).



**Ejemplo 16**

Encuéntrese la ecuación del plano que pasa por los puntos  $P_1(1, 2, -1)$ ,  $P_2(2, 3, 1)$  y  $P_3(3, -1, 2)$ .

*Solución.* Debido a que los tres puntos se encuentran en el plano, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación general  $ax + by + cz + d = 0$  del propio plano. Por tanto,

$$\begin{aligned} a + 2b - c + d &= 0 \\ 2a + 3b + c + d &= 0 \\ 3a - b + 2c + d &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver este sistema da

$$a = -\frac{9}{16}t \quad b = -\frac{1}{16}t \quad c = \frac{5}{16}t \quad d = t$$

Al hacer  $t = -16$ , por ejemplo, se llega a la ecuación deseada

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

Se observa que cualquier otra elección de  $t$  da un múltiplo de esta ecuación, de modo que cualquier valor de  $t \neq 0$  sería igualmente apropiado.

*Solución alternativa.* Supuesto que  $P_1(1, 2, -1)$ ,  $P_2(2, 3, 1)$  y  $P_3(3, -1, 2)$  se encuentran en el plano, los vectores  $\overline{P_1P_2} = (1, 1, 2)$  y  $\overline{P_1P_3} = (2, -3, 3)$  son paralelos al plano. Por tanto  $\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3} = (9, 1, -5)$  es normal al plano, ya que es perpendicular tanto a  $\overline{P_1P_2}$  como a  $\overline{P_1P_3}$ . Con base en esto y en el hecho de que  $P_1$  está en el plano, una forma punto-normal para la ecuación del plano es

$$9(x - 1) + (y - 2) - 5(z + 1) = 0$$

o bien,

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

Ahora se muestra cómo obtener ecuaciones para rectas en el espacio tridimensional. Supóngase que  $l$  es la recta en el espacio tridimensional que pasa por el punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  y es paralela al vector diferente de cero  $\mathbf{v} = (a, b, c)$ . Es obvio (figura 3.31) que  $l$  consta precisamente de aquellos puntos  $P(x, y, z)$  para los que el vector  $\overline{P_0P}$  es paralelo a  $\mathbf{v}$ , es decir, para los cuales existe un escalar  $t$  tal que

$$\overline{P_0P} = t\mathbf{v} \quad (3.14)$$

En términos de componentes, (3.14) se puede escribir

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc)$$

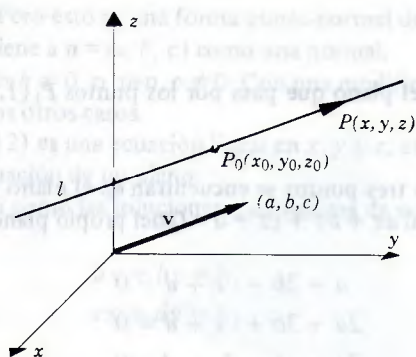


Figura 3.31

de lo cual se deduce que

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \quad \text{en donde } -\infty < t < +\infty \\ z &= z_0 + tc \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones paramétricas* para  $l$ , ya que  $P(x, y, z)$  recorre la recta  $l$  a medida que el parámetro  $t$  varía de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

### Ejemplo 17

La recta que pasa por el punto  $(1, 2, -3)$  y es paralela al vector  $\mathbf{v} = (4, 5, -7)$  tiene las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= 2 + 5t \quad \text{en donde } -\infty < t < +\infty \\ z &= -3 - 7t \end{aligned}$$

### Ejemplo 18

- Hállense las ecuaciones paramétricas para la recta  $l$  que pasa por los puntos  $P_1(2, 4, -1)$  y  $P_2(5, 0, 7)$ .
- ¿En dónde se interseca la recta con el plano  $xy$ ?

*Solución.* a) Ya que el vector  $\overline{P_1P_2} = (3, -4, 8)$  es paralelo a  $l$  y  $P_1(2, 4, -1)$  está sobre  $l$ , la recta  $l$  está dada por

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= 4 - 4t \quad \text{en donde } -\infty < t < +\infty \\ z &= -1 + 8t \end{aligned}$$

- b) La recta se interseca con el plano  $xy$  en el punto en el que  $z = -1 + 8t = 0$ ; es decir, cuando  $t = 1/8$ . Al sustituir este valor de  $t$  en las ecuaciones paramétricas para  $l$  se obtiene como punto de intersección

$$(x, y, z) = \left(\frac{19}{8}, \frac{7}{2}, 0\right)$$

### Ejemplo 19

Hállense las ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los planos

$$3x + 2y - 4z - 6 = 0 \quad \text{y} \quad x - 3y - 2z - 4 = 0$$

*Solución.* La recta de intersección consta de todos los puntos  $(x, y, z)$  que satisfacen las dos ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 4z &= 6 \\ x - 3y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

Al resolver este sistema se llega a

$$x = \frac{26}{11} + \frac{16}{11}t \quad y = -\frac{6}{11} - \frac{2}{11}t \quad z = t$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas para  $l$  son

$$\begin{aligned} x &= \frac{26}{11} + \frac{16}{11}t \\ y &= -\frac{6}{11} - \frac{2}{11}t \quad \text{en donde } -\infty < t < +\infty \\ z &= t \end{aligned}$$

En algunos problemas, se da una recta

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \quad \text{en donde } -\infty < t < +\infty \\ z &= z_0 + ct \end{aligned} \quad (3.15)$$

y se tiene interés en encontrar los dos planos cuya intersección sea la recta dada. Supuesto que existe una infinidad de planos que pasan por la recta, siempre se tiene una infinidad de pares de esos planos. Para encontrar dos de esos planos, cuando  $a$ ,  $b$  y  $c$  son todas diferentes de cero, se puede volver a escribir cada ecuación dada en (3.15) en la forma

$$\frac{x - x_0}{a} = t \quad \frac{y - y_0}{b} = t \quad \frac{z - z_0}{c} = t$$

Al eliminar el parámetro  $t$  se llega a la conclusión de que la recta consta de todos los puntos  $(x, y, z)$  que satisfacen las ecuaciones

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$



conocidas como *ecuaciones simétricas* para la recta. Por tanto, es posible concebir la recta como la intersección de los planos

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad \text{y} \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

o como la intersección de

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{y} \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

y así sucesivamente.

### Ejemplo 20

Hállense dos planos cuya intersección sea la recta

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ y &= -4 + 7t \quad \text{en donde } -\infty < t < +\infty \\ z &= 1 + 3t \end{aligned}$$

*Solución.* Debido a que las ecuaciones simétricas para esta recta son

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 4}{7} = \frac{z - 1}{3} \quad (3.16)$$

es la intersección de los planos

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 4}{7} \quad \text{y} \quad \frac{y + 4}{7} = \frac{z - 1}{3}$$

o, lo que es equivalente,

$$7x - 2y - 29 = 0 \quad \text{y} \quad 3y - 7z + 19 = 0$$

Es posible obtener otras soluciones si se eligen pares diferentes de ecuaciones en (3.16).

### EJERCICIOS 3.5

1. En cada inciso, halle una forma punto-normal de la ecuación del plano que pasa por  $P$  y tiene a  $\mathbf{n}$  como una normal.

- a)  $P(2, 6, 1)$ ;  $\mathbf{n} = (1, 4, 2)$       b)  $P(-1, -1, 2)$ ;  $\mathbf{n} = (-1, 7, 6)$   
 c)  $P(1, 0, 0)$ ;  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$       d)  $P(0, 0, 0)$ ;  $\mathbf{n} = (2, 3, 4)$

2. Escriba las ecuaciones de los planos del ejercicio 1 en la forma general.

13. Halle una forma punto-normal de:

a)  $2x - 3y + 7z - 10 = 0$     b)  $x + 3z = 0$

4. En cada inciso, halle una ecuación para el plano que pasa por los puntos dados.

a)  $(-2, 1, 1)$      $(0, 2, 3)$      $(1, 0, -1)$

b)  $(3, 2, 1)$      $(2, 1, -1)$      $(-1, 3, 2)$

5. En cada inciso, halle las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por  $P$  y es paralela a  $\mathbf{n}$ .

a)  $P(2, 4, 6); \mathbf{n} = (1, 2, 5)$     b)  $P(-3, 2, -4); \mathbf{n} = (5, -7, -3)$

c)  $P(1, 1, 5); \mathbf{n} = (0, 0, 1)$     d)  $P(0, 0, 0); \mathbf{n} = (1, 1, 1)$

6. Halle las ecuaciones simétricas para la recta de los incisos (a) y (b) del ejercicio 5.

7. En cada inciso, halle las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos dados.

a)  $(6, -1, 5), (7, 2, -4)$     b)  $(0, 0, 0), (-1, -1, -1)$

8. En cada inciso, halle las ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los planos dados.

a)  $-2x + 3y + 7z + 2 = 0$     y     $x + 2y - 3z + 5 = 0$

b)  $3x - 5y + 2z = 0$     y     $z = 0$

9. En cada inciso, halle las ecuaciones para los dos planos cuya intersección es la recta dada.

a)  $x = -3 + 4t$      $x = 5t$

b)  $y = -7 + 2t$      $-\infty < t < +\infty$     b)  $y = 3t$      $-\infty < t < +\infty$

c)  $z = 6 - t$      $z = 6t$

10. Halle las ecuaciones para el plano  $xy$ , el plano  $xz$  y el plano  $yz$ .

11. Demuestre que la recta

$$x = 0$$

$$y = t \quad -\infty < t < +\infty$$

$$z = t$$

a) está en el plano  $6x + 4y - 4z = 0$

b) es paralela al plano  $5x - 3y + 3z = 1$  y está debajo de él.

c) es paralela al plano  $6x + 2y - 2z = 3$  y está arriba de él.

12. Halle el punto de intersección de la recta

$$x - 4 = 5t$$

$$y + 2 = t$$

$$z - 4 = -t$$

y el plano  $3x - y + 7z + 8 = 0$ .

13. Halle un plano que pase por el punto  $(2, -7, 6)$  y sea paralelo al plano

$$5x - 2y + z - 9 = 0.$$

14. Demuestre que la recta

$$x - 4 = 2t$$

$$y = -t \quad -x < t < +x$$

$$z + 1 = -4t$$

es paralela al plano  $3x + 2y + z - 7 = 0$ .

15. Demuestre que las rectas

$$x + 1 = 4t$$

$$x + 13 = 12t$$

$$y - 3 = t$$

$$y - 1 = 6t$$

$$z - 1 = 0$$

$$z - 2 = 3t$$

se intersecan. Encuentre el punto de intersección.

16. Halle una ecuación para el plano determinado por las rectas del ejercicio 15.

*Solución:* Debido a que las rectas dadas son paralelas...

$$\begin{aligned} 4t - 2x - 12 + 12 = 0 &\Rightarrow 4t - 2x = 0 \Rightarrow 2t = x \\ 6t - y - 1 + 3 = 0 &\Rightarrow 6t - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 6t + 2 \end{aligned}$$

En cada punto, halle las ecuaciones para los dos planos cuya intersección es la recta dada.

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= 6t + 2 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

10. Halle las ecuaciones para el plano  $\pi$ , el plano  $\pi_1$  y el plano  $\pi_2$  que...

$$\pi: x - 2y - 2z = 7$$

11. Demuestre que la recta...

**EJERCICIOS 3.5**

1. En cada momento, halle el punto de intersección de la recta con el plano  $\pi$  y el plano  $\pi_1$ .

- a)  $P(2, 1), \pi: x = 1, y = 5, z = 1$
- b)  $P(1, 0), \pi: x = 0, y = 1, z = 1$
- c)  $P(1, 1), \pi: x = 1, y = 1, z = 1$
- d)  $P(0, 0), \pi: x = 0, y = 0, z = 1$

2. Encuentre las ecuaciones de los planos...



# 4 Espacios vectoriales

## 4.1 ESPACIO EUCLIDIANO $n$ DIMENSIONAL

La idea de usar parejas de números para localizar puntos en el plano y ternas para localizar puntos en el espacio tridimensional se concibió por primera vez con claridad a mediados del siglo XVII. A fines del siglo XIX, matemáticos y físicos empezaron a darse cuenta que no era necesario quedarse en las ternas. Se reconoció que los conjuntos ordenados de cuatro números  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  se podían considerar como puntos en el espacio "tetradimensional", los conjuntos ordenados de cinco números  $(a_1, a_2, \dots, a_5)$  como puntos en el espacio "pentadimensional", etc. Aun cuando la concepción geométrica no se extiende más allá del espacio tridimensional, es posible extender muchas ideas conocidas más allá de tal espacio, trabajando con propiedades analíticas o numéricas de puntos y vectores, en lugar de las propiedades geométricas. En esta sección se precisan más estas ideas.

**Definición.** Si  $n$  es un entero positivo, entonces una  $n$ -ada ordenada es una sucesión de  $n$  números reales  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . El conjunto de todas las  $n$ -adas ordenadas se conoce como *espacio  $n$  dimensional* y se denota por  $R^n$ .

Cuando  $n = 2$ , o bien, 3, es común usar los términos "pareja ordenada" y "terna ordenada", en lugar de 2-ada y 3-ada ordenadas. Cuando  $n = 1$ , cada  $n$ -ada ordenada consta de un número real y, por tanto,  $R^1$  se puede concebir como el conjunto de los números reales. Para este conjunto, es común escribir  $R$  en lugar de  $R^1$ .

Es posible que el lector haya encontrado, en el estudio del espacio tridimensional, que el símbolo  $(a_1, a_2, a_3)$  tiene dos interpretaciones geométricas diferentes. Puede interpretarse como un punto, en cuyo caso  $a_1, a_2$  y  $a_3$  son las coordenadas (figura 4.1a) o se puede interpretar como un vector, en cuyo caso  $a_1, a_2$  y  $a_3$  son las componentes (figura 4.1b). Por tanto, se concluye que una  $n$ -ada ordenada  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  se puede concebir como un "punto generalizado" o como un "vector generalizado" —desde el punto de vista matemático, la distinción no tiene importancia. Por consiguiente, se tiene libertad de describir la 5-ada  $(-2, 4, 0, 1, 6)$  como un punto en  $R^5$  o como un vector en  $R^5$ . Se hará uso de ambas descripciones.

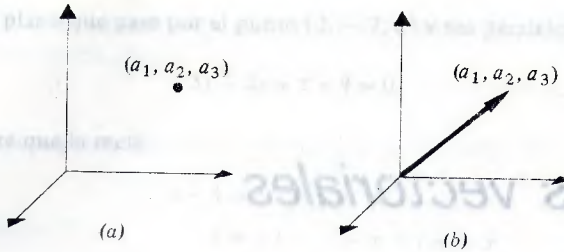


Figura 4.1

**Definición.** Se dice que dos vectores  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  en  $R^n$  son **iguales** si

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$$

La **suma**  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  se define por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

y si  $k$  es cualquier escalar, el **múltiplo escalar**  $k\mathbf{u}$  se define por

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

Las operaciones de adición y multiplicación escalar dadas en esta definición se denominan **operaciones estándar** sobre  $R^n$ .

Se define el **vector cero** en  $R^n$  como el vector

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

Si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  es un vector cualquiera en  $R^n$ , entonces el **negativo** (o **inverso aditivo**) de  $\mathbf{u}$  se denota por  $-\mathbf{u}$  y se define por

$$-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$$

Se define la **sustracción** de vectores en  $R^n$  por  $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$  o, en términos de las componentes,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} - \mathbf{u} &= \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = (v_1, v_2, \dots, v_n) + (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) \\ &= (v_1 - u_1, v_2 - u_2, \dots, v_n - u_n) \end{aligned}$$

En el teorema que sigue se listan las propiedades aritméticas más importantes de la adición y la multiplicación escalar de vectores en  $R^n$ . Todas las demostraciones son fáciles y se dejan como ejercicios.

**Teorema 1.** Si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  y  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  son vectores en  $R^n$  y  $k$  y  $l$  son escalares, entonces:

- a)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- b)  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- c)  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
- d)  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ , es decir,  $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- e)  $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
- f)  $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
- g)  $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$
- h)  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Con este teorema se pueden manipular los vectores en  $R^n$  sin expresarlos en términos de componentes, casi de la misma manera como se manipulan los números reales. Por ejemplo, para despejar  $\mathbf{x}$  en la ecuación vectorial  $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$ , se puede sumar  $-\mathbf{u}$  a ambos miembros y proceder como sigue:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u}) &= \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) \\ \mathbf{x} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}) &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ \mathbf{x} + \mathbf{0} &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \end{aligned}$$

El lector encontrará de utilidad nombrar los incisos del teorema 1 que justifican cada uno de los pasos en este cálculo.

A fin de extender las nociones de distancia, norma y ángulo hacia  $R^n$ , se principia con la generalización siguiente del producto escalar sobre  $R^2$  y  $R^3$  (sección 3.3).

**Definición.** Si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  son vectores cualesquiera en  $R^n$ , entonces el **producto euclidiano interior**  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  se define por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

Obsérvese que cuando  $n = 2$ , o bien, 3, el producto euclidiano interior es el producto escalar ordinario (sección 3.3).

**Ejemplo 1**

El producto euclidiano interior de los vectores

$$\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (5, -4, 7, 0)$$

en  $R^4$  es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(5) + (3)(-4) + (5)(7) + (7)(0) = 18$$

En el siguiente teorema se listan las cuatro propiedades aritméticas principales del producto euclidiano interior.



**Teorema 2.** Si  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son vectores en  $R^n$  y  $k$  es un escalar cualquiera, entonces:

- (a)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$   
 (b)  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$   
 (c)  $(k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$   
 (d)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ . Además,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$  si y sólo si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Se probarán los incisos (b) y (d) y se dejan las demás demostraciones como ejercicios.

*Demostración (b).* Sean  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  y  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ . Entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \cdot (w_1, w_2, \dots, w_n) \\ &= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + \dots + (u_n + v_n)w_n \\ &= (u_1w_1 + u_2w_2 + \dots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \geq 0$ . Además, la igualdad se cumple si y sólo si  $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$ ; es decir, si y sólo si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

### Ejemplo 2

El teorema 2 permite efectuar los cálculos con los productos euclidianos interiores casi de la misma manera como se efectúan con los productos aritméticos ordinarios. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (3\mathbf{u}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= (3\mathbf{u}) \cdot (4\mathbf{u}) + (3\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + (2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u}) + (2\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\ &= 12(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 8(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= 12(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 11(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

El lector debe determinar cuáles incisos del teorema 2 se aplicaron en cada paso.

Por analogía con las conocidas fórmulas en  $R^2$  y  $R^3$ , se define la *norma euclidiana* (o *longitud euclidiana*) de un vector  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  en  $R^n$  por

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

De modo análogo, la *distancia euclidiana* entre los puntos  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  en  $R^n$  se define por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

**Ejemplo 3**

Si  $\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7)$  y  $\mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$  entonces

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-2)^2 + (7)^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

y

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{58}$$

Puesto que se trasladaron tantas conocidas ideas del espacio bidimensional y tridimensional, es común referirse a  $R^n$ , con las operaciones de adición, multiplicación escalar y producto interior que se han definido aquí, como *espacio euclidiano  $n$  dimensional*.

Se concluye esta sección haciendo notar que muchos autores prefieren usar la notación matricial

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

en lugar de la notación horizontal  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , para denotar los vectores en  $R^n$ . Esto se justifica por el hecho de que las operaciones matriciales

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

$$k\mathbf{u} = k \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ \vdots \\ ku_n \end{bmatrix}$$

producen los mismos resultados que las operaciones vectoriales

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$k\mathbf{u} = k(u_1, u_2, \dots, u_n) = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

La única diferencia es que, en uno de los casos, los resultados se presentan verticalmente, mientras que en el otro se presentan en forma horizontal. En diversas ocasiones se usarán las dos notaciones. Sin embargo, de aquí en adelante, las matrices de  $n \times 1$  se denotan por medio de letras negritas minúsculas. Así entonces, un sistema de ecuaciones lineales se escribirá

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

en lugar de  $AX = B$  como antes.

## EJERCICIOS 4.1

1. Sean  $\mathbf{u} = (2, 0, -1, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (5, 4, 7, -1)$  y  $\mathbf{w} = (6, 2, 0, 9)$ . Halle:
- (a)  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$                       (b)  $7\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$                       (c)  $-\mathbf{w} + \mathbf{v}$   
 (d)  $3(\mathbf{u} - 7\mathbf{v})$                       (e)  $-3\mathbf{v} - 8\mathbf{w}$                       (f)  $2\mathbf{v} - (\mathbf{u} + \mathbf{w})$
2. Sean  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  los vectores del ejercicio 1. Encuentre el vector  $\mathbf{x}$  que satisfaga  $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$ .
3. Sean  $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 4, -1)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (7, 1, 1, 4)$ , y  $\mathbf{u}_4 = (6, 3, 1, 2)$ . Encuentre los escalares  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  y  $c_4$  tales que  $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 + c_4\mathbf{u}_4 = (0, 5, 6, -3)$ .
4. Demuestre que no existen los escalares  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  tales que  $c_1(1, 0, -2, 1) + c_2(2, 0, 1, 2) + c_3(1, -2, 2, 3) = (1, 0, 1, 0)$ .
5. Calcule la norma euclidiana de  $\mathbf{v}$  cuando
- (a)  $\mathbf{v} = (4, -3)$                       (b)  $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$                       (c)  $\mathbf{v} = (2, 0, 3, -1)$                       (d)  $\mathbf{v} = (-1, 1, 1, 3, 6)$
6. Sean  $\mathbf{u} = (3, 0, 1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 2, 7, -3)$  y  $\mathbf{w} = (2, 0, 1, 1)$ . Halle
- (a)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$                       (b)  $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$                       (c)  $\| -2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{u}\|$   
 (d)  $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$                       (e)  $\frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}$                       (f)  $\left\| \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w} \right\|$
7. Demuestre que si  $\mathbf{v}$  es un vector diferente de cero en  $R^n$ , entonces  $(1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$  tiene norma 1.
8. Encuentre todos los escalares  $k$  tales que  $\|k\mathbf{v}\| = 3$ , en donde  $\mathbf{v} = (-1, 2, 0, 3)$ .
9. Halle el producto euclidiano interior  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  cuando:
- (a)  $\mathbf{u} = (-1, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (7, 2)$                       (b)  $\mathbf{u} = (3, 7, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 0, 2)$   
 (c)  $\mathbf{u} = (1, -1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 3, -6, 4)$                       (d)  $\mathbf{u} = (1, 3, 2, 6, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 0, 2, 4, 1)$
10. (a) Halle dos vectores en  $R^2$  con norma euclidiana 1, cuyos productos euclidianos interiores con  $(-2, 4)$  sean cero.  
 (b) Demuestre que existen una infinidad de vectores en  $R^3$  con norma euclidiana 1, cuyo producto euclidiano interior con  $(-1, 7, 2)$  es cero.
11. Halle la distancia euclidiana entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  cuando:
- (a)  $\mathbf{u} = (2, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 2)$                       (b)  $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 6, 0)$   
 (c)  $\mathbf{u} = (2, 0, 1, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 4, 6, 6)$                       (d)  $\mathbf{u} = (6, 0, 1, 3, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 4, 2, 8, 3)$
12. Establezca la identidad

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

para los vectores en  $R^n$ . Interprete este resultado geoméricamente en  $R^2$ .



13. Establezca la identidad

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

para los vectores en  $R^n$ .

14. Verifique los incisos (b), (e), (f) y (g) del teorema 1, cuando  $\mathbf{u} = (1, 0, -1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (3, -1, 2, 4)$ ,  $\mathbf{w} = (2, 7, 3, 0)$ ,  $k = 6$  y  $l = -2$ .

15. Verifique los incisos (b) y (c) del teorema 2 para los valores de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  y  $k$  del ejercicio 14

16. Pruebe desde el inciso (a) hasta el (d) del teorema 1.

17. Pruebe desde el inciso (e) hasta el (h) del teorema 1.

18. Pruebe (a) y (c) del teorema 2.

*lo anterior NO*

## 4.2 ESPACIOS VECTORIALES GENERALES

En esta sección se generaliza todavía más el concepto de vector. Se enuncia un conjunto de axiomas que, si son satisfechos por una clase de objetos, a estos objetos se les da el nombre de "vectores". Los axiomas se eligen por medio de la abstracción de las propiedades más importantes de los vectores en  $R^n$ ; como consecuencia, los vectores en  $R^n$  automáticamente satisfacen estos axiomas. Por tanto, este nuevo concepto de vector incluye tanto a los que se dieron con anterioridad como a muchas nuevas clases de vectores.

**Definición.** Sea  $V$  un conjunto arbitrario de objetos sobre los cuales se definen dos operaciones, la adición y la multiplicación por escalares (números reales). Por adición se entiende una regla para asociar, con cada pareja de objetos  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en  $V$ , un elemento  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ , llamado *suma* de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ ; por multiplicación escalar se entiende una regla para asociar, con cada escalar  $k$  y cada objeto  $\mathbf{u}$  en  $V$ , un elemento  $k\mathbf{u}$ , llamado *múltiplo escalar* de  $\mathbf{u}$  por  $k$ . Si los axiomas siguientes son satisfechos por todos los objetos  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  en  $V$  y todos los escalares  $k$  y  $l$ , entonces  $V$  recibe el nombre de *espacio vectorial* y a los objetos en  $V$  se les denomina *vectores*:

- (1) Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son objetos en  $V$ , entonces  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  está en  $V$ .
- (2)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- (3)  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- (4) Existe un objeto  $\mathbf{0}$  en  $V$  tal que  $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$  para todo  $\mathbf{u}$  en  $V$ .
- (5) Para cada  $\mathbf{u}$  en  $V$ , existe un objeto  $-\mathbf{u}$  en  $V$ , conocido como *negativo* de  $\mathbf{u}$ , tal que  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- (6) Si  $k$  es cualquier número real y  $\mathbf{u}$  es cualquier objeto en  $V$ , entonces  $k\mathbf{u}$  está en  $V$ .
- (7)  $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
- (8)  $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$
- (9)  $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
- (10)  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

El vector  $\mathbf{0}$  del axioma 4 se conoce como *vector cero* para  $V$ .

Para algunas aplicaciones es necesario considerar espacios vectoriales en los que los escalares son números complejos en lugar de números reales. Tales espacios vectoriales se conocen como *espacios vectoriales complejos*. Sin embargo, en este texto, *todos los escalares que se utilicen serán reales*.

El lector debe tener presente que, en la definición de espacio vectorial, no se especifica la naturaleza de los vectores ni la de las operaciones. Cualquier clase de objetos que se desee puede servir como vectores; todo lo que se requiere es que se satisfagan los axiomas de los espacios vectoriales. Los ejemplos que siguen dan cierta idea de la diversidad de espacios vectoriales posibles.

#### Ejemplo 4

El conjunto  $V = R^n$ , con las operaciones estándar de adición y multiplicación escalar definidas en la sección anterior, es un espacio vectorial. Los axiomas 1 y 6 se deducen de las definiciones de las operaciones estándar sobre  $R^n$ ; los axiomas restantes se deducen del teorema 1.

#### Ejemplo 5

Sea  $V$  cualquier plano que pasa por el origen en  $R^3$ . A continuación se demuestra que los puntos en  $V$  forman un espacio vectorial bajo las operaciones estándar de adición y multiplicación escalar para vectores en  $R^3$ .

Por lo que se acaba de ver en el ejemplo 4, se sabe que el propio  $R^3$  es un espacio vectorial bajo estas operaciones. Por tanto, los axiomas 2, 3, 7, 8, 9 y 10 se cumplen para todos los puntos en  $R^3$  y, como consecuencia, para todos los puntos en el plano  $V$ . Por consiguiente, sólo es necesario demostrar que se satisfacen los axiomas 1, 4, 5 y 6.

Supuesto que el plano  $V$  pasa por el origen, tiene una ecuación de la forma

$$ax + by + cz = 0 \quad (4.1)$$

(teorema 6 del capítulo 3). Por tanto, si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  son puntos en  $V$ , entonces  $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$  y  $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ . Al sumar estas ecuaciones da

$$a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) = 0$$

En esta igualdad se afirma que las coordenadas del punto  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$  satisfacen (4.1); por tanto,  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  se encuentra en el plano  $V$ . Esto prueba que se satisface el axioma 1. Al multiplicar toda la expresión  $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$  por  $-1$  da

$$a(-u_1) + b(-u_2) + c(-u_3) = 0$$

Como consecuencia,  $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$  está en  $V$ . Esto establece el axioma 5. Las verificaciones de los axiomas 4 y 6 se dejan como ejercicios.

#### Ejemplo 6

Los puntos de una recta  $V$  que pasa por el origen en  $R^3$  forman un espacio vectorial bajo las operaciones estándar de adición y multiplicación escalar para los vectores en  $R^3$ .

El argumento es semejante al que se usó en el ejemplo 5 y se basa en el hecho de que los puntos de  $V$  satisfacen ecuaciones paramétricas de la forma

$$\begin{aligned} x &= at \\ y &= bt & -\infty < t < +\infty \\ z &= ct \end{aligned}$$

(sección 3.5). Los detalles se dejan como ejercicio.

**Ejemplo 7**

El conjunto  $V$  de todas las matrices de  $m \times n$  con elementos reales, junto con las operaciones de adición matricial y multiplicación escalar, es un espacio vectorial. La matriz cero de  $m \times n$  es el vector cero  $\mathbf{0}$ , y si  $\mathbf{u}$  es la matriz  $A$  de  $m \times n$ , entonces la matriz  $-\mathbf{u}$  es el vector  $-\mathbf{u}$  del axioma 5. La mayoría de los axiomas restantes se satisfacen en virtud del teorema 2 de la sección 1.5. Este espacio vectorial se denota por el símbolo  $M_{mn}$ .

**Ejemplo 8**

Sea  $V$  el conjunto de las funciones con valor real definidas sobre toda la recta real. Si  $\mathbf{f} = f(x)$  y  $\mathbf{g} = g(x)$  son dos de esas funciones y  $k$  es cualquier número real, se define la función suma  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$  y el múltiplo escalar  $k\mathbf{f}$  por

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) &= f(x) + g(x) \\ (k\mathbf{f})(x) &= kf(x) \end{aligned}$$

En otras palabras, el valor de la función  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$  en  $x$  se obtiene al sumar los valores de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  en  $x$  (figura 4.2a). De manera análoga, el valor de  $k\mathbf{f}$  en  $x$  es  $k$  multiplicada por el valor de  $\mathbf{f}$  en  $x$  (figura 4.2b). El conjunto  $V$  es un espacio vectorial bajo estas operaciones.

El vector cero en este espacio es la función constante cero, es decir, la función cuya gráfica es una recta horizontal que pasa por el origen. La verificación de los axiomas restantes es un ejercicio.

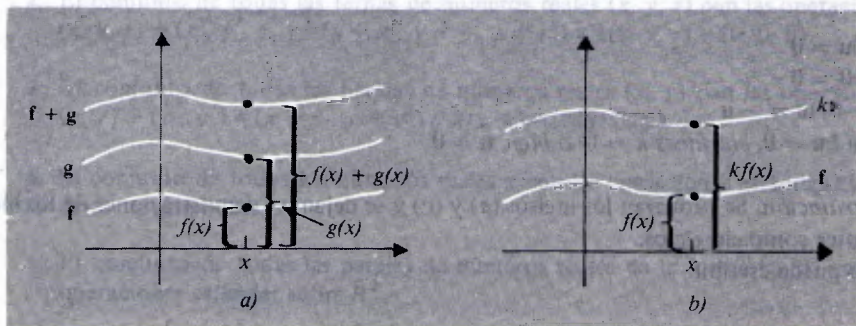


Figura 4.2



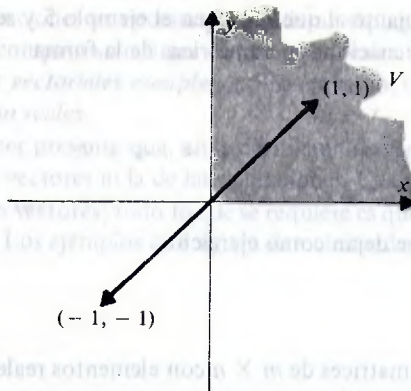


Figura 4.3

### Ejemplo 9

Sea  $V$  el conjunto de todos los puntos  $(x, y)$  en  $R^2$  que se encuentran en el primer cuadrante; es decir, tales que  $x \geq 0$  y  $y \geq 0$ . El conjunto  $V$  no es un espacio vectorial bajo las operaciones estándar sobre  $R^2$ , puesto que no se satisfacen los axiomas 5 y 6. Para ver este hecho, obsérvese que  $\mathbf{v} = (1, 1)$  está en  $V$ , pero  $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v} = (-1, -1)$  no lo está (figura 4.3).

### Ejemplo 10

Supóngase que  $V$  consta de un solo objeto, el cual se denota por  $\mathbf{0}$ , y se define por

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

para todos los escalares  $k$ . Se comprueba con facilidad que se satisfacen todos los axiomas de los espacios vectoriales. A este espacio se le da el nombre de *espacio vectorial cero*.

A medida que se avance, se agregan a la lista más ejemplos de espacios vectoriales. Se concluye esta sección con un teorema que da una lista útil de propiedades de los vectores.

**Teorema 3.** Sea  $V$  un espacio vectorial,  $\mathbf{u}$  un vector en  $V$  y  $k$  un escalar; entonces:

- (a)  $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- (b)  $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- (c)  $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
- (d) Si  $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , entonces  $k = 0$  o bien,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

*Demostración.* Se probarán los incisos (a) y (c) y se dejan las demostraciones de los incisos restantes como ejercicios.

(a) Se puede escribir

$$0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} \quad \text{(Axioma 8)}$$

$$0\mathbf{u} = 0\mathbf{u} \quad \text{(Propiedad del número 0)}$$

Por el axioma 5, el vector  $0\mathbf{u}$  tiene un negativo,  $-0\mathbf{u}$ . Al sumar este negativo a los dos miembros de la expresión anterior se obtiene

$$[0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}] + (-0\mathbf{u}) = 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})$$

o bien,

$$0\mathbf{u} + [0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})] = 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u}) \quad (\text{Axioma 3})$$

o bien,

$$0\mathbf{u} + 0 = 0 \quad (\text{Axioma 5})$$

o bien,

$$0\mathbf{u} = 0 \quad (\text{Axioma 4})$$

(c) Para demostrar que  $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ , debe demostrarse que  $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 0$ . A fin de ver que esto es cierto, obsérvese que

$$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \quad (\text{Axioma 10})$$

$$= (1 + (-1))\mathbf{u} \quad (\text{Axioma 8})$$

$$= 0\mathbf{u} \quad (\text{Propiedad de los números})$$

$$= 0 \quad (\text{inciso } a \text{ anterior})$$

### EJERCICIOS 4.2

En los ejercicios 1 al 14 se da un conjunto de objetos junto con las operaciones de adición y multiplicación escalar. Determine cuáles de los conjuntos son espacios vectoriales bajo las operaciones dadas. Para aquéllos que no lo son, liste todos los axiomas que no se cumplen.

1. El conjunto de todas las ternas de números reales  $(x, y, z)$  con las operaciones  $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$  y  $k(x, y, z) = (kx, y, z)$ .
2. El conjunto de todas las ternas de números reales  $(x, y, z)$  con las operaciones  $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$  y  $k(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .
3. El conjunto de todas las parejas de números reales  $(x, y)$  con las operaciones  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$  y  $k(x, y) = (2ky, 2ky)$ .
4. El conjunto de todos los números reales  $x$  con las operaciones estándar de adición y multiplicación.
5. El conjunto de todas las parejas de números reales de la forma  $(x, 0)$  con las operaciones estándar sobre  $R^2$ .
6. El conjunto de todas las parejas de números reales de la forma  $(x, y)$ , en donde  $x \geq 0$ , con las operaciones estándar sobre  $R^2$ .

7. El conjunto de todas las  $n$ -adas de números reales de la forma  $(x, x, \dots, x)$  con las operaciones estándar sobre  $R^n$ .
8. El conjunto de todas las parejas de números reales  $(x, y)$  con las operaciones  $(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1)$  y  $k(x, y) = (kx, ky)$ .
9. El conjunto de todos los números reales positivos  $x$  con las operaciones  $x + x' = xx'$  y  $kx = x^k$ .
10. El conjunto de todas las matrices de  $2 \times 2$  de la forma

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

con la adición matricial y la multiplicación escalar.

11. El conjunto de todas las matrices de  $2 \times 2$  de la forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

con la adición matricial y la multiplicación escalar.

12. El conjunto de todas las funciones con valor real  $f$  definidas en todo punto sobre la recta real y tales que  $f(1) = 0$ , con las operaciones definidas en el ejemplo 8.
13. El conjunto de todas las matrices de  $2 \times 2$  de la forma

$$\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix}$$

con la adición matricial y la multiplicación escalar.

14. El conjunto cuyo único elemento es la luna. Las operaciones son la luna + luna = luna y  $k(\text{luna}) = \text{luna}$ , en donde  $k$  es un número real.
15. Pruebe que una recta que pasa por el origen en  $R^3$  es un espacio vectorial bajo las operaciones estándar sobre  $R^3$ .
16. Complete los detalles faltantes en el ejemplo 5.
17. Complete los detalles que faltan en el ejemplo 8.
18. Pruebe el inciso (c) del teorema 3.
19. Pruebe el inciso (d) del teorema 3.
20. Pruebe que un espacio vectorial no puede tener más de un vector cero.
21. Pruebe que un vector tiene exactamente un negativo.



### 4.3 SUBESPACIOS

Si  $V$  es un espacio vectorial, entonces ciertos subconjuntos de  $V$  forman por sí mismos espacios vectoriales bajo la adición vectorial y multiplicación escalar definida sobre  $V$ . En esta sección se estudia con todo detalle esos subconjuntos.

**Definición.** Un subconjunto  $W$  de un espacio vectorial  $V$  es un *subespacio* de  $V$ , si  $W$  es a sí mismo un espacio vectorial bajo la adición y multiplicación escalar definidas sobre  $V$ .

Por ejemplo, las rectas y planos que pasan por el origen son subespacios de  $R^3$  (ejemplos 5 y 6).

En general, se deben verificar los diez axiomas de los espacios vectoriales para demostrar que un conjunto  $W$ , con la adición y la multiplicación escalar, forma un espacio vectorial. Sin embargo, si  $W$  es parte de un conjunto mayor  $V$  del que ya se sabe que es un espacio vectorial, entonces no es necesario verificar ciertos axiomas para  $W$  porque se "heredan" de  $V$ . Por ejemplo, no se necesita verificar que  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  (axioma 2) para  $W$ , porque esto se cumple para todos los vectores en  $V$  y, como consecuencia, para todos los vectores en  $W$ . Otros axiomas heredados por  $W$  de  $V$  son: 3, 7, 8, 9 y 10. Por tanto, para demostrar que un conjunto  $W$  es un subespacio de un espacio vectorial  $V$ , sólo es necesario verificar los axiomas 1, 4, 5 y 6. El siguiente teorema hace ver que incluso se puede hacer caso omiso de los axiomas 4 y 5.

**Teorema 4.** Si  $W$  es un conjunto de uno o más vectores de un espacio vectorial  $V$ , entonces  $W$  es un subespacio de  $V$  si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:

- (a) Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores en  $W$ , entonces  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  está en  $W$ .
- (b) Si  $k$  es un escalar cualquiera y  $\mathbf{u}$  es cualquier vector en  $W$ , entonces  $k\mathbf{u}$  está en  $W$ .

[Las condiciones (a) y (b) a menudo se describen diciendo que  $W$  es *cerrado bajo la adición* y es *cerrado bajo la multiplicación escalar*.]

**Demostración.** Si  $W$  es un espacio de  $V$ , entonces se satisfacen todos los axiomas de los espacios vectoriales; en particular, se cumplen los axiomas 1 y 6. Pero éstas son precisamente las condiciones (a) y (b).

Recíprocamente, supóngase que se cumplen las condiciones (a) y (b). Como estas condiciones son los axiomas 1 y 6 de los espacios vectoriales, sólo se necesita demostrar que  $W$  satisface los ocho axiomas restantes. Los axiomas 2, 3, 7, 8, 9 y 10 son satisfechos automáticamente por los vectores en  $W$ , dado que son satisfechos por todos los vectores en  $V$ . Por tanto, para completar la demostración, basta con verificar que los axiomas 4 y 5 son satisfechos por  $W$ .

Sea  $\mathbf{u}$  cualquier vector en  $W$ . Por la condición (b),  $k\mathbf{u}$  está en  $W$  para todo escalar  $k$ . Al hacer  $k = 0$ , se deduce que  $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$  está en  $W$ , y al hacer  $k = -1$ , se concluye que  $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$  está en  $W$ . ■

Todo espacio vectorial  $V$  tiene al menos dos subespacios. El propio  $V$  es un subespacio y el conjunto  $\{\mathbf{0}\}$  que sólo consta del vector cero en  $V$  es otro subespacio denominado *subespacio cero*. Los ejemplos que siguen suministran ilustraciones menos triviales de subespacios.

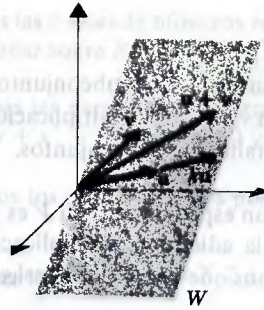


Figura 4.4

**Ejemplo 11**

En el ejemplo 5 de la sección 4.2 se demostró que todos los vectores en cualquier plano que pase por el origen de  $R^3$  forman un espacio vectorial; es decir, los planos que pasan por el origen son subespacios de  $R^3$ . También se puede probar este resultado de manera geométrica, aplicando el teorema 4.

Sea  $W$  cualquier plano que pasa por el origen y supóngase que  $u$  y  $v$  son vectores cualesquiera en  $W$ . Entonces  $u + v$  debe estar en  $W$  porque es la diagonal del paralelogramo determinado por  $u$  y  $v$  (figura 4.4), y  $ku$  debe estar en  $W$ , para cualquier escalar  $k$ , porque  $ku$  está sobre una recta que contiene a  $u$ . Por tanto,  $W$  es un subespacio de  $R^3$ .

**OBSERVACION.** Puede aplicarse un argumento geométrico, como el de este ejemplo, para demostrar que las rectas que pasan por el origen son subespacios de  $R^3$ . Es posible demostrar (ejercicio 20, sección 4.5) que los únicos subespacios de  $R^3$  son:  $\{0\}$ ,  $R^3$ , las rectas que pasan por el origen y los planos que pasan por el origen. También, los únicos subespacios de  $R^2$  son:  $\{0\}$ ,  $R^2$  y las rectas que pasan por el origen.

**Ejemplo 12**

Demuéstrase que el conjunto  $W$  de todas las matrices de  $2 \times 2$  que tienen ceros en la diagonal principal es un subespacio del espacio vectorial  $M_{22}$  de todas las matrices de  $2 \times 2$ .

*Solución.* Sean

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

dos matrices cualesquiera en  $W$  y  $k$  un escalar cualquiera. Entonces

$$kA = \begin{bmatrix} 0 & ka_{12} \\ ka_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Debido a que  $kA$  y  $A + B$  tienen ceros en la diagonal principal, están en  $W$ . Por consiguiente,  $W$  es un subespacio de  $M_{22}$ .





o bien, en notación matricial,  $Ax = b$ . Se dice que un vector\*

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

en  $R^n$  es un **vector solución** del sistema si  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$  es una solución de tal sistema. En este ejemplo se demostrará que el conjunto de vectores solución de un sistema **homogéneo** es un subespacio de  $R^n$ .

Sea  $Ax = 0$  un sistema homogéneo de  $m$  ecuaciones lineales en  $n$  incógnitas,  $W$  el conjunto de vectores solución, y  $s$  y  $s'$  vectores en  $W$ . Para demostrar que  $W$  es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar, se debe demostrar que  $s + s'$  y  $ks$  también son vectores solución, en donde  $k$  es un escalar cualquiera. Supuesto que  $s$  y  $s'$  son vectores solución se tiene,

$$As = 0 \quad \text{y} \quad As' = 0$$

Por tanto,

$$A(s + s') = As + As' = 0 + 0 = 0$$

y

$$A(ks) = k(As) = k0 = 0$$

En estas ecuaciones se muestra que  $s + s'$  y  $ks$  satisfacen la ecuación  $Ax = 0$ . Por tanto,  $s + s'$  y  $ks$  son vectores solución.

El subespacio  $W$  de este ejemplo se denomina **espacio solución** del sistema  $Ax = 0$ .

En muchos problemas se da un espacio vectorial  $V$  y es importante hallar el subespacio "más pequeño" de  $V$  que contenga un conjunto especificado de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ . La definición que sigue proporciona la clave para la construcción de tales subespacios.

**Definición.** Se dice que un vector  $w$  es una **combinación lineal** de los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_r$  si se puede expresar en la forma

$$w = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r$$

en donde  $k_1, k_2, \dots, k_r$  son escalares.

### Ejemplo 16

Considérese los vectores  $u = (1, 2, -1)$  y  $v = (6, 4, 2)$  en  $R^3$ . Demuéstrese que  $w = (9, 2, 7)$  es una combinación lineal de  $u$  y  $v$  y que  $w' = (4, -1, 8)$  no es combinación lineal de  $u$  y  $v$ .

\*En este ejemplo se está usando la notación matricial para los vectores en  $R^n$ .

*Solución.* Para que  $w$  sea una combinación lineal de  $u$  y  $v$ , deben existir los escalares  $k_1$  y  $k_2$  tales que  $w = k_1 u + k_2 v$ ; es decir,

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

o bien,

$$(9, 2, 7) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Al igualar las componentes correspondientes se obtiene

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 9 \\ 2k_1 + 4k_2 &= 2 \\ -k_1 + 2k_2 &= 7 \end{aligned}$$

Si se resuelve este sistema se llega a  $k_1 = -3$ ,  $k_2 = 2$ , de modo que

$$w = -3u + 2v$$

De manera análoga, para que  $w'$  sea una combinación lineal de  $u$  y  $v$ , deben existir los escalares  $k_1$  y  $k_2$  tales que  $w' = k_1 u + k_2 v$ ; es decir,

$$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

o bien,

$$(4, -1, 8) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Al igualar las componentes correspondientes da

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 4 \\ 2k_1 + 4k_2 &= -1 \\ -k_1 + 2k_2 &= 8 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones es inconsistente (verifíquese), de modo que no existen esos escalares. Como consecuencia,  $w$  no es una combinación lineal de  $u$  y  $v$ .

**Definición.** Si  $v_1, v_2, \dots, v_r$  son vectores en un espacio vectorial  $V$  y si todo vector en  $V$  es expresable como una combinación lineal de  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , entonces se dice que estos vectores *generan a*  $V$ .

### Ejemplo 17

Los vectores  $i = (1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 1, 0)$  y  $k = (0, 0, 1)$  generan a  $R^3$  porque todo vector  $(a, b, c)$  en  $R^3$  se puede escribir como

$$(a, b, c) = ai + bj + ck$$

la cual es una combinación lineal de  $i, j$  y  $k$ .

**Ejemplo 18**

Los polinomios  $1, x, x^2, \dots, x^n$  generan al espacio vectorial  $P_n$  (véase el ejemplo 13) dado que cada polinomio  $p$  en  $P_n$  se puede escribir como

$$p = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

la cual es una combinación lineal de  $1, x, x^2, \dots, x^n$ .

**Ejemplo 19**

Determinése si  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$  y  $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)$  generan a  $R^3$ .

*Solución.* Se debe determinar si un vector arbitrario  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  en  $R^3$  se puede expresar como una combinación lineal

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

de los vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , y  $\mathbf{v}_3$ . Si se expresa esta ecuación en términos de componentes da

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3)$$

o bien,

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + k_2 + 2k_3, \quad k_1 + k_3, \quad 2k_1 + k_2 + 3k_3)$$

o bien,

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + 2k_3 &= b_1 \\ k_1 + k_3 &= b_2 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el problema se reduce a determinar si este sistema es o no consistente para todos los valores de  $b_1, b_2$  y  $b_3$ . Por los incisos (a) y (d) del teorema 13 de la sección 1.7, este sistema será consistente para todos los valores de  $b_1, b_2$  y  $b_3$  si y sólo si la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

es inversible. Pero  $\det(A) = 0$  (verifíquese), de modo que  $A$  no es inversible y, como consecuencia,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  no generan a  $R^3$ .

En general, un conjunto dado de vectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  en un espacio vectorial  $V$  puede generar o no a  $V$ . Si lo genera, entonces todo vector en  $V$  es expresable como una combinación lineal de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ , y si no lo genera, entonces algunos vectores se pueden expresar mediante tal combinación, mientras que otros no. El siguiente teorema indi-



ca que si se agrupan todos los vectores en  $V$  que son expresables como combinaciones lineales de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ , entonces se obtiene un subespacio de  $V$ . Este subespacio se denomina **espacio lineal generado** por  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ , o más simplemente, **espacio generado** por  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ .

**Teorema 5.** Si  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  son vectores en un espacio vectorial  $V$ , entonces:

- (a) El conjunto  $W$  de todas las combinaciones lineales de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  es un subespacio de  $V$ .
- (b)  $W$  es el subespacio más pequeño de  $V$  que contiene a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ , en el sentido de que cualquier otro subespacio de  $V$  que contenga a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  debe contener a  $W$ .

*Demostración.*

(a) Para demostrar que  $W$  es un subespacio de  $V$ , debe probarse que es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar. Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores en  $W$ , entonces

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_r\mathbf{v}_r$$

y

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r$$

en donde  $c_1, c_2, \dots, c_r, k_1, k_2, \dots, k_r$  son escalares. Por tanto,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + k_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 + k_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (c_r + k_r)\mathbf{v}_r$$

y, para cualquier escalar  $k$ ,

$$k\mathbf{u} = (kc_1)\mathbf{v}_1 + (kc_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (kc_r)\mathbf{v}_r$$

Así entonces,  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  y  $k\mathbf{u}$  son combinaciones lineales de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  y, como consecuencia, están en  $W$ . Por consiguiente,  $W$  es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar.

(b) Cada vector  $\mathbf{v}_i$  es una combinación lineal de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ , puesto que es posible escribir,

$$\mathbf{v}_i = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + 1\mathbf{v}_i + \dots + 0\mathbf{v}_r$$

Por tanto, el subespacio  $W$  contiene a cada uno de los vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ . Sea  $W'$  cualquier otro subespacio que contenga a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ . Dado que  $W'$  es cerrado bajo la adición y multiplicación escalar, debe contener todas las combinaciones lineales

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_r\mathbf{v}_r \quad \text{de} \quad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r;$$

por tanto,  $W'$  contiene a cada vector de  $W$ .

El espacio lineal  $W$  generado por un conjunto de vectores  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  se denota por

$$\text{lin}(S) \quad \text{o bien,} \quad \text{lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$$

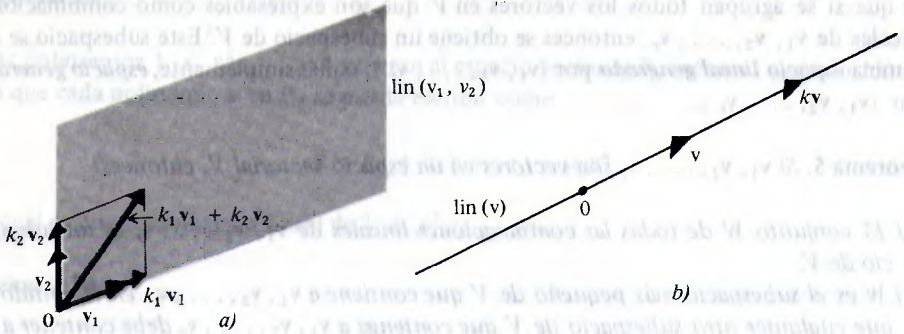


Figura 4.5

**Ejemplo 20**

Si  $v_1$  y  $v_2$  son vectores no colineales en  $R^3$  con puntos iniciales en el origen, entonces  $\text{lin}\{v_1, v_2\}$ , el cual consta de todas las combinaciones lineales  $k_1 v_1 + k_2 v_2$ , es el plano determinado por  $v_1$  y  $v_2$  (figura 4.5a).

De modo análogo, si  $v$  es un vector diferente de cero en  $R^2$  o  $R^3$ , entonces  $\text{lin}\{v\}$ , el cual es el conjunto de todos los múltiplos escalares  $kv$ , es la recta determinada por  $v$  (figura 4.5b).

**EJERCICIOS 4.3**

1. Aplique el teorema 4 para determinar cuáles de los siguientes son subespacios de  $R^3$ .

- (a) todos los vectores de la forma  $(a, 0, 0)$ ;
- (b) todos los vectores de la forma  $(a, 1, 1)$ ;
- (c) todos los vectores de la forma  $(a, b, c)$ , en donde  $b = a + c$ ;
- (d) todos los vectores de la forma  $(a, b, c)$ , en donde  $b = a + c + 1$ .

2. Aplique el teorema 4 para determinar cuáles de los siguientes son subespacios de  $M_{22}$ .

- (a) todas las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

en donde  $a, b, c,$  y  $d$  son enteros

- (b) todas las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

en donde  $a + d = 0$

- (c) todas las matrices  $A$  de  $2 \times 2$  tales que  $A = A^t$
- (d) todas las matrices  $A$  de  $2 \times 2$  tales que  $\det(A) = 0$

3. Aplique el teorema 4 para determinar cuáles de los siguientes son subespacios de  $P_3$ .

- todos los polinomios  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  para los que  $a_0 = 0$
- todos los polinomios  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  para los que  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$
- todos los polinomios  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  para los que  $a_0, a_1, a_2$  y  $a_3$  son enteros
- todos los polinomios de la forma  $a_0 + a_1x$ , en donde  $a_0$  y  $a_1$  son números reales.

4. Aplique el teorema 4 para determinar cuáles de los siguientes son subespacios del espacio de todas las funciones con valor real,  $f$ , definidas sobre toda la recta real.

- todas las  $f$  tales que  $f(x) \leq 0$  para toda  $x$ ;
- todas las  $f$  tales que  $f(0) = 0$ ;
- todas las  $f$  tales que  $f(0) = 2$ ;
- todas las funciones constantes;
- todas las  $f$  de la forma  $k_1 + k_2 \sin x$ , en donde  $k_1$  y  $k_2$  son números reales.

5. ¿Cuáles de las siguientes son combinaciones lineales de  $\mathbf{u} = (1, -1, 3)$ , y  $\mathbf{v} = (2, 4, 0)$ ?

- (a)  $(3, 3, 3)$  (b)  $(4, 2, 6)$  (c)  $(1, 5, 6)$  (d)  $(0, 0, 0)$

6. Exprese los siguientes como combinaciones lineales de  $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$  y  $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$ .

- (a)  $(5, 9, 5)$  (b)  $(2, 0, 6)$  (c)  $(0, 0, 0)$  (d)  $(2, 2, 3)$

7. Exprese los siguientes como combinaciones lineales de  $\mathbf{p}_1 = 2 + x + 4x^2$ ,  $\mathbf{p}_2 = 1 - x + 3x^2$  y  $\mathbf{p}_3 = 3 + 2x + 5x^2$ .

- (a)  $5 + 9x + 5x^2$  (b)  $2 + 6x^2$  (c)  $0$  (d)  $2 + 2x + 3x^2$

8. ¿Cuáles de las siguientes son combinaciones lineales de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ y } C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}?$$

- (a)  $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$

9. En cada inciso determine si los vectores dados generan a  $R^3$ .

- $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (3, 0, 0)$
- $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 2)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$
- $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 4)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, -3, 5)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (5, -2, 9)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (1, 4, -1)$
- $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 3, 4)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 4, 3)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (6, 2, 1)$

10. Determine cuáles de los siguientes están en el espacio generado por

$$\mathbf{f} = \cos^2 x \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{g} = \sin^2 x$$

- (a)  $\cos 2x$  (b)  $3 + x^2$  (c)  $1$  (d)  $\sin x$



11. Determine si los siguientes polinomios generan a  $P_2$

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 + 2x - x^2 & p_2 &= 3 + x^2 \\ p_3 &= 5 + 4x - x^2 & p_4 &= -2 + 2x - 2x^2 \end{aligned}$$

12. Sean  $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (3, -1, 5, 2)$  y  $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)$ . ¿Cuáles de los siguientes vectores están en  $\text{lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ?

(a)  $(2, 3, -7, 3)$     (b)  $(0, 0, 0, 0)$     (c)  $(1, 1, 1, 1)$     (d)  $(-4, 6, -13, 4)$

13. Halle una ecuación para el plano generado por los vectores  $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$  y  $\mathbf{v} = (2, 3, 5)$

14. Halle las ecuaciones paramétricas para la recta generada por el vector  $\mathbf{u} = (2, 7, -1)$ .

15. Demuestre que los vectores solución de un sistema no homogéneo consistente de  $m$  ecuaciones lineales en  $n$  incógnitas no forman un subespacio de  $R^n$ .

16. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.) Demuestre que los siguientes conjuntos de funciones son subespacios del espacio vectorial del ejemplo 8.

- (a) todas las funciones continuas en todo punto;  
 (b) todas las funciones diferenciables en todo punto;  
 (c) todas las funciones diferenciables en todo punto que satisfacen  $f' + 2f = 0$ .

#### 4.4 INDEPENDENCIA LINEAL

Por lo estudiado en la sección 4.3, se sabe que un espacio vectorial  $V$  es generado por un conjunto de vectores  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ , si cada vector en  $V$  es una combinación lineal de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ . Los conjuntos generadores resultan útiles en una gran diversidad de problemas ya que, a menudo, es posible estudiar un espacio vectorial  $V$  estudiando primero los vectores en un conjunto generador  $S$  y, a continuación, extendiendo los resultados hacia el resto de  $V$ . Por tanto, conviene mantener el conjunto generador  $S$  tan pequeño como sea posible. El problema de encontrar los conjuntos generadores más pequeños para un espacio vectorial depende de la noción de independencia lineal, la cual se estudia en esta sección.

Si  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  es un conjunto de vectores, entonces la ecuación vectorial

$$k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tiene al menos una solución, a saber,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad \dots, \quad k_r = 0$$

Si esta es la única solución, entonces  $S$  recibe el nombre de conjunto *linealmente independiente*. Si hay otras soluciones entonces se dice que  $S$  es un conjunto *linealmente dependiente*.

**Ejemplo 21**

El conjunto de vectores  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ , en donde  $v_1 = (2, 1, 0, 3)$ ,  $v_2 = (1, 2, 5, -1)$ ,  $v_3 = (7, -1, 5, 8)$  es linealmente dependiente, ya que  $3v_1 + v_2 - v_3 = 0$ .

**Ejemplo 22**

Los polinomios  $p_1 = 1 - x$ ,  $p_2 = 5 + 3x - 2x^2$  y  $p_3 = 1 + 3x - x^2$  forman un conjunto linealmente dependiente en  $P_2$  ya que  $3p_1 - p_2 + 2p_3 = 0$ .

**Ejemplo 23**

Considérense los vectores  $i = (1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 1, 0)$  y  $k = (0, 0, 1)$  en  $R^3$ . En términos de componentes, la ecuación vectorial

$$k_1 i + k_2 j + k_3 k = 0$$

se convierte en

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

o, lo que es equivalente,

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

Por tanto,  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$ ,  $k_3 = 0$ ; como consecuencia, el conjunto  $S = \{i, j, k\}$  es linealmente independiente. Es posible aplicar un argumento semejante para demostrar que los vectores  $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$  forman un conjunto linealmente independiente en  $R^n$ .

**Ejemplo 24**

Determinese si los vectores

$$v_1 = (1, -2, 3) \quad v_2 = (5, 6, -1) \quad v_3 = (3, 2, 1)$$

forman un conjunto linealmente dependiente o linealmente independiente.

**Solución.** En términos de componentes, la ecuación vectorial

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$$

queda

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

o, lo que es equivalente

$$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

Al igualar las componentes correspondientes da

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  forman un conjunto linealmente dependiente si este sistema tiene una solución no trivial, o bien, un conjunto linealmente independiente si tienen sólo la solución trivial. Al resolver este sistema se llega a

$$k_1 = -\frac{1}{2}t \quad k_2 = -\frac{1}{2}t \quad k_3 = t$$

Como consecuencia, el sistema tiene soluciones no triviales y  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  forman un conjunto linealmente dependiente. De modo alternativo, se pudo haber demostrado la existencia de soluciones no triviales sin resolver el sistema, demostrando que la matriz de coeficientes tiene determinante cero y, como consecuencia, no es invertible (verifíquese).

El término "linealmente dependiente" sugiere que los vectores "dependen" uno del otro de alguna manera. Para ver que, en efecto, este es el caso, supóngase que  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  es un conjunto linealmente dependiente, de modo que la ecuación vectorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tiene una solución diferente de  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ . Para ser específicos, supóngase que  $k_1 \neq 0$ . Al multiplicar ambos miembros por  $1/k_1$  y despejar  $\mathbf{v}_1$ , se llega a

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathbf{v}_2 + \dots + \left(-\frac{k_r}{k_1}\right)\mathbf{v}_r$$

Así entonces,  $\mathbf{v}_1$  se ha expresado como una combinación lineal de los vectores restantes  $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ . Se deja como ejercicio demostrar que *un conjunto con dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los vectores es una combinación lineal de los vectores restantes*.

Los dos ejemplos que siguen dan una interpretación geométrica de la dependencia lineal en  $R^2$  y  $R^3$ .

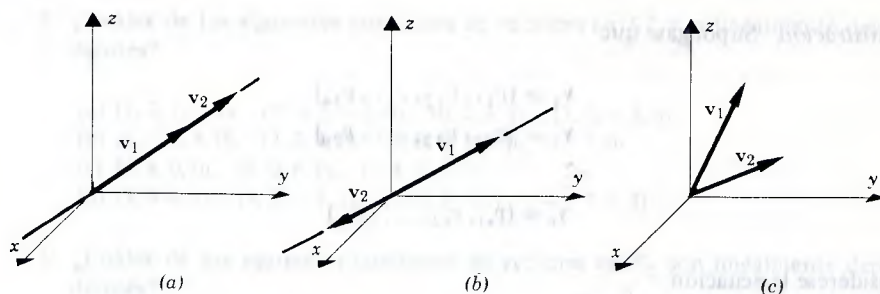
### Ejemplo 25

Dos vectores,  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , forman un conjunto linealmente dependiente si y sólo si uno de los vectores es un múltiplo escalar del otro. Para ver por qué, supóngase que  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  es linealmente dependiente. Supuesto que la ecuación vectorial  $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$  tiene una solución diferente de  $k_1 = k_2 = 0$ , esta ecuación puede reescribirse como

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathbf{v}_2 \quad \text{ó} \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{k_1}{k_2}\right)\mathbf{v}_1$$

Pero esto afirma que  $\mathbf{v}_1$  es un múltiplo escalar de  $\mathbf{v}_2$ , o bien, que  $\mathbf{v}_2$  es múltiplo escalar de  $\mathbf{v}_1$ . La recíproca se deja como ejercicio.





**Figura 4.6** (a) Linealmente dependientes. (b) Linealmente dependientes. (c) Linealmente independientes.

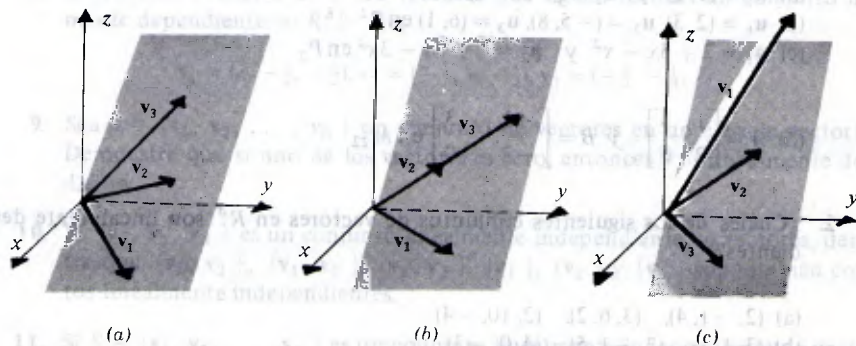
Se deduce que dos vectores en  $R^2$  o en  $R^3$  son linealmente dependientes si y sólo si están sobre la misma recta que pasa por el origen (figura 4.6).

### Ejemplo 26

Si  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  son tres vectores en  $R^3$ , entonces el conjunto  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  es linealmente dependiente si y sólo si los tres vectores están en el mismo plano que pasa por el origen, cuando los vectores se colocan con los puntos iniciales en el origen (figura 4.7). Para esto, recuérdese que  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  son linealmente dependientes si y sólo si al menos uno de los vectores es una combinación lineal de los dos restantes o, lo que es equivalente, si y sólo si al menos uno de los vectores está en el espacio generado por los dos restantes. Pero el espacio generado por dos vectores cualesquiera en  $R^3$  es una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen, o bien, el propio origen (ejercicio 17). En todo caso, el espacio generado por dos vectores en  $R^3$  siempre está en un plano que pasa por el origen.

Se concluye esta sección con un teorema que indica que un conjunto linealmente independiente en  $R^n$  puede contener cuando más  $n$  vectores.

**Teorema 6.** Sea  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  un conjunto de vectores en  $R^n$ . Si  $r > n$ , entonces  $S$  es linealmente dependiente.



**Figura 4.7** (a) Linealmente dependientes. (b) Linealmente dependientes. (c) Linealmente independientes.

*Demostración.* Supóngase que

$$\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n})$$

$$\mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n})$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}_r = (v_{r1}, v_{r2}, \dots, v_{rn})$$

Considérese la ecuación

$$k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Si, como se ilustró en el ejemplo 24, se expresan los dos miembros de esta ecuación en términos de componentes y, a continuación, se igualan las componentes correspondientes, se obtiene el sistema

$$v_{11}k_1 + v_{21}k_2 + \dots + v_{r1}k_r = 0$$

$$v_{12}k_1 + v_{22}k_2 + \dots + v_{r2}k_r = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$v_{1n}k_1 + v_{2n}k_2 + \dots + v_{rn}k_r = 0$$

Este es un sistema homogéneo de  $n$  ecuaciones en las  $r$  incógnitas  $k_1, \dots, k_r$ . Supuesto que  $r > n$ , con base en el teorema 1 de la sección 1.3, se deduce que el sistema tiene soluciones no triviales. Por tanto,  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  es un conjunto linealmente dependiente.

En particular, en este teorema se afirma que un conjunto en  $R^2$ , con más de dos vectores, es linealmente dependiente, y que un conjunto en  $R^3$ , con más de tres vectores, es linealmente dependiente.

#### EJERCICIOS 4.4

1. Dé una explicación de por qué los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes. (Resuelva este problema por simple observación.)

(a)  $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$  y  $\mathbf{u}_2 = (-3, -6)$  en  $R^2$

(b)  $\mathbf{u}_1 = (2, 3)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-5, 8)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (6, 1)$  en  $R^2$

(c)  $\mathbf{p}_1 = 2 + 3x - x^2$  y  $\mathbf{p}_2 = 6 + 9x - 3x^2$  en  $P_2$

(d)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$  en  $M_{22}$

2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en  $R^3$  son linealmente dependientes?

(a)  $(2, -1, 4)$ ,  $(3, 6, 2)$ ,  $(2, 10, -4)$

(b)  $(3, 1, 1)$ ,  $(2, -1, 5)$ ,  $(4, 0, -3)$

(c)  $(6, 0, -1)$ ,  $(1, 1, 4)$

(d)  $(1, 3, 3)$ ,  $(0, 1, 4)$ ,  $(5, 6, 3)$ ,  $(7, 2, -1)$

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en  $R^4$  son linealmente dependientes?

- (a)  $(1, 2, 1, -2), (0, -2, -2, 0), (0, 2, 3, 1), (3, 0, -3, 6)$   
 (b)  $(4, -4, 8, 0), (2, 2, 4, 0), (6, 0, 0, 2), (6, 3, -3, 0)$   
 (c)  $(4, 4, 0, 0), (0, 0, 6, 6), (-5, 0, 5, 5)$   
 (d)  $(3, 0, 4, 1), (6, 2, -1, 2), (-1, 3, 5, 1), (-3, 7, 8, 3)$

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en  $P_2$  son linealmente dependientes?

- (a)  $2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 2 + 10x - 4x^2$   
 (b)  $3 + x + x^2, 2 - x + 5x^2, 4 - 3x^2$   
 (c)  $6 - x^2, 1 + x + 4x^2$   
 (d)  $1 + 3x + 3x^2, x + 4x^2, 5 + 6x + 3x^2, 7 + 2x - x^2$

5. Sea  $V$  el espacio vectorial de todas las funciones con valor real definidas sobre la recta real completa. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en  $V$  son linealmente dependientes?

- (a)  $2, 4 \operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x$  (b)  $x, \cos x$   
 (c)  $1, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x$  (d)  $\cos 2x, \operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x$   
 (e)  $(1+x)^2, x^2 + 2x, 3$  (f)  $0, x, x^2$

6. Supóngase que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  son vectores en  $R^3$  que tienen sus puntos iniciales en el origen. En cada inciso, determine si los tres vectores están en un plano.

- (a)  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{v}_2 = (3, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (1, -1, 0)$   
 (b)  $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4), \mathbf{v}_2 = (4, 2, 3), \mathbf{v}_3 = (2, 7, -6)$

7. Suponga que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  son vectores en  $R^3$  que tienen sus puntos iniciales en el origen. En cada inciso, determine si los tres vectores están en la misma recta.

- (a)  $\mathbf{v}_1 = (3, -6, 9), \mathbf{v}_2 = (2, -4, 6), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$   
 (b)  $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4), \mathbf{v}_2 = (4, 2, 3), \mathbf{v}_3 = (2, 7, -6)$   
 (c)  $\mathbf{v}_1 = (4, 6, 8), \mathbf{v}_2 = (2, 3, 4), \mathbf{v}_3 = (-2, -3, -4)$

8. ¿Para cuáles valores de  $\lambda$  los vectores que siguen forman un conjunto linealmente dependiente en  $R^3$ ?

$$\mathbf{v}_1 = (\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \mathbf{v}_2 = (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}), \mathbf{v}_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda)$$

9. Sea  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  un conjunto de vectores en un espacio vectorial  $V$ . Demuestre que si uno de los vectores es cero, entonces  $S$  es linealmente dependiente.

10. Si  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  es un conjunto linealmente independiente de vectores, demuestre que  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ,  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ ,  $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ,  $\{\mathbf{v}_1\}$ ,  $\{\mathbf{v}_2\}$  y  $\{\mathbf{v}_3\}$  son también conjuntos linealmente independientes.

11. Si  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es un conjunto linealmente independiente de vectores, demuestre que todo conjunto de  $S$  con uno o más vectores también es linealmente independiente.



12. Si  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es un conjunto linealmente dependiente de vectores en un espacio vectorial  $V$ , demuestre que  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  también es linealmente dependiente, en donde  $v_4$  es cualquier otro vector en  $V$ .
13. Si  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es un conjunto linealmente dependiente de vectores en un espacio vectorial  $V$ , demuestre que  $\{v_1, v_2, \dots, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  también es linealmente dependiente, en donde  $v_{r+1}, \dots, v_n$  son otros vectores cualesquiera en  $V$ .
14. Demuestre que todo conjunto con más de tres vectores tomados de  $P_2$  es linealmente dependiente.
15. Demuestre que si  $\{v_1, v_2\}$  es linealmente independiente y  $v_3$  no está en  $\text{lin}\{v_1, v_2\}$ , entonces  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es linealmente independiente.
16. Pruebe que un conjunto con dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los vectores es expresable como una combinación lineal de los valores restantes.
17. Pruebe que el espacio generado por dos vectores en  $R^3$  es una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen, o bien, el propio origen.
18. **(Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.)** Sea  $V$  el espacio vectorial de las funciones con valor real definidas sobre la recta real completa. Si  $f, g$  y  $h$  son vectores en  $V$ , las cuales son doblemente diferenciables, entonces la función  $w = w(x)$  definida por

$$w(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix}$$

se conoce como **wronskiano** de  $f, g$  y  $h$ . Pruebe que  $f, g$  y  $h$  forman un conjunto linealmente independiente si el wronskiano no es el vector cero en  $V$  [es decir,  $w(x)$  no es idénticamente cero].

19. **(Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.)** Utilice el wronskiano (ejercicio 18) para demostrar que los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes.

(a)  $1, x, e^x$     (b)  $\text{sen } x, \text{cos } x, x \text{sen } x$     (c)  $e^x, xe^x, x^2e^x$     (d)  $1, x, x^2$

## 4.5 BASE Y DIMENSION

Por lo común, se concibe una recta como un espacio unidimensional, un plano como uno bidimensional y el espacio que lo rodea a uno como tridimensional. El objetivo principal de esta sección es precisar esta noción intuitiva de dimensión.

**Definición.** Si  $V$  es cualquier espacio vectorial y  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es un conjunto finito de vectores en  $V$ , entonces  $S$  se denomina **base** para  $V$  si

- (i)  $S$  es linealmente independiente;  
 (ii)  $S$  genera a  $V$ .

### Ejemplo 27

Sean  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ . En el ejemplo 23 se señaló que  $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  es un conjunto linealmente independiente en  $R^n$ . Dado que cualquier vector  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  en  $R^n$  se puede escribir como  $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$ ,  $S$  genera a  $R^n$  y, por tanto, es una base. Esta base se conoce como *base estándar para  $R^n$* .

### Ejemplo 28

Sean  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$  y  $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ . Demuéstrese que el conjunto  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  es una base para  $R^3$ .

*Solución.* Para demostrar que  $S$  genera a  $R^3$ , es necesario demostrar que un vector arbitrario  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  se puede expresar como combinación lineal

$$\mathbf{b} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3 \quad (4.3)$$

de los vectores en  $S$ . Al expresar (4.3) en términos de las componentes da

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4)$$

o bien,

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + 2k_2 + 3k_3, 2k_1 + 9k_2 + 3k_3, k_1 + 4k_3)$$

o bien,

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= b_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= b_2 \\ k_1 + 4k_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Por tanto, para demostrar que  $S$  genera a  $V$ , se debe demostrar que el sistema (4.4) tiene una solución para todas las elecciones de  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ . Para probar que  $S$  es linealmente independiente, es necesario demostrar que la única solución de

$$k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

es  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ .

Como se hizo antes, si (4.5) se expresa en términos de las componentes, la verificación de la independencia se reduce a demostrar que el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 + 4k_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

tiene únicamente la solución trivial. Obsérvese que los sistemas (4.4) y (4.6) tienen la misma matriz de coeficiente. Así entonces, por los incisos (a), (b) y (d) del teorema 13 de la sección 1.7, es posible probar simultáneamente que  $S$  es linealmente independiente y que genera a  $R^3$ , demostrando que la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

de los sistemas (4.4) y (4.6) es inversible. Puesto que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

por el teorema 6 de la sección 2.3, se concluye que  $A$  es inversible. Por consiguiente,  $S$  es una base para  $R^3$ .

### Ejemplo 29

El conjunto  $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  es una base para el espacio vectorial  $P_n$  que se introdujo en el ejemplo 13. Por lo visto en el ejemplo 18, los vectores en  $S$  generan a  $P_n$ . A fin de ver que  $S$  es linealmente independiente, supóngase que alguna combinación lineal de vectores en  $S$  es el vector cero, esto es,

$$c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \equiv 0 \quad (4.7)$$

se debe demostrar que  $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ . Con base en lo visto en el Álgebra, un polinomio diferente de cero de grado  $n$  tiene cuando más  $n$  raíces distintas. Dado que (4.7) es una identidad, todo valor de  $x$  es una raíz del primer miembro. Esto implica que  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ ; por otra parte,  $c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$  podría tener cuando más  $n$  raíces. Por tanto, el conjunto  $S$  es linealmente independiente.

La base  $S$  de este ejemplo se conoce como *base estándar para  $P_n$* .

### Ejemplo 30

Sean

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El conjunto  $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$  es una base para el espacio vectorial  $M_{22}$  de matrices de  $2 \times 2$ . A fin de ver que  $S$  genera a  $M_{22}$ , nótese que un vector (matriz) típico

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$



se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$$

Para verificar que  $S$  es linealmente independiente, supóngase que

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = 0$$

es decir,

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto,  $a = b = c = d = 0$  de modo que  $S$  es linealmente independiente.

### Ejemplo 31

Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es un conjunto *linealmente independiente* en un espacio vectorial  $V$ , entonces  $S$  es una base para el subespacio  $\text{lin}(S)$ , ya que  $S$  es independiente y, por definición de  $\text{lin}(S)$ ,  $S$  genera a  $\text{lin}(S)$ .

Se dice que un espacio vectorial diferente de cero  $V$  es de *dimensión finita* si contiene un conjunto finito de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  que forma una base. Si no existe un conjunto de este tipo, se dice que  $V$  es de *dimensión infinita*. Además, se considera el espacio vectorial cero como de dimensión finita, aun cuando no tiene conjuntos linealmente independientes y, como consecuencia, no tiene base.

### Ejemplo 32

Por lo visto en los ejemplos 27, 29 y 30,  $\mathbb{R}^n$ ,  $P_n$  y  $M_{22}$  son espacios vectoriales de dimensión finita.

El siguiente teorema suministra la clave hacia el concepto de dimensión para espacios vectoriales. Con base en él se obtendrán algunos de los resultados más importantes del álgebra lineal.

**Teorema 7.** Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base para un espacio vectorial  $V$ , entonces todo conjunto con más de  $n$  vectores es linealmente dependiente.

*Demostración.* Sea  $S' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  cualquier conjunto de  $m$  vectores en  $V$ , en donde  $m > n$ . Se desea demostrar que  $S'$  es linealmente dependiente. Supuesto que  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base, cada  $w_i$  se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en  $S$ , por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n \\
 \mathbf{w}_2 &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \mathbf{w}_m &= a_{1m}\mathbf{v}_1 + a_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nm}\mathbf{v}_n
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Para demostrar que  $S'$  es linealmente dependiente, se deben hallar los escalares  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , no todos cero, tales que

$$k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \cdots + k_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0} \tag{4.9}$$

Al aplicar las ecuaciones dadas en (4.8), (4.9) se puede volver a escribir como

$$\begin{aligned}
 &(k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_ma_{1m})\mathbf{v}_1 \\
 &+ (k_1a_{21} + k_2a_{22} + \cdots + k_ma_{2m})\mathbf{v}_2 \\
 &\quad \vdots \\
 &+ (k_1a_{n1} + k_2a_{n2} + \cdots + k_ma_{nm})\mathbf{v}_n = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Por tanto, el problema de probar que  $S'$  es un conjunto linealmente dependiente se reduce a demostrar que existen  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , no todos cero, que satisfacen

$$\begin{aligned}
 a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1m}k_m &= 0 \\
 a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2m}k_m &= 0 \\
 \vdots &\vdots \\
 a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nm}k_m &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Dado que (4.10) tiene más incógnitas que ecuaciones, la demostración queda completa, ya que el teorema 1 de la sección 1.3 garantiza la existencia de soluciones no triviales. ■

Como consecuencia, se obtiene el resultado siguiente:

**Teorema 8.** *Dos bases cualesquiera para un espacio vectorial de dimensión finita tiene el mismo número de vectores.*

*Demostración.* Sean  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  y  $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$  dos bases para un espacio vectorial de dimensión finita  $V$ . Dado que  $S$  es una base y  $S'$  es un conjunto linealmente independiente, el teorema 7 implica que  $m \leq n$ . De modo análogo, dado que  $S'$  es una base y  $S$  es linealmente independiente, también se tiene  $n \leq m$ . Por tanto,  $m = n$ . ■

### Ejemplo 33

La base estándar para  $R^n$  contiene  $n$  vectores (ejemplo 27). Por consiguiente, toda base para  $R^n$  contiene  $n$  vectores.

### Ejemplo 34

La base estándar para  $P_n$  (ejemplo 29) contiene  $n + 1$  vectores; así entonces, toda base para  $P_n$  contiene  $n + 1$  vectores.

El número de vectores en una base para un espacio vectorial de dimensión finita es una cantidad en particular importante. Por el ejemplo 33, toda base para  $R^2$  tiene dos vectores y toda base para  $R^3$  tiene tres vectores. Ya que  $R^2$  (el plano) es intuitivamente bidimensional y  $R^3$  es intuitivamente tridimensional, la dimensión de estos espacios es igual al número de vectores que se tienen en sus bases. Esto sugiere la siguiente definición:

**Definición.** La *dimensión* de un espacio vectorial de dimensión finita  $V$  se define como el número de vectores en una base para  $V$ . Además, por definición, el espacio vectorial cero tiene dimensión cero.

Por lo que se vio en los ejemplos 33 y 34,  $R^n$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $P_n$  es un espacio vectorial de dimensión  $n + 1$ .

**Ejemplo 35**

Determinése una base y la dimensión para el espacio de soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &+ x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &- x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

**Solución.** En el ejemplo 8 de la sección 1.3 se demostró que las soluciones están dadas por

$$x_1 = -s - t \quad x_2 = s \quad x_3 = -t \quad x_4 = 0 \quad x_5 = t$$

Por tanto, los vectores solución se pueden escribir como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lo cual demuestra que los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

generan el espacio de soluciones. Dado que estos vectores también son linealmente independientes (verifíquese),  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  es una base, y el espacio de soluciones es bidimensional.

En general, a fin de demostrar que un conjunto de vectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base para un espacio vectorial  $V$  se tiene que demostrar que los vectores son linealmente



independientes y que generan a  $V$ . Sin embargo, si se sabe de antemano que  $V$  tiene dimensión  $n$  (de modo que  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  contiene el número correcto de vectores para tener una base) entonces basta con verificar la independencia lineal, o bien, la generación —la condición restante se satisfará automáticamente. Este es el contenido de los incisos (a) y (b) del teorema siguiente. En el inciso (c) de este teorema se afirma que todo conjunto linealmente independiente forma parte de alguna base para  $V$ .

### Teorema 9.

- (a) Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es un conjunto de  $n$  vectores linealmente independientes en un espacio  $V$  de dimensión  $n$ , entonces  $S$  es una base para  $V$ .
- (b) Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es un conjunto de  $n$  vectores que genera un espacio  $V$  de dimensión  $n$ , entonces  $S$  es una base para  $V$ .
- (c) Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es un conjunto linealmente independiente en un espacio  $V$  de dimensión  $n$  y  $r < n$ , entonces se puede agrandar  $S$  hasta formar una base para  $V$ ; es decir, existen los vectores  $v_{r+1}, \dots, v_n$  tales que  $\{v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  es una base para  $V$ .

Las demostraciones se dejan como ejercicios.

### Ejemplo 36

Demuéstrese que  $v_1 = (-3, 7)$  y  $v_2 = (5, 5)$  forman una base para  $R^2$ .

*Solución.* Dado que ninguno de los vectores es un múltiplo escalar del otro,  $S = \{v_1, v_2\}$  es linealmente independiente. Puesto que  $R^2$  es bidimensional,  $S$  es una base para  $R^2$  con base en el inciso (a) del teorema 9.

### EJERCICIOS 4.5

1. Dé una explicación de por qué los conjuntos siguientes de vectores *no* son bases para los espacios vectoriales que se indican. (Resuelva este problema por simple observación.)

(a)  $u_1 = (1, 2), u_2 = (0, 3), u_3 = (2, 7)$  para  $R^2$

(b)  $u_1 = (-1, 3, 2), u_2 = (6, 1, 1)$  para  $R^3$

(c)  $p_1 = 1 + x + x^2, p_2 = x - 1$  para  $P_2$

(d)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$  para  $M_{22}$

2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para  $R^2$ ?

(a)  $(2, 1), (3, 0)$     (b)  $(4, 1), (-7, -8)$     (c)  $(0, 0), (1, 3)$     (d)  $(3, 9), (-4, -12)$

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para  $R^3$ ?

- (a)  $(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)$       (b)  $(3, 1, -4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)$   
 (c)  $(2, -3, 1), (4, 1, 1), (0, -7, 1)$       (d)  $(1, 6, 4), (2, 4, -1), (-1, 2, 5)$

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para  $P_2$ ?

- (a)  $1 - 3x + 2x^2, 1 + x + 4x^2, 1 - 7x$   
 (b)  $4 + 6x + x^2, -1 + 4x + 2x^2, 5 + 2x - x^2$   
 (c)  $1 + x + x^2, x + x^2, x^2$   
 (d)  $-4 + x + 3x^2, 6 + 5x + 2x^2, 8 + 4x + x^2$

5. Demuestre que el conjunto siguiente de vectores es una base para  $M_{22}$ .

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Sea  $V$  el espacio generado por  $\mathbf{v}_1 = \cos^2 x, \mathbf{v}_2 = \sin^2 x, \mathbf{v}_3 = \cos 2x$ .

- (a) Demuestre que  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  no es una base para  $V$ .  
 (b) Halle una base para  $V$ .

En los ejercicios 7 al 12 determine la dimensión del espacio de soluciones del sistema que se da y encuentre una base para él.

7. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8. 
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

9. 
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

10. 
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

11. 
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

12. 
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 0 \\ 4x + 3y - z &= 0 \\ 6x + 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

13. Determine bases para los subespacios de  $R^3$  que siguen:

(a) El plano  $3x - 2y + 5z = 0$

(b) El plano  $x - y = 0$   

$$x = 2t$$

(c) La recta  $y = -t - \infty < t < +\infty$   

$$z = 4t$$

(d) Todos los vectores de la forma  $(a, b, c)$ , en donde  $b = a + c$

14. Determine las dimensiones de los siguientes subespacios de  $R^4$ .

(a) Todos los vectores de la forma  $(a, b, c, 0)$

(b) Todos los vectores de la forma  $(a, b, c, d)$ , en donde  $d = a + b$  y  $c = a - b$ .

(c) Todos los vectores de la forma  $(a, b, c, d)$ , en donde  $a = b = c = d$

15. Determine la dimensión del subespacio de  $P_3$  que consta de todos los polinomios  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ , para los cuales  $a_0 = 0$ .
16. Sea  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  una base para un espacio vectorial  $V$ . Demuestre que  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  también es una base, en donde  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ .
17. Demuestre que el espacio vectorial de todas las funciones con valor real definidas sobre la recta real completa es de dimensión infinita. (*Sugerencia.* Suponga que es de dimensión finita y que su dimensión es  $n$  y obtenga una contradicción al producir  $n + 1$  vectores linealmente independientes.)
18. Demuestre que un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita es de dimensión finita.
19. Sea  $V$  un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita  $W$ . Demuestre que  $\dim(V) \leq \dim(W)$  (*Sugerencia.* Por lo visto en el ejercicio 18,  $V$  es de dimensión finita.)
20. Demuestre que los únicos subespacios de  $R^3$  son rectas que pasan por el origen, planos que pasan por el origen, el subespacio cero y el propio  $R^3$ . (*Sugerencia.* Por lo visto en el ejercicio 19, los subespacios de  $R^3$  deben ser de dimensión 0, dimensión 1, dimensión 2, o bien, de dimensión 3.)
21. Pruebe el inciso (a) del teorema 9.
22. Pruebe el inciso (b) del teorema 9.
23. Pruebe el inciso (c) del teorema 9.

#### 4.6 ESPACIO DE RENGLONES Y COLUMNAS DE UNA MATRIZ; RANGO; APLICACIONES PARA HALLAR BASES

En esta sección se estudian ciertos espacios vectoriales asociados con las matrices. Los resultados suministrarán un procedimiento sencillo para encontrar bases, reduciendo una matriz apropiada a una forma escalonada en los renglones.

**Definición.** Considérese la matriz de  $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los vectores

$$\mathbf{r}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

$$\mathbf{r}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{r}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$



formados a partir de los renglones de  $A$  se conocen como **vectores renglón** de  $A$ , y los vectores

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

formados a partir de las columnas de  $A$  se llaman **vectores columna** de  $A$ . El subespacio de  $R^n$  generado por los vectores renglón es el **espacio de renglones** de  $A$ , y el subespacio de  $R^m$  generado por los vectores columna es el **espacio de columnas** de  $A$ .

### Ejemplo 37

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Los vectores renglón de  $A$  son

$$\mathbf{r}_1 = (2, 1, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2 = (3, -1, 4)$$

y los vectores columnas de  $A$  son

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

El teorema siguiente ayuda a encontrar bases para los espacios vectoriales; su demostración se difiere hasta el final de la sección

**Teorema 10.** *Las operaciones elementales sobre los renglones no cambian el espacio de renglones de una matriz.*

Con base en este teorema se deduce que el espacio de renglones de una matriz  $A$  permanece inalterado al reducirla hasta una forma escalonada en los renglones. Sin embargo, los vectores renglón diferentes de cero de una matriz en la forma escalonada en los renglones siempre son lineales independientes (ejercicio 17), de modo que estos vectores renglón diferentes de cero forman una base para el espacio de renglones. Así entonces, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 11.** *Los vectores renglón diferentes de cero en una forma escalonada en los renglones de una matriz  $A$  forman una base para el espacio de renglones de  $A$ .*

### Ejemplo 38

Encuétrase una base para el espacio generado por los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3) \quad \mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, -2, 6) \quad \mathbf{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0) \\ \mathbf{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$$

*Solución.* El espacio generado por estos vectores es el espacio de renglones de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Al poner esta matriz en forma escalonada en los renglones se obtiene (verifíquese):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los vectores renglón diferentes de cero en esta matriz son

$$\mathbf{w}_1 = (1, -2, 0, 0, 3) \quad \mathbf{w}_2 = (0, 1, 3, 2, 0) \quad \mathbf{w}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

Estos vectores forman una base para el espacio de renglones y, como consecuencia, una base para el espacio generado por  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_3$  y  $\mathbf{v}_4$ .

**OBSERVACION.** Se han estado escribiendo los vectores renglón de una matriz en notación horizontal, y los vectores columna en notación vertical (matricial), debido a que esto parece más natural. Sin embargo, no hay razón alguna de por qué no puedan escribirse los vectores renglón en notación vertical y los vectores columna en notación horizontal, si así resulta conveniente.

Teniendo en cuenta esta observación, es evidente que, excepto por un cambio de notación vertical a horizontal, el espacio de columnas de una matriz es el mismo que el espacio de renglones de su transpuesta. Por tanto, si se desea, se puede encontrar una base para el espacio de columnas de una matriz  $A$ , encontrando una base para el espacio de renglones de  $A^t$  y, a continuación, regresando a la notación vertical.

### Ejemplo 39

Hállese una base para el espacio de columnas de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

*Solución.* Al transponer se obtiene

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

y al realizar la reducción hacia una forma escalonada en los renglones se llega a (verifíquese)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, los vectores  $(1, 3, 0)$  y  $(0, 1, 2)$  forman una base para el espacio de renglones de  $A^t$  o, lo que es equivalente,

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

forman una base para el espacio de columnas de  $A$ .

En el ejemplo 38, se aplicó la reducción en los renglones a fin de encontrar una base para el espacio generado por un conjunto de vectores. Sin embargo, ese método puede producir vectores base que no se encuentren entre los vectores del conjunto original. Ahora se muestra cómo producir una base que sea un *subconjunto* del conjunto dado de vectores. La idea es eliminar vectores del conjunto dado que sean combinaciones lineales del resto, dejando en consecuencia un conjunto de vectores linealmente independientes que generen el mismo espacio que el conjunto original de vectores. El método, el cual se aplica únicamente a vectores en  $R^n$ , se explica por medio de un ejemplo.

**Ejemplo 40**

Encuétrase un subconjunto de los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1, -2, 0, 3), & \mathbf{v}_2 &= (2, -5, -3, 6) \\ \mathbf{v}_3 &= (0, 1, 3, 0), & \mathbf{v}_4 &= (2, -1, 4, -7), & \mathbf{v}_5 &= (5, -8, 1, 2) \end{aligned}$$

que forme una base para el espacio generado por estos vectores

*Solución.* Se principia por resolver la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 + c_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0} \tag{4.11}$$

Al sustituir las componentes y, a continuación, igualar las componentes correspondientes de los dos miembros de (4.11) se llega al sistema homogéneo



$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 2c_4 + 5c_5 &= 0 \\ -2c_1 - 5c_2 + c_3 - c_4 - 8c_5 &= 0 \\ -3c_2 + 3c_3 + 4c_4 + c_5 &= 0 \\ 3c_1 + 6c_2 - 7c_4 + 2c_5 &= 0 \end{aligned}$$

Al obtener este sistema por la eliminación de Gauss-Jordan se obtiene (verifíquese):

$$c_1 = -2s - t, \quad c_2 = s - t, \quad c_3 = s, \quad c_4 = -t, \quad c_5 = t \quad (4.12)$$

en donde  $s$  y  $t$  son arbitrarios. Sustituyendo (4.12) en (4.11), se obtiene

$$(-2s - t)\mathbf{v}_1 + (s - t)\mathbf{v}_2 + s\mathbf{v}_3 - t\mathbf{v}_4 + t\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$$

lo cual se puede volver a escribir como

$$s(-2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + t(-\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5) = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

Ya que  $s$  y  $t$  son arbitrarias, es posible hacer  $s = 1, t = 0$  y, entonces  $s = 0, t = 1$ . Esto conduce a las **ecuaciones de dependencia**

$$\begin{aligned} -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Con estas ecuaciones se pueden expresar los vectores  $\mathbf{v}_3$  y  $\mathbf{v}_5$  como combinaciones lineales de los vectores *precedentes* (es decir, los vectores con subíndices menores) Se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_5 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \end{aligned} \quad (4.15)$$

lo cual indica que es posible descartar  $\mathbf{v}_3$  y  $\mathbf{v}_5$  del conjunto original, sin afectar el espacio generado.

A continuación se demuestra que los vectores restantes  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_4$  son linealmente independientes y, por tanto, forman una base para el espacio generado por  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$  y  $\mathbf{v}_5$ . Si

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

entonces (4.11) se cumple con  $c_3 = 0$  y  $c_5 = 0$ . Por tanto (4.12) se cumple con  $s = c_3 = 0$  y  $t = c_5 = 0$ . A partir de las ecuaciones restantes en (4.12), se deduce que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \text{y} \quad c_4 = 0$$

lo cual prueba que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_4$  son linealmente independientes.

OBSERVACION. Aun cuando se omite la demostración, se puede demostrar que después de aplicar las ecuaciones de dependencia, a fin de eliminar aquellos vectores que dependen de

los precedentes, los vectores restantes siempre serán linealmente independientes. Por consiguiente, no es necesario verificar la independencia como se hizo en el último ejemplo.

El teorema que sigue es uno de los resultados más fundamentales del álgebra lineal. La demostración se deja hasta el final de esta sección.

**Teorema 12.** *Si  $A$  es una matriz cualquiera, entonces el espacio de renglones y el espacio de columnas de  $A$  tienen la misma dimensión.*

**Ejemplo 41**

En el ejemplo 39 se vio que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

tiene un espacio de columnas bidimensional. Por consiguiente, en el teorema 12 se afirma que el espacio de renglones también es bidimensional. Para comprobar que, de hecho, este es el caso, se reduce  $A$  a una forma escalonada en los renglones, obteniendo (verifíquese)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que esta matriz tiene dos renglones diferentes de cero, el espacio de renglones de  $A$  es bidimensional.

**Definición.** La dimensión del espacio de renglones y columnas de una matriz  $A$  se conoce como **rango** de  $A$ .

Por ejemplo, la matriz  $A$  de los ejemplos 39 y 41 tiene rango 2.

El siguiente teorema agrega tres resultados más a los del teorema 13 de la sección 1.7 y del teorema 6 de la sección 2.3.

**Teorema 13.** *Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces las proposiciones que siguen son equivalentes.*

- (a)  $A$  es inversible.
- (b)  $Ax = 0$  tiene únicamente la solución trivial.
- (c)  $A$  es equivalente, respecto a los renglones, a  $I_n$ .
- (d)  $Ax = b$  es consistente para toda matriz  $b$  de  $n \times 1$ .
- (e)  $\det(A) \neq 0$
- (f)  $A$  tiene rango  $n$
- (g) Los vectores renglón de  $A$  son linealmente independientes.
- (h) Los vectores columna de  $A$  son linealmente independientes.

**Demostración.** Se demostrará que (c), (f), (g) y (h) son equivalentes, probando la sucesión de implicaciones (c)  $\Rightarrow$  (f)  $\Rightarrow$  (g)  $\Rightarrow$  (h)  $\Rightarrow$  (c).

Esto completa la demostración puesto que ya se sabe que (c) equivale a (a), (b), (d) y (e).

(c)  $\Rightarrow$  (f) Supuesto que  $A$  es equivalente, respecto a los renglones, a  $I_n$  y  $I_n$  tiene  $n$  renglones diferentes de cero, el espacio de renglones de  $A$  es de dimensión  $n$ , por el teorema 11. Por consiguiente,  $A$  tiene rango  $n$ .

(f)  $\Rightarrow$  (g) Supuesto que  $A$  tiene rango  $n$ , el espacio de renglones de  $A$  es de dimensión  $n$ . Ya que los  $n$  vectores renglón de  $A$  generan el espacio de renglones de  $A$ , por el teorema 9 de la sección 4.5 se concluye que los vectores renglón de  $A$  son linealmente independientes.

(g)  $\Rightarrow$  (h) Supóngase que los vectores renglón de  $A$  son linealmente independientes. Así entonces, el espacio de renglones de  $A$  es de dimensión  $n$ . Por el teorema 12, el espacio de columnas de  $A$  también tiene dimensión  $n$ . Dado que los vectores columna de  $A$  generan el espacio de columnas, los vectores columna de  $A$  son linealmente independientes, con base en el teorema 9 de la sección 4.5.

(h)  $\Rightarrow$  (c) Supóngase que los vectores columna de  $A$  son linealmente independientes. Por tanto, el espacio de columnas de  $A$  tiene dimensión  $n$  y, como consecuencia, el espacio de renglones de  $A$ , por el teorema 12, también es de dimensión  $n$ . Esto significa que la forma escalonada en los renglones reducida de  $A$  tiene  $n$  renglones diferentes de cero, es decir, todos los renglones son diferentes de cero. Como se hizo notar en el ejemplo 24 de la sección 2.3, esto implica que la forma escalonada en los renglones reducida de  $A$  es  $I_n$ . Así entonces,  $A$  es equivalente, respecto a los renglones, a  $I_n$ . ■

Es interesante hacer notar que el teorema 13 reúne todos los temas principales que se han estudiado hasta aquí: matrices, sistemas de ecuaciones, determinantes y espacios vectoriales.

Se concluye esta sección con un resultado adicional acerca de los sistemas de ecuaciones lineales. Considérese un sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b$$

o, lo que es equivalente,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Al hacer la multiplicación de las matrices que se encuentran en el primer miembro, se puede volver a escribir este sistema como

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

o bien,

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$



Dado que el primer miembro de esta ecuación es una combinación lineal de los vectores columna de  $A$ , se deduce que el sistema  $Ax = b$  es consistente si, y sólo si,  $b$  es una combinación lineal de los vectores columna de  $A$ . Por tanto, se tiene el útil teorema que sigue:

**Teorema 14.** *Un sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$  es consistente si y sólo si  $b$  está en el espacio de columnas de  $A$ .*

**OPCIONAL**

**Demostración del teorema 10.** Supóngase que los vectores renglón de una matriz  $A$  son  $r_1, r_2, \dots, r_m$  y que se obtiene  $B$  a partir de  $A$ , efectuando una operación elemental sobre los renglones. Se demostrará que todo vector en el espacio de renglones de  $B$  también está en el espacio de renglones de  $A$  e, inversamente, que todo vector que está en el espacio de renglones de  $A$  está en el espacio de renglones de  $B$ . Entonces es posible concluir que  $A$  y  $B$  tienen el mismo espacio de renglones.

Considérese las posibilidades. Si la operación sobre los renglones es un intercambio de los mismos, entonces  $B$  y  $A$  tienen los mismos vectores renglón y, como consecuencia, el mismo espacio de renglones. Si la operación sobre los renglones es la multiplicación de uno de ellos por un escalar, o la adición de un múltiplo de uno de los renglones a otro, entonces los vectores renglón  $r'_1, r'_2, \dots, r'_m$  de  $B$  son combinaciones lineales de  $r_1, r_2, \dots, r_m$ ; por consiguiente, están en el espacio de renglones de  $A$ . Dado que un espacio vectorial es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar, todas las combinaciones lineales de  $r'_1, r'_2, \dots, r'_m$  también estarán en el espacio de renglones de  $A$ . Por tanto, cada vector del espacio de renglones de  $B$  está en el espacio de renglones de  $A$ .

Supuesto que  $B$  se obtiene a partir de  $A$  al efectuar una operación sobre los renglones, se puede obtener  $A$  a partir de  $B$ , efectuando la operación inversa (sección 1.7). Por consiguiente, el argumento que se da indica que el espacio de renglones de  $A$  está contenido en el espacio de renglones de  $B$ .

**OPCIONAL**

**Demostración del teorema 12.** Denótense los vectores renglón de

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

por  $r_1, r_2, \dots, r_m$

Supóngase que el espacio de renglones de  $A$  tiene dimensión  $k$  y que  $S = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$  es una base para el espacio de renglones, en donde  $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$ . Supuesto que  $S$  es una base para el espacio de renglones, cada vector renglón se puede expresar como una combinación lineal de  $b_1, b_2, \dots, b_k$ ; por tanto,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_1 &= c_{11}\mathbf{b}_1 + c_{12}\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{1k}\mathbf{b}_k \\
 \mathbf{r}_2 &= c_{21}\mathbf{b}_1 + c_{22}\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{2k}\mathbf{b}_k \\
 &\vdots \\
 \mathbf{r}_m &= c_{m1}\mathbf{b}_1 + c_{m2}\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{mk}\mathbf{b}_k
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

Ya que dos vectores en  $R^n$  son iguales si y sólo si las componentes correspondientes son iguales, se pueden igualar las  $j$ -ésimas componentes de cada lado de (4.16), para obtener

$$\begin{aligned}
 a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + c_{12}b_{2j} + \cdots + c_{1k}b_{kj} \\
 a_{2j} &= c_{21}b_{1j} + c_{22}b_{2j} + \cdots + c_{2k}b_{kj} \\
 &\vdots \\
 a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + c_{m2}b_{2j} + \cdots + c_{mk}b_{kj}
 \end{aligned}$$

o, lo que es equivalente,

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = b_{1j} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + b_{2j} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + b_{kj} \begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{mk} \end{bmatrix}
 \tag{4.17}$$

El primer miembro de esta ecuación es el  $j$ -ésimo vector columna de  $A$  y  $j = 1, 2, \dots, n$  es arbitrario; por tanto, cada vector columna de  $A$  está en el espacio generado por los  $k$  vectores del segundo miembro de (4.17). Por consiguiente, el espacio de columnas de  $A$  tiene dimensión  $\leq k$ . Ya que

$$k = \dim(\text{espacio de renglones de } A)$$

se tiene

$$\dim(\text{espacio de columnas de } A) \leq \dim(\text{espacio de renglones de } A). \tag{4.18}$$

Supuesto que la matriz  $A$  es completamente arbitraria, se aplica esta misma conclusión a  $A^t$ , es decir,

$$\dim(\text{espacio de columnas de } A^t) \leq \dim(\text{espacio de renglones de } A^t) \tag{4.19}$$

Pero al transponer una matriz se convierten las columnas en renglones y los renglones en columnas de modo que

$$\text{espacio de columnas } A^t = \text{espacio de renglones de } A$$

y

$$\text{espacio de renglones de } A^t = \text{espacio de columnas de } A$$

Por tanto, (4.19) se puede volver a escribir como

$$\dim(\text{espacio de renglones de } A) \leq \dim(\text{espacio de columnas de } A)$$

Con base en este resultado y (4.18) se concluye que

$$\dim(\text{espacio de renglones de } A) = \dim(\text{espacio de columnas de } A) \blacksquare$$

### EJERCICIOS 4.6

1. Liste los vectores renglón y los vectores columna de la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 2 a 5 halle: (a) una base para el espacio de renglones; (b) una base para el espacio de columnas; (c) el rango de la matriz.

2.  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$       3.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$       4.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

5.  $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

6. Halle una base para el subespacio de  $R^4$  generado por los vectores que se dan.

- (a)  $(1, 1, -4, -3)$ ,  $(2, 0, 2, -2)$ ,  $(2, -1, 3, 2)$   
 (b)  $(-1, 1, -2, 0)$ ,  $(3, 3, 6, 0)$ ,  $(9, 0, 0, 3)$   
 (c)  $(1, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 1)$ ,  $(-2, 0, 2, 2)$ ,  $(0, -3, 0, 3)$

7. Verifique que el espacio de renglones y el espacio de columnas tienen la misma dimensión (como lo garantiza el teorema 12).

(a)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$       (b)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 8 al 9, aplique el método del ejemplo 40 para: (a) encontrar un subconjunto de los vectores que forme una base para el espacio generado por los propios vectores; (b) expresar cada  $\mathbf{v}_i$  que no esté en la base como una combinación lineal de los vectores base.

8.  $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 5, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (-2, 3, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (4, -5, 9, 4)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (0, 4, 2, -3)$ ,  $\mathbf{v}_5 = (-7, 18, 2, -8)$

9.  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (-3, 3, 7, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-1, 3, 9, 3)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (-5, 3, 5, -1)$



10. En cada inciso, encuentre una base para el espacio de renglones que conste por completo de vectores renglón, y encuentre una base para el espacio de columnas que conste completamente de vectores columna.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ -3 & 6 & 12 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

11. (a) Si  $A$  es una matriz de  $3 \times 5$ , ¿cuál es el valor máximo posible para el rango de  $A$ ?  
 (b) Si  $A$  es una matriz de  $m \times n$ , ¿cuál es el valor máximo posible para el rango de  $A$ ?
12. En cada inciso, determine si  $\mathbf{b}$  está en el espacio de columnas de  $A$ . Si lo está, exprese  $\mathbf{b}$  como una combinación lineal de los vectores columna.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

13. (a) Pruebe que si  $A$  es una matriz de  $3 \times 5$ , entonces los vectores columna de  $A$  son linealmente dependientes.  
 (b) Pruebe que si  $A$  es una matriz de  $5 \times 3$ , entonces los vectores renglón de  $A$  son linealmente dependientes.

14. Pruebe que si  $A$  es una matriz que no es cuadrada, entonces los vectores renglón de  $A$ , o bien, los vectores columna de  $A$  son linealmente dependientes.

15. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Pruebe:  $A$  tiene rango 2 si y sólo si uno o más de los determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

es diferente a cero.

16. Pruebe que un sistema de ecuaciones  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es consistente si y sólo si el rango de su matriz aumentada es igual al rango de  $A$ .

17. Pruebe el teorema 11.

18. Pruebe que los vectores renglón de una matriz inversible  $A$  de  $n \times n$  forman una base para  $R^n$ .

### 4.7 ESPACIOS DE PRODUCTOS INTERIORES

En la sección 4.1 se estudió el producto euclidiano interior sobre el espacio vectorial  $R^n$ . En esta sección se introduce la noción de un producto interior sobre un espacio vectorial arbitrario. Como consecuencia de lo que se vea, se podrá definir con todo significado las nociones de ángulo, longitud y distancia en espacios vectoriales más generales.

En el teorema 2 de la sección 4.1, se reunieron las propiedades más importantes del producto euclidiano interior. En un espacio vectorial general, un producto interior se define automáticamente aplicando estas propiedades como axiomas.

**Definición.** Un *producto interior* sobre un espacio vectorial  $V$  es una función que asocia un número real  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  con cada pareja de vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en  $V$ , de tal manera que se satisfacen los axiomas siguientes por todos los vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  en  $V$  y todos los escalares  $k$ .

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$  (axioma de simetría)
- (2)  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$  (axioma de aditividad)
- (3)  $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  (axioma de homogeneidad)
- (4)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$  and  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  (axioma de positividad)  
si y sólo si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Un espacio vectorial con un producto interior se conoce como *espacio de productos interiores*.

Las siguientes propiedades adicionales se deducen de inmediato a partir de los cuatro axiomas de los productos interiores:

- (i)  $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$
- (ii)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
- (iii)  $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

Se probará (ii) y se dejan (i) e (iii) como ejercicios.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle && \text{(por simetría)} \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle && \text{(por aditividad)} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle && \text{(por simetría)} \end{aligned}$$

#### Ejemplo 42

Sean  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ; el producto euclidiano interior  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$  satisface todos los axiomas del producto interior, por lo expresado en el teorema 2 de la sección 4.1.

#### Ejemplo 43

Si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  son vectores en  $R^2$ , entonces

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

define un producto interior. A fin de verificarlo, nótese primero que si se intercambian  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en esta ecuación, entonces el segundo miembro permanece inalterado. Por tanto,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

Si  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ , entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\ &= (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \end{aligned}$$

lo cual establece el segundo axioma.

A continuación,

$$\begin{aligned} \langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= 3(ku_1)v_1 + 2(ku_2)v_2 \\ &= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2) \\ &= k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

lo cual establece el tercer axioma.

Por último,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3v_1v_1 + 2v_2v_2 = 3v_1^2 + 2v_2^2$$

Obviamente,  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0$ . Además  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3v_1^2 + 2v_2^2 = 0$  si y sólo si  $v_1 = v_2 = 0$ ; es decir, si y sólo si  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \mathbf{0}$ . Por tanto, se satisface, el cuarto axioma.

El producto interior de este ejemplo es diferente del producto euclidiano interior sobre  $R^2$ ; esto indica que un espacio vectorial puede tener más de un producto interior.

#### Ejemplo 44

Si

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

son dos matrices cualesquiera de  $2 \times 2$ , entonces la fórmula que sigue define un producto interior sobre  $M_{22}$  (verifíquese):

$$\langle U, V \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

Por ejemplo, si

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\langle U, V \rangle = 1(-1) + 2(0) + 3(3) + 4(2) = 16$$



**Ejemplo 45**

Si

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

son dos vectores cualesquiera en  $P_2$ , entonces la siguiente fórmula define un producto interior sobre  $P_2$  (verifíquese):

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

**Ejemplo 46**

**(Para los lectores que hayan estudiado Cálculo).**

Sean  $\mathbf{p} = p(x)$  y  $\mathbf{q} = q(x)$  dos polinomios en  $P_n$  y defínase

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_a^b p(x)q(x) dx \tag{4.20}$$

en donde  $a$  y  $b$  son números reales fijos cualesquiera tales que  $a < b$ . Se demostrará que (4.20) define un producto interior sobre  $P_n$ .

$$(1) \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_a^b p(x)q(x) dx = \int_a^b q(x)p(x) dx = \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle$$

lo cual prueba que se cumple el axioma 1.

$$\begin{aligned} (2) \langle \mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{s} \rangle &= \int_a^b (p(x) + q(x))s(x) dx \\ &= \int_a^b p(x)s(x) dx + \int_a^b q(x)s(x) dx \\ &= \langle \mathbf{p}, \mathbf{s} \rangle + \langle \mathbf{q}, \mathbf{s} \rangle \end{aligned}$$

lo cual prueba que se cumple el axioma 2.

$$(3) \langle k\mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_a^b kp(x)q(x) dx = k \int_a^b p(x)q(x) dx = k \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

lo cual prueba que se cumple el axioma 3.

(4) Si  $\mathbf{p} = p(x)$  es cualquier polinomio en  $P_n$ , entonces  $p^2(x) \geq 0$  para toda  $x$ ; por tanto,

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \int_a^b p^2(x) dx \geq 0$$

Además, dado que  $p^2(x) \geq 0$  y los polinomios son funciones continuas,  $\int_a^b p^2(x) dx = 0$  si y sólo si  $p(x) = 0$  para toda  $x$  que satisface  $a \leq x \leq b$ . Por tanto,  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \int_a^b p^2(x) dx = 0$  si y sólo si  $p = 0$ . Esto establece el axioma 4.

Conviene hacer notar que los argumentos dados aquí sólo se pueden aplicar para demostrar que el espacio vectorial  $C[a, b]$  analizado en el ejemplo 14 es un espacio de productos interiores bajo el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores diferentes de cero en  $R^3$ , entonces  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ , en donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  (sección 3.3). Si se elevan al cuadrado los dos miembros de esta desigualdad y se aplican las relaciones  $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ ,  $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  y  $\cos^2 \theta \leq 1$ , se obtiene la desigualdad

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

En el siguiente teorema se muestra que esta desigualdad se puede generalizar hacia cualquier espacio de productos interiores. La desigualdad restante, conocida como *desigualdad de Cauchy-Schwarz*, permite introducir las nociones de longitud y ángulo en cualquier espacio de productos interiores.

**Teorema 15. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz\*).** Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores en un espacio de productos interiores  $V$ , entonces

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

*Demostración.* Se advierte de antemano al lector que la demostración aquí presentada depende de un artificio hábil pero sin motivación alguna. Si  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , entonces  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ , de modo que evidentemente, la igualdad se cumple. Supóngase ahora que  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ . Sean  $a = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ ,  $b = 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ,  $c = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$  y  $t$  cualquier número real. Por el axioma de positividad, el producto interior de cualquier vector por sí mismo siempre es no negativo. Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle (t\mathbf{u} + \mathbf{v}), (t\mathbf{u} + \mathbf{v}) \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= at^2 + bt + c \end{aligned}$$

Esta desigualdad implica que el polinomio cuadrático  $at^2 + bt + c$  no tiene raíces reales, o bien, tiene una raíz repetida. Por tanto, su discriminante debe satisfacer  $b^2 - 4ac \leq 0$ . Al expresar  $a$ ,  $b$  y  $c$  en términos de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  da  $4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq 0$ ; o, de modo equivalente,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ .

#### Ejemplo 47

Si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  son dos vectores cualesquiera en  $R^n$ , entonces la desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicada a  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  da por resultado

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)$$

la cual se conoce como *desigualdad de Cauchy*.

\*Augustin Louis (Barón de) Cauchy (1789-1857). A veces considerado como el padre del análisis moderno. Cauchy ayudó a poner al Cálculo sobre bases matemáticas firmes. Fue partidario de los Borbones y pasó varios años en el exilio por sus relaciones políticas.

Hermann Amandus Schwarz (1843-1921). Matemático alemán.

**EJERCICIOS 4.7**

1. Calcule  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  aplicando el producto interior del ejemplo 43.

- (a)  $\mathbf{u} = (2, -1), \mathbf{v} = (-1, 3)$       (b)  $\mathbf{u} = (0, 0), \mathbf{v} = (7, 2)$   
 (c)  $\mathbf{u} = (3, 1), \mathbf{v} = (-2, 9)$       (d)  $\mathbf{u} = (4, 6), \mathbf{v} = (4, 6)$

2. Repita el ejercicio 1 aplicando el producto euclidiano interior sobre  $R^2$ .

3. Calcule  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  aplicando el producto interior del ejemplo 44.

- (a)  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$        $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$       (b)  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$        $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

4. Calcule  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$  aplicando el producto interior del ejemplo 45.

- (a)  $\mathbf{p} = -1 + 2x + x^2$        $\mathbf{q} = 2 - 4x^2$   
 (b)  $\mathbf{p} = -3 + 2x + x^2$        $\mathbf{q} = 2 + 4x - 2x^2$

5. Sean  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Demuestre que las siguientes expresiones son productos interiores sobre  $R^2$ .

- (a)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 6u_1v_1 + 2u_2v_2$   
 (b)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + u_1v_2 + 2u_2v_2$

6. Sean  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Determine cuáles de las expresiones siguientes son productos interiores sobre  $R^3$ . Para las que no lo sean, liste los axiomas que no se cumplen.

- (a)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$   
 (b)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$   
 (c)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$   
 (d)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$

7. Sean  $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$  y  $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$

Determine si  $\langle U, V \rangle = u_1v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_4$  es un producto interior sobre  $M_{22}$ .

8. Sean  $\mathbf{p} = p(x)$  y  $\mathbf{q} = q(x)$  polinomios en  $P_2$ . Demuestre que  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p(0)q(0) + p(1/2)q(1/2) + p(1)q(1)$  es un producto interior sobre  $P_2$ .

9. Verifique la desigualdad de Cauchy-Schwarz para

- (a)  $\mathbf{u} = (2, 1)$  y  $\mathbf{v} = (1, -3)$ , aplicando el producto interior del ejemplo 43.  
 (b)  $\mathbf{u} = (2, 1, 5)$  y  $\mathbf{v} = (1, -3, 4)$ , aplicando el producto euclidiano interior

(c)  $U = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$  y  $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

aplicando el producto interior del ejemplo 44



(d)  $\mathbf{p} = 1 + 2x + x^2$  y  $\mathbf{q} = 2 - 4x^2$ , aplicando el producto interior del ejemplo 45.

10. Suponga que  $R^2$  tiene el producto euclidiano interior. Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los vectores  $\mathbf{u} = (a, b)$ ,  $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$  para demostrar que  $|a \cos \theta + b \sin \theta|^2 \leq a^2 + b^2$ .
11. Pruebe que si  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  es cualquier producto interior, entonces  $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$ .
12. Pruebe que si  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  es cualquier producto interior y  $k$  es un escalar cualquiera, entonces  $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = k \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ .
13. Demuestre que se cumple la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz si y sólo si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son linealmente dependientes.
14. Sean  $c_1, c_2$  y  $c_3$  números reales positivos y suponga que  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Demuestre que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c_1 u_1 v_1 + c_2 u_2 v_2 + c_3 u_3 v_3$  es un producto interior sobre  $R^3$ .
15. Sean  $c_1, c_2, \dots, c_n$  números reales positivos y suponga que  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Demuestre que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c_1 u_1 v_1 + c_2 u_2 v_2 + \dots + c_n u_n v_n$  es un producto interior sobre  $R_n$ .

16. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo). Aplique el producto interior

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

para calcular  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$  para los vectores  $\mathbf{p} = p(x)$  y  $\mathbf{q} = q(x)$  en  $P_3$ .

$$\begin{aligned} \text{(a) } \mathbf{p} &= 1 - x + x^2 + 5x^3 & \mathbf{q} &= x - 3x^2 \\ \text{(b) } \mathbf{p} &= x - 5x^3 & \mathbf{q} &= 2 + 8x^2 \end{aligned}$$

17. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo). Aplique el producto interior

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

a fin de calcular  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$  para los vectores  $\mathbf{f} = f(x)$  y  $\mathbf{g} = g(x)$  en  $C[0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \text{(a) } \mathbf{f} &= \cos 2\pi x & \mathbf{g} &= \sin 2\pi x \\ \text{(b) } \mathbf{f} &= x & \mathbf{g} &= e^x \end{aligned}$$

$$\text{(c) } \mathbf{f} = \tan \frac{\pi}{4} x \quad \mathbf{g} = 1$$

18. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo). Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones continuas sobre  $[0, 1]$ . Pruebe que

$$\text{(a) } \left[ \int_0^1 f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \left[ \int_0^1 f^2(x) dx \right] \left[ \int_0^1 g^2(x) dx \right]$$

$$(b) \left[ \int_0^1 [f(x) + g(x)]^2 dx \right]^{1/2} \leq \left[ \int_0^1 f^2(x) dx \right]^{1/2} + \left[ \int_0^1 g^2(x) dx \right]^{1/2}$$

(Sugerencia. Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el producto interior del ejercicio 17).

## 4.8 LONGITUD Y ANGULO EN LOS ESPACIOS DE PRODUCTOS INTERIORES

En esta sección se aplica de desigualdad de Cauchy-Schwarz para desarrollar las nociones de longitud, distancia y ángulo en los espacios de productos interiores generales.

**Definición.** Si  $V$  es un espacio de productos interiores, entonces la **norma** (o longitud) de un vector  $\mathbf{u}$  se denota por  $\|\mathbf{u}\|$  y se define por

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}$$

Además, la **distancia** entre dos puntos (vectores)  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  se denota por  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  y se define por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

### Ejemplo 48

Si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  son vectores en  $R^n$  con el producto euclidiano interior, entonces

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

y

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle^{1/2} \\ &= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2} \end{aligned}$$

Obsérvese que éstas son precisamente las fórmulas para la norma y distancia euclidianas analizadas en la sección 4.1.

### Ejemplo 49

Supóngase que  $R^2$  tiene el producto interior  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$  analizado en el ejemplo 43. Si  $\mathbf{u} = (1, 0)$  y  $\mathbf{v} = (0, 1)$  entonces

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = [3(1)(1) + 2(0)(0)]^{1/2} = \sqrt{3}$$

y

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle (1, -1), (1, -1) \rangle^{1/2} \\ = [3(1)(1) + 2(-1)(-1)]^{1/2} = \sqrt{5}$$

Es importante tener presente que la norma y la distancia dependen del producto interior que se esté usando. Si se cambia el producto interior, entonces cambian las normas y las distancias entre los vectores. Por ejemplo, si  $R^2$  tiene el producto euclidiano interior, entonces la norma del vector  $\mathbf{u}$  del ejemplo precedente es 1, y la distancia entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  es  $\sqrt{2}$ .

En este momento, el lector podría objetar el uso que se está haciendo de los términos longitud y distancia para las cantidades  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}$  y  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ . Aun cuando estas fórmulas definidoras surgen por imitación con las fórmulas dadas en  $R^2$  y  $R^3$ , los resultados singulares que se obtuvieron en el ejemplo 49 dan lugar a cierta duda acerca de lo adecuado de estas definiciones. Después de todo, se requiere una gran imaginación para afirmar que la longitud del vector  $\mathbf{u} = (1, 0)$  es  $\sqrt{3}$ . A continuación se dan algunos argumentos en apoyo de estas definiciones.

A través de los años, los matemáticos han determinado las que se consideran como las propiedades más importantes de la longitud y la distancia euclidianas en  $R^2$  y  $R^3$ ; estas propiedades se listan en la figura 4.8.

El teorema que sigue justifica las definiciones que se dan de norma y distancia en los espacios de productos interiores.

**Teorema 16.** Si  $V$  es un espacio de productos interiores, entonces la norma  $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}$  y la distancia  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$  satisfacen todas las propiedades que se listan en la figura 4.8.

Se probará la propiedad L4 y se dejan las demostraciones de las partes restantes como ejercicios. Antes de iniciar la demostración, conviene hacer notar que la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

<i>Propiedades básicas de la longitud</i>	<i>Propiedades básicas de la distancia</i>
L1. $\ \mathbf{u}\  \geq 0$	D1. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
L2. $\ \mathbf{u}\  = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$	D2. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
L3. $\ k\mathbf{u}\  =  k  \ \mathbf{u}\ $	D3. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
L4. $\ \mathbf{u} + \mathbf{v}\  \leq \ \mathbf{u}\  + \ \mathbf{v}\ $ (desigualdad del triángulo)	D4. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (desigualdad del triángulo)



se puede escribir en varias formas alternativas. Puesto que  $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$  y  $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ , se puede escribir como

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 \tag{4.21}$$

o bien, después de tomar las raíces cuadradas, como

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \tag{4.22}$$

*Demostración de la propiedad L4.* Por definición,

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &\leq \langle u, u \rangle + 2|\langle u, v \rangle| + \langle v, v \rangle \\ &\leq \langle u, u \rangle + 2\|u\| \|v\| + \langle v, v \rangle \quad (\text{por 4.22}) \\ &= \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Al tomar las raíces cuadradas da

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad \blacksquare$$

En  $R^2$  o  $R^3$ , el resultado que se acaba de probar expresa el conocido hecho geométrico de que la suma de las longitudes de dos de los lados de un triángulo es al menos tan grande como la longitud del tercer lado (figura 4.9).

Supóngase que  $u$  y  $v$  son vectores diferentes de cero en un espacio de productos interiores  $V$ . La desigualdad de Cauchy-Schwarz, como se da en (4.21), se puede escribir como

$$\left( \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right)^2 \leq 1$$

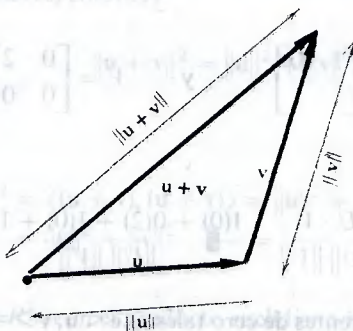


Figura 4.9

o, de modo equivalente,

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

Como consecuencia de este resultado, existe un ángulo único  $\theta$  tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (4.23)$$

Se define  $\theta$  como el *ángulo entre* los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Obsérvese que en  $R^2$  o  $R^3$ , con el producto euclidiano interior, (4.23) concuerda con la fórmula común para el coseno del ángulo entre dos vectores diferentes de cero (sección 3.3 del capítulo 3).

### Ejemplo 50

Encuétrase el coseno del ángulo  $\theta$  entre los vectores

$$\mathbf{u} = (4, 3, 1, -2) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (-2, 1, 2, 3)$$

en donde el espacio vectorial es  $R^4$ , con el producto euclidiano interior.

*Solución.*

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{30} \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{18} \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -9$$

de modo que

$$\cos \theta = \frac{-9}{\sqrt{30}\sqrt{18}} = -\frac{3}{\sqrt{30}\sqrt{2}}$$

### Ejemplo 51

Si  $M_{22}$  tiene el producto interior dado en el ejemplo 44, entonces el ángulo entre las matrices

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es  $\pi/2$ , puesto que

$$\cos \theta = \frac{U \cdot V}{\|U\| \|V\|} = \frac{1(0) + 0(2) + 1(0) + 1(0)}{\|U\| \|V\|} = 0$$

Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores diferentes de cero tales que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ , entonces, con base en (4.23), se deduce que  $\cos \theta = 0$  y  $\theta = \pi/2$ . Esto sugiere la siguiente terminología.

**Definición.** En un espacio de productos interiores, se dice que dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son *ortogonales* si  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ . Además, si  $\mathbf{u}$  es ortogonal a cada vector en un conjunto  $W$ , se dice que  $\mathbf{u}$  es *ortogonal a  $W$* .

Conviene hacer hincapié en que la ortogonalidad depende de la selección del producto interior. Dos vectores pueden ser ortogonales con respecto a un producto interior pero no con respecto a otro.

**Ejemplo 52**

(Para los lectores que hayan estudiado Cálculo).

Supóngase que  $P_2$  tiene el producto interior

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

que se analizó en el ejemplo 46, y sea

$$\mathbf{p} = x, \quad \mathbf{q} = x^2$$

Entonces,

$$\|\mathbf{p}\| = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2} = \left[ \int_{-1}^1 xx dx \right]^{1/2} = \left[ \int_{-1}^1 x^2 dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|\mathbf{q}\| = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle^{1/2} = \left[ \int_{-1}^1 x^2x^2 dx \right]^{1/2} = \left[ \int_{-1}^1 x^4 dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^1 xx^2 dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

Debido a que  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$ , los vectores  $\mathbf{p} = x$  y  $\mathbf{q} = x^2$  son ortogonales en relación con el producto interior dado.

Se concluye esta sección con una generalización interesante y útil de un conocido resultado.

**Teorema 17. (Teorema de Pitágoras generalizado).** Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores ortogonales en un espacio de productos interiores, entonces

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}), (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nótese que en  $R^2$  o  $R^3$ , con el producto euclidiano interior, este teorema se reduce al teorema ordinario de Pitágoras (figura 4.10).



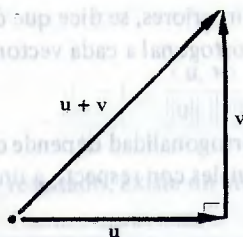


Figura 4.10

### EJERCICIOS 4.8

1. Supóngase que  $R^2$  tiene el producto interior  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ , en donde  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Halle  $\|\mathbf{w}\|$  cuando

(a)  $\mathbf{w} = (-1, 3)$       (b)  $\mathbf{w} = (6, 7)$       (c)  $\mathbf{w} = (0, 1)$       (d)  $\mathbf{w} = (0, 0)$

2. Repita el ejercicio 1 utilizando el producto euclidiano interior sobre  $R^2$ .

3. Suponga que  $P_2$  tiene el producto interior del ejemplo 45. Halle  $\|\mathbf{p}\|$  cuando

(a)  $\mathbf{p} = -1 + 2x + x^2$       (b)  $\mathbf{p} = 3 - 4x^2$

4. Suponga que  $M_{22}$  tiene el producto interior del ejemplo 44. Halle  $\|A\|$  cuando

(a)  $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$       (b)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Suponga que  $R^2$  tiene el producto interior del ejercicio 1. Encuentre  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  cuando

(a)  $\mathbf{x} = (-1, 2)$ ,  $\mathbf{y} = (2, 5)$       (b)  $\mathbf{x} = (3, 9)$ ,  $\mathbf{y} = (3, 9)$

6. Repita el ejercicio 5 utilizando el producto euclidiano interior sobre  $R^2$ .

7. Suponga que  $P_2$  tiene el producto interior del ejemplo 45. Halle  $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  cuando

$$\mathbf{p} = 2 - x + x^2, \quad \mathbf{q} = 1 + 5x^2$$

8. Suponga que  $M_{22}$  tiene el producto interior del ejemplo 44. Halle  $d(A, B)$  cuando

(a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$        $B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

(b)  $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$        $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

9. Suponga que  $R^2$ ,  $R^3$  y  $R^4$  tienen el producto euclidiano interior. En cada inciso, encuentre el coseno del ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

- (a)  $\mathbf{u} = (1, -3)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 4)$       (b)  $\mathbf{u} = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 8)$   
 (c)  $\mathbf{u} = (-1, 5, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 4, -9)$       (d)  $\mathbf{u} = (4, 1, 8)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$   
 (e)  $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (-3, -3, -3, -3)$       (f)  $\mathbf{u} = (2, 1, 7, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (4, 0, 0, 0)$

10. Suponga que  $P_2$  tiene el producto interior del ejemplo 45. Halle el coseno del ángulo entre  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ .

- (a)  $\mathbf{p} = -1 + 5x + 2x^2$        $\mathbf{q} = 2 + 4x - 9x^2$   
 (b)  $\mathbf{p} = x - x^2$        $\mathbf{q} = 7 + 3x + 3x^2$

11. Suponga que  $M_{22}$  tiene el producto interior del ejemplo 44. Halle el coseno del ángulo entre  $A$  y  $B$ .

(a)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$        $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$        $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

12. Suponga que  $R^3$  tiene el producto euclidiano interior. ¿Para cuáles valores de  $k$  se tiene que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son ortogonales?

- (a)  $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$        $\mathbf{v} = (1, 7, k)$   
 (b)  $\mathbf{u} = (k, k, 1)$        $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$

13. Suponga que  $P_2$  tiene el producto interior del ejemplo 45. Demuestre que  $\mathbf{p} = 1 - x + 2x^2$  y  $\mathbf{q} = 2x + x^2$  son ortogonales.

14. Suponga que  $M_{22}$  tiene el producto interior del ejemplo 44. Determine cuáles de las matrices que se dan son ortogonales a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a)  $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$       (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$       (c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$       (d)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

15. Suponga que  $R^4$  tiene el producto euclidiano interior. Halle dos vectores de norma 1 ortogonales a todos los vectores  $\mathbf{u} = (2, 1, -4, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, -1, 2, 2)$  y  $\mathbf{w} = (3, 2, 5, 4)$ .

16. Sea  $V$  un espacio de productos interiores. Demuestre que si  $\mathbf{w}$  es ortogonal tanto a  $\mathbf{u}_1$  como a  $\mathbf{u}_2$ , es ortogonal a  $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2$ , para todos los escalares  $k_1$  y  $k_2$ . Interprete este resultado geoméricamente en  $R^3$ , con el producto euclidiano interior.

17. Sea  $V$  un espacio de productos interiores. Demuestre que si  $\mathbf{w}$  es ortogonal a cada uno de los vectores  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ , entonces es ortogonal a todo vector en  $\text{lin}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$ .

18. Sea  $V$  un espacio de productos interiores. Demuestre que si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores ortogonales en  $V$  tales que  $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$ , entonces  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$ .

19. Sea  $V$  un espacio de productos interiores. Establezca la identidad

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

para los vectores en  $V$ .

20. Sea  $V$  un espacio de productos interiores. Establezca la identidad

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

para los vectores en  $V$ .

21. Sea  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  una base para un espacio de productos interiores  $V$ . Demuestre que el vector cero es el único vector en  $V$  que es ortogonal a todos los vectores de la base.

22. Sea  $\mathbf{v}$  un vector en un espacio de productos interiores  $V$ .

(a) Demuestre que el conjunto de todos los vectores en  $V$  ortogonales a  $\mathbf{v}$  forma un subespacio de  $V$ .

(b) Describa el subespacio geoméricamente en  $R^2$  y  $R^3$  con el producto euclidiano interior.

23. Pruebe la generalización siguiente del teorema 17. Si  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  son vectores ortogonales por pares en un espacio de productos interiores  $V$ , entonces

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_r\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \dots + \|\mathbf{v}_r\|^2$$

24. Pruebe las siguientes partes del teorema 16.

(a) parte L1

(b) parte L2

(c) parte L3

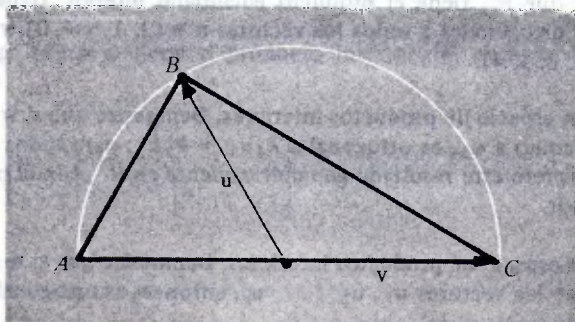
(d) parte D1

(e) parte D2

(f) parte D3

(g) parte D4

25. Aplique métodos vectoriales para probar que un triángulo inscrito en un círculo y que tiene a uno de los diámetros como lado debe ser un triángulo rectángulo. (*Sugerencia.* Expresé los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{BC}$  de la figura que sigue en términos de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .)





26. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo). Suponga que  $C[0, \pi]$  tiene el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x) dx$$

y que  $f_n = \cos nx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Demuestre que si  $k \neq l$ , entonces  $f_k$  y  $f_l$  son ortogonales con relación al producto interior dado.

#### 4.9 BASES ORTONORMALES; PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

En muchos problemas referentes a espacios vectoriales, la selección de una base para el espacio se hace según convenga al que lo resuelve. Naturalmente, la mejor estrategia es elegir la base a fin de simplificar la solución del problema a la mano. En los espacios de producto interior, el mejor procedimiento a menudo es elegir una base en la que todos los vectores sean ortogonales entre sí. En esta sección se muestra cómo es posible construir esas bases.

**Definición.** Se dice que un conjunto de vectores en un espacio de productos interiores es un *conjunto ortogonal* si todas las parejas de vectores distintos en el conjunto son ortogonales. Un conjunto ortogonal en el que cada vector tiene norma 1 se conoce como *ortonormal*.

##### Ejemplo 53

Sea

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \mathbf{v}_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

El conjunto  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  es ortonormal si  $R^3$  tiene el producto euclidiano interior, ya que

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$$

y

$$\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 1$$

##### Ejemplo 54

Si  $\mathbf{v}$  es un vector diferente de cero en un espacio de productos interiores, entonces, por la propiedad L3 de la figura 4.8, el vector

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$$

tiene norma 1, dado que

$$\left\| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathbf{v}\| = 1$$

Este proceso de multiplicar un vector diferente de cero  $\mathbf{v}$  por el recíproco de su longitud, a fin de obtener un vector de norma 1, se denomina **normalización de  $\mathbf{v}$** .

El interés de encontrar bases ortonormales para espacios de productos interiores es, en parte, motivada por el teorema que sigue, el cual muestra que es excepcionalmente sencillo expresar un vector en términos de una base ortonormal.

**Teorema 18.** Si  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base ortonormal para un espacio de productos interiores  $V$  y  $\mathbf{u}$  es cualquier vector en  $V$ , entonces

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

**Demostración.** Supuesto que  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base, un vector  $\mathbf{u}$  se puede expresar en la forma

$$\mathbf{u} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_n \mathbf{v}_n$$

Se completa la demostración al demostrar que  $k_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Para cada vector  $\mathbf{v}_j$  en  $S$  se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle \\ &= k_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + k_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \rangle + \dots + k_n \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle \end{aligned}$$

Dado que  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es un conjunto ortonormal, se tiene

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 = 1 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \quad \text{if } j \neq i$$

Por tanto, la ecuación anterior se simplifica hasta

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle = k_i \quad \blacksquare$$

### Ejemplo 55

Sea

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

Es fácil comprobar que  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  es una base ortonormal para  $R^3$ , con el producto euclidiano interior. Expresese el vector  $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$  como una combinación lineal de los vectores en  $S$ .

**Solución.**

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = 1 \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = -\frac{1}{5} \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{7}{5}$$

Por tanto, por el teorema 18,

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \frac{1}{5}\mathbf{v}_2 + \frac{7}{5}\mathbf{v}_3$$

es decir,

$$(1, 1, 1) = (0, 1, 0) - \frac{1}{5}(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}) + \frac{7}{5}(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$$

A partir de este ejemplo, debe ser evidente la utilidad del teorema 18, si se tiene presente que, para las bases no ortonormales, por lo común es necesario resolver un sistema de ecuaciones para expresar un vector en términos de una base.

**Teorema 19.** Si  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero en un espacio de productos interiores, entonces  $S$  es linealmente independiente.

*Demostración.* Supóngase que

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

Para demostrar que  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es linealmente independiente, se debe probar que  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ .

Para cada  $\mathbf{v}_i$  en  $S$ , con base en (4.24) se deduce que

$$\langle k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

o, de modo equivalente,

$$k_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + k_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \rangle + \dots + k_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

Por la ortogonalidad de  $S$ ,  $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0$  cuando  $j \neq i$ , de modo que esta ecuación se reduce a

$$k_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

Ya que se supone que los vectores en  $S$  son diferentes de cero,  $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \neq 0$ , por el axioma de positividad para los productos interiores. Por tanto,  $k_i = 0$ . Ya que el subíndice  $i$  es arbitrario, se tiene  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ ; por tanto,  $S$  es linealmente independiente.

### Ejemplo 56

En el ejemplo 53 se demostró que

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

forman un conjunto ortonormal con respecto al producto euclidiano interior sobre  $R^3$ . Por el teorema 19, estos vectores forman un conjunto linealmente independiente. Por tanto, ya que  $R^3$  es tridimensional,  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  es una base ortonormal para  $R^3$ .



Ahora se considera el problema de construir bases ortonormales para espacios de productos interiores. La demostración del resultado preliminar siguiente se analiza en los ejercicios que están al final de esta sección.

**Teorema 20.** Sea  $V$  un espacio de productos interiores y  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  un conjunto ortonormal de vectores en  $V$ . Si  $W$  denota el espacio generado por  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , entonces todo vector  $u$  en  $V$  se puede expresar en la forma

$$u = w_1 + w_2$$

en donde  $w_1$  está en  $W$  y  $w_2$  es ortogonal a  $W$  al hacer

$$w_1 = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_r \rangle v_r \quad (4.25)$$

y

$$w_2 = u - \langle u, v_1 \rangle v_1 - \langle u, v_2 \rangle v_2 - \dots - \langle u, v_r \rangle v_r \quad (4.26)$$

(Véase la figura 4.11 en donde se tiene una ilustración en  $R^3$ .)

Con la motivación de la figura 4.11, a  $w_1$  se le da el nombre de **proyección ortogonal de  $u$  sobre  $W$**  y se denota por  $\text{proy}_W u$ . El vector  $w_2 = u - \text{proy}_W u$  se conoce como **componente de  $u$  ortogonal a  $W$** .

### Ejemplo 57

Supóngase que  $R^3$  tiene un producto euclidiano interior y que  $W$  es el subespacio generado por los vectores ortonormales  $v_1 = (0, 1, 0)$  y  $v_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$ . La proyección ortogonal de  $u = (1, 1, 1)$  sobre  $W$  es

$$\begin{aligned} \text{proy}_W u &= \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 \\ &= (1)(0, 1, 0) + (-\frac{1}{5})(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}) \\ &= (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}) \end{aligned}$$

El componente de  $u$  ortogonal a  $W$  es

$$u - \text{proy}_W u = (1, 1, 1) - (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}) = (\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25})$$

Obsérvese que  $u - \text{proy}_W u$  es ortogonal tanto a  $v_1$  como a  $v_2$ , de manera que este vector es ortogonal a cada vector en el espacio  $W$  generado por  $v_1$  y  $v_2$ , como debe ser.

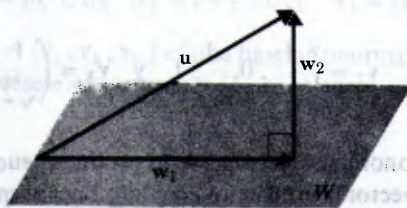


Figura 4.11

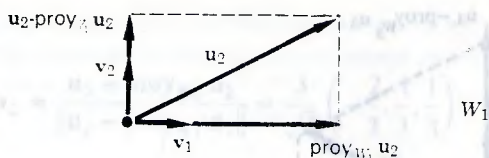


Figura 4.12

Ahora se tienen los elementos necesarios para probar el resultado principal de esta sección.

**Teorema 21.** *Todo espacio de productos interiores diferente de cero y de dimensión finita tiene una base ortonormal.*

*Demostración.* Sea  $V$  cualquier espacio de productos interiores diferente de cero y con dimensión  $n$ , y supóngase que  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  es cualquier base para  $V$ . La sucesión siguiente de pasos produce una base ortonormal  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  para  $V$ .

**Paso 1.** Sea  $\mathbf{v}_1 \doteq \mathbf{u}_1 / \|\mathbf{u}_1\|$ . El vector  $\mathbf{v}_1$  tiene norma 1.

**Paso 2.** Para construir un vector  $\mathbf{v}_2$  de norma 1 que sea ortogonal a  $\mathbf{v}_1$ , se calcula la componente de  $\mathbf{u}_2$  ortogonal al espacio  $W_1$  generado por  $\mathbf{v}_1$  y, a continuación, se normaliza; es decir,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - \text{proy}_{W_1} \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2 - \text{proy}_{W_1} \mathbf{u}_2\|} = \frac{\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1\|}$$

(figura 4.12). Por supuesto, si  $\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ , no se puede llevar a cabo la normalización. Pero esto no puede suceder ya que entonces se tendría

$$\mathbf{u}_2 = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|} \mathbf{u}_1$$

lo cual afirma que  $\mathbf{u}_2$  es un múltiplo de  $\mathbf{u}_1$ , y contradice la independencia lineal de la base  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ .

**Paso 3.** Para construir un vector  $\mathbf{v}_3$  de norma 1 que sea ortogonal tanto a  $\mathbf{v}_1$  como a  $\mathbf{v}_2$ , se calcula la componente de  $\mathbf{u}_3$  ortogonal al espacio  $W_2$  generado por  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , y se normaliza (figura 4.13); es decir

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{u}_3 - \text{proy}_{W_2} \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3 - \text{proy}_{W_2} \mathbf{u}_3\|} = \frac{\mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2\|}$$

Como en el paso 2, la independencia lineal de  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  asegura que  $\mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$  de modo que siempre se puede efectuar la normalización. Los detalles se dejan como ejercicio.

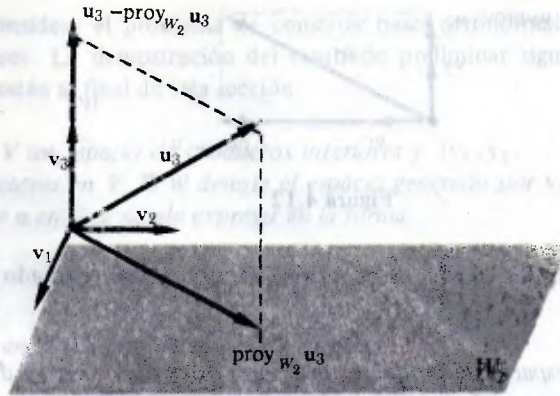


Figura 4.13

**Paso 4.** Para determinar un vector  $\mathbf{v}_4$  de norma 1 que sea ortogonal a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$ , se calcula la componente de  $\mathbf{u}_4$  ortogonal al espacio  $W_3$  generado por  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  y se normaliza. Por tanto,

$$\mathbf{v}_4 = \frac{\mathbf{u}_4 - \text{proy}_{W_3} \mathbf{u}_4}{\|\mathbf{u}_4 - \text{proy}_{W_3} \mathbf{u}_4\|} = \frac{\mathbf{u}_4 - \langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{u}_4 - \langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3\|}$$

Al continuar de esta manera, se obtiene un conjunto ortonormal de vectores,  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ . Supuesto que  $V$  es de dimensión  $n$ , y todo conjunto ortonormal es linealmente independiente, el conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base ortonormal para  $V$ .

La construcción paso a paso que acaba de darse, para convertir una base arbitraria en una base ortonormal, se conoce como *proceso de Gram-Schmidt*.\* Se puede demostrar que, en cada paso de este proceso, los vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  forman una base ortonormal para el subespacio generado por  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ .

### Ejemplo 58

Considérese el espacio vectorial  $R^3$  con el producto euclidiano interior. Aplíquese el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$  en una base ortonormal.

*Solución.*

$$\text{Paso 1. } \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Paso 2. } \mathbf{u}_2 - \text{proy}_{W_1} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 \\ &= (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

\*Jørgen Pederson Gram (1850-1916). Actuario danés.  
Erhardt Schmidt (1876-1959). Matemático alemán.



Por tanto,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - \text{proy}_{W_1} \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2 - \text{proy}_{W_1} \mathbf{u}_2\|} = \frac{3}{\sqrt{6}} \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = \left( -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

**Paso 3.**  $\mathbf{u}_3 - \text{proy}_{W_2} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2$

$$= (0, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \left( -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$= \left( 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Por tanto,

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{u}_3 - \text{proy}_{W_2} \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3 - \text{proy}_{W_2} \mathbf{u}_3\|} = \sqrt{2} \left( 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \mathbf{v}_2 = \left( -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \mathbf{v}_3 = \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

forman una base ortonormal para  $R^3$ .

## OPCIONAL

Las siguientes consecuencias del proceso de Gram-Schmidt tienen numerosas aplicaciones, algunas de las cuales se analizan en la sección 7.2. El lector contará con las bases necesarias para leer estas aplicaciones, después de completar esta sección opcional.

**Teorema 22. (Teorema de proyección).** Si  $W$  es un subespacio de dimensión finita de un espacio de productos interiores  $V$ , entonces todo vector  $\mathbf{u}$  en  $V$  se puede expresar exactamente de una manera como

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

en donde  $\mathbf{w}_1$  está en  $W$  y  $\mathbf{w}_2$  es ortogonal a  $W$ .

**Demostración.** La demostración se realiza en dos partes. Primero es necesario encontrar los vectores  $\mathbf{w}_1$  y  $\mathbf{w}_2$  con las propiedades enunciadas y, a continuación, se debe demostrar que estos son los únicos vectores con esas propiedades.

Por el proceso de Gram-Schmidt, existe una base ortonormal  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  para  $W$ , de modo que  $W = \text{lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ . Por tanto, por el teorema 20, los vectores

$$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_W \mathbf{u} \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u}$$

tienen las propiedades enunciadas en este teorema. Para hacer ver que estos son los únicos vectores con estas propiedades, supóngase que también se puede escribir

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2 \quad (4.27)$$

en donde  $\mathbf{w}'_1$  está en  $W$  y  $\mathbf{w}'_2$  es ortogonal a  $W$ . Si (4.27) se resta de la ecuación

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

se obtiene

$$\mathbf{0} = (\mathbf{w}'_1 - \mathbf{w}_1) + (\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2)$$

o bien,

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 \quad (4.28)$$

Supuesto que  $\mathbf{w}_2$  y  $\mathbf{w}'_2$  son ortogonales a  $W$ , su diferencia también será ortogonal a  $W$ , ya que para cualquier vector  $\mathbf{w}$  en  $W$  se puede escribir

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}'_2 \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}_2 \rangle = 0 - 0 = 0$$

Pero el propio  $\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2$  es un vector en  $W$ , ya que, por (4.28), es una diferencia de dos vectores en el subespacio  $W$ . Por tanto,  $\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2$  debe ser ortogonal a sí mismo, es decir,

$$\langle \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2, \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 \rangle = 0$$

Pero esto implica que  $\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$ , por el axioma 4 para los productos interiores. Como consecuencia,  $\mathbf{w}'_2 = \mathbf{w}_2$  y, por (4.28),  $\mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}_1$ .

Si  $P$  es un punto en el espacio tridimensional común y  $W$  es un plano que pasa por el origen, entonces el punto  $Q$  en  $W$ , más próximo a  $P$ , se obtiene al bajar una perpendicular de  $P$  a  $W$  (figura 4.14a). Por tanto, si se hace  $\mathbf{u} = \overline{OP}$ , entonces la distancia entre  $P$  y  $W$  está dada por

$$\|\mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u}\|$$

En otras palabras, entre todos los vectores  $\mathbf{w}$  en  $W$ , el vector  $\mathbf{w} = \text{proy}_W \mathbf{u}$  minimiza la distancia  $\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$  (figura 4.14b).

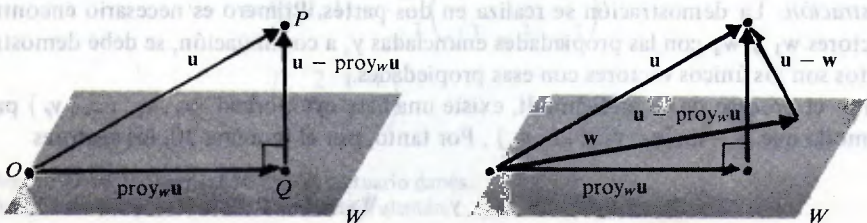


Figura 4.14

Hay otra manera de concebir esta idea. Considérese a  $\mathbf{u}$  como un vector fijo del que se desearía obtener una aproximación mediante un vector en  $W$ . Cualquier aproximación  $\mathbf{w}$  de ese tipo conducirá a un “vector de error”

$$\mathbf{u} - \mathbf{w}$$

el cual, a menos que  $\mathbf{u}$  esté en  $W$ , no se puede hacer igual a  $\mathbf{0}$ . Sin embargo, al hacer

$$\mathbf{w} = \text{proy}_W \mathbf{u}$$

se puede tener la longitud del vector de error

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u}\|$$

tan pequeña como sea posible. Así entonces, es posible describir la  $\text{proy}_W \mathbf{u}$  como la “mejor aproximación” para  $\mathbf{u}$  por medio de los vectores en  $W$ . El teorema que sigue hace más precisas estas ideas intuitivas.

**Teorema 23. (Teorema de la mejor aproximación).** Si  $W$  es un subespacio de dimensión finita de un espacio de productos interiores  $V$ , y si  $\mathbf{u}$  es un vector en  $V$ , y si  $\mathbf{u}$  es un vector en  $V$ , entonces  $\text{proy}_W \mathbf{u}$  es la mejor aproximación para  $\mathbf{u}$  tomada de  $W$ , en el sentido de que

$$\|\mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u}\| < \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$$

para todo vector  $\mathbf{w}$  en  $W$  diferente de  $\text{proy}_W \mathbf{u}$ .

*Demostración.* Para cualquier vector  $\mathbf{w}$  en  $W$  se puede escribir

$$\mathbf{u} - \mathbf{w} = (\mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u}) + (\text{proy}_W \mathbf{u} - \mathbf{w}) \quad (4.29)$$

Pero  $\text{proy}_W \mathbf{u} - \mathbf{w}$ , al ser una diferencia de vectores en  $W$ , está en  $W$ ; y  $\mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u}$  es ortogonal a  $W$ , de modo que los dos términos del segundo miembro de (4.29) son ortogonales. Por tanto, por el teorema de Pitágoras (teorema 17 de la sección 4.8)

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u}\|^2 + \|\text{proy}_W \mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2$$

Si  $\mathbf{w} \neq \text{proy}_W \mathbf{u}$  entonces el segundo término de esta suma será positivo, de modo que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 > \|\mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u}\|^2$$

o, de manera equivalente,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| > \|\mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u}\| \quad \blacksquare$$

En la sección 7.2 se dan aplicaciones de los últimos teoremas.



## EJERCICIOS 4.9

1. Suponga que  $R^2$  tiene el producto euclidiano interior. ¿Cuáles de los siguientes forman conjuntos ortonormales?

(a)  $(1, 0), (0, 2)$

(b)  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(c)  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(d)  $(1, 0), (0, 0)$

2. Suponga que  $R^3$  tiene el producto euclidiano interior. ¿Cuáles de los siguientes forman conjuntos ortonormales?

(a)  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b)  $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(c)  $(1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 0, 1)$

(d)  $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

3. Suponga que  $P_2$  tiene el producto interior del ejemplo 45. ¿Cuáles de los siguientes forman conjuntos ortonormales?

(a)  $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2$  (b)  $1, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, x^2$

4. Suponga que  $M_{22}$  tiene el producto interior del ejemplo 44. ¿Cuáles de los siguientes forman conjuntos ortonormales?

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. Sean  $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$  y  $\mathbf{y} = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$ .

Demuestre que  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$  es ortonormal si  $R^2$  tiene el producto interior  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ , pero no es ortonormal si  $R^2$  tiene el producto euclidiano interior.

6. Demuestre que

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, 1), \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 2, 1), \mathbf{u}_3 = (2, 3, 2, -2), \mathbf{u}_4 = (-1, 2, -1, 1)$$

es un conjunto ortogonal en  $R^4$  con el producto euclidiano interior. Normalizando cada uno de estos vectores, obtenga un conjunto ortonormal.

7. Suponga que  $R^2$  tiene el producto euclidiano interior. Aplique el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base  $\{u_1, u_2\}$  en una base ortonormal.

$$(a) u_1 = (1, -3), u_2 = (2, 2) \quad (b) u_1 = (1, 0), u_2 = (3, -5)$$

8. Suponga que  $R^3$  tiene el producto euclidiano interior. Aplique el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$  en una base ortonormal.

$$(a) u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (1, 2, 1)$$

$$(b) u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (3, 7, -2), u_3 = (0, 4, 1)$$

9. Suponga que  $R^4$  tiene el producto euclidiano interior. Aplique el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  en una base ortonormal.

$$u_1 = (0, 2, 1, 0), u_2 = (1, -1, 0, 0), u_3 = (1, 2, 0, -1), u_4 = (1, 0, 0, 1)$$

10. Suponga que  $R^3$  tiene el producto euclidiano interior. Encuentre una base ortonormal para el subespacio generado por  $(0, 1, 2), (-1, 0, 1)$ .

11. Suponga que  $R^3$  tiene el producto interior  $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3$ . Aplique el proceso Gram-Schmidt para transformar

$$u_1 = (1, 1, 1) \quad u_2 = (1, 1, 0) \quad u_3 = (1, 0, 0)$$

en una base ortonormal.

12. El subespacio de  $R^3$  generado por los vectores  $u_1 = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$  y  $u_2 = (0, 1, 0)$  es un plano que pasa por el origen. Expresar  $w = (1, 2, 3)$  en la forma  $w = w_1 + w_2$ , en donde  $w_1$  está en el plano y  $w_2$  es perpendicular al plano.

13. Repita el ejercicio 12 con  $u_1 = (1, 1, 1)$  y  $u_2 = (2, 0, -1)$ .

14. Suponga que  $R^4$  tiene el producto euclidiano interior. Expresar  $w = (-1, 2, 6, 0)$  en la forma  $w = w_1 + w_2$ , en donde  $w_1$  está en el espacio  $W$  generado por  $u_1 = (-1, 0, 1, 2)$  y  $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ , y  $w_2$  es ortogonal a  $W$ .

15. Sea  $\{v_1, v_2, v_3\}$  una base ortonormal para un espacio de productos interiores  $V$ . Demuestre que si  $w$  es un vector en  $V$ , entonces  $\|w\|^2 = \langle w, v_1 \rangle^2 + \langle w, v_2 \rangle^2 + \langle w, v_3 \rangle^2$ .

16. Sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base ortonormal para un espacio de productos interiores  $V$ . Demuestre que si  $w$  es un vector en  $V$ , entonces

$$\|w\|^2 = \langle w, v_1 \rangle^2 + \langle w, v_2 \rangle^2 + \dots + \langle w, v_n \rangle^2$$

17. En el paso 3 de la demostración del teorema 21, se afirmó que: "la independencia lineal de  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  asegura que

$$u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 \neq 0."$$

Pruebe esta afirmación.

18. Pruebe el teorema 20.  
(*Sugerencia.* Demuestre que el vector  $w_1$  de  $(4, 25)$  está en  $W$ , el vector  $w_2$  de  $(4, 26)$  es ortogonal a  $W$  y que  $u = w_1 + w_2$ .)

19. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.) Suponga que el espacio vectorial  $P_2$  tiene el producto interior

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

Aplique el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base estándar  $S = \{1, x, x^2\}$  en una base ortonormal. (Los polinomios de la base resultante reciben el nombre de los tres primeros *polinomios normalizados de Legendre*.)

20. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.) Aplique el teorema 18 para expresar los siguientes polinomios como combinaciones lineales de los tres polinomios normalizados de Legendre (ejercicio 19).

$$(a) 1 + x + 4x^2 \quad (b) 2 - 7x^2 \quad (c) 4 + 3x$$

21. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.) Suponga que  $P_2$  tiene el producto interior

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

Aplique el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base estándar  $S = \{1, x, x^2\}$  en una base ortonormal.

22. (Para los lectores que hayan estudiado el material opcional de esta sección.) Halle el punto  $Q$  del plano  $5x - 3y + z = 0$  más próximo a  $P(1, -2, 4)$  y determine la distancia entre el punto  $P$  y el plano. (*Sugerencia.* Imagine el plano como un subespacio  $W$  de  $R^3$ , con el producto euclidiano interior, y aplique el teorema 23.)

23. (Para los lectores que hayan estudiado el material opcional de esta sección.) Halle el punto  $Q$  de la recta

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= -t & -x < t < +x \\ z &= 4t \end{aligned}$$

más próximo a  $P(-4, 8, 1)$ . (*Sugerencia.* Vea la sugerencia que se da en el ejercicio anterior.)

#### 4.10 COORDENADAS; CAMBIO DE BASE

Existe una estrecha relación entre la noción de base y la de sistema de coordenadas. En esta sección se desarrolla esta idea y se analizan también resultados acerca del cambio de bases para los espacios vectoriales.



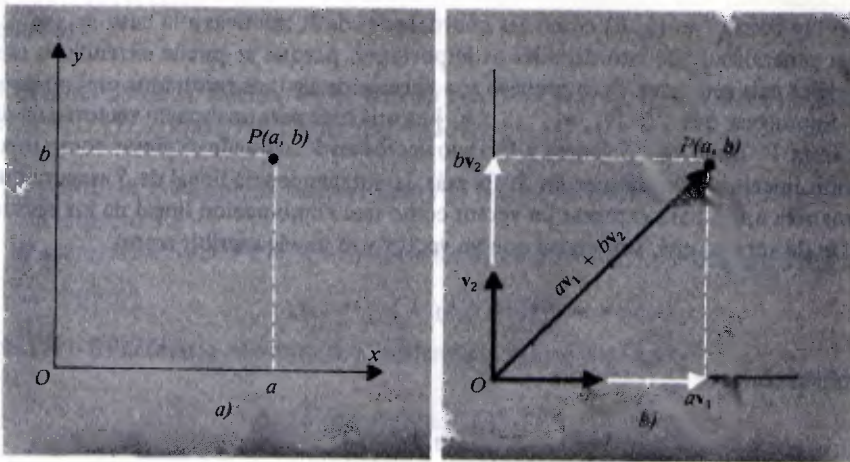


Figura 4.15

En la geometría analítica plana, se asocia una pareja de coordenadas  $(a, b)$  con un punto  $P$  en el plano, aplicando dos ejes perpendiculares de coordenadas. Sin embargo, también es posible introducir coordenadas sin hacer referencia a los ejes, utilizando vectores. Por ejemplo, en lugar de introducir ejes de coordenadas, como en la figura 4.15a, considere dos vectores perpendiculares  $v_1$  y  $v_2$ , cada uno de longitud 1, y con el mismo punto inicial  $O$ . (Estos vectores forman una base para  $R^2$ .) Al bajar perpendiculares desde un punto  $P$  hacia las rectas determinadas por  $v_1$  y  $v_2$ , se obtienen los vectores  $av_1$  y  $bv_2$  tales que

$$\vec{OP} = av_1 + bv_2$$

(figura 4.15b). Es evidente que los números  $a$  y  $b$  que acaban de obtenerse son los mismos que las coordenadas de  $P$ , relativas al sistema de coordenadas de la figura 4.15a. Por consiguiente, las coordenadas de  $P$  se pueden concebir como los números necesarios para expresar el vector  $\vec{OP}$  en términos de los vectores base  $v_1$  y  $v_2$ .

Para los fines de asociar coordenadas a los puntos en el plano, no es esencial que los vectores base  $v_1$  y  $v_2$  sean perpendiculares o que tengan longitud 1; basta cualquier base para  $R^2$ . Por ejemplo, utilizando los vectores base  $v_1$  y  $v_2$  de la figura 4.16, se puede asociar una pareja única de coordenadas a un punto  $P$ , proyectando  $P$  paralelo a los vectores base, para hacer que  $\vec{OP}$  sea la diagonal de un paralelogramo determinado por los vectores  $av_1$  y  $bv_2$ ; por tanto

$$\vec{OP} = av_1 + bv_2$$

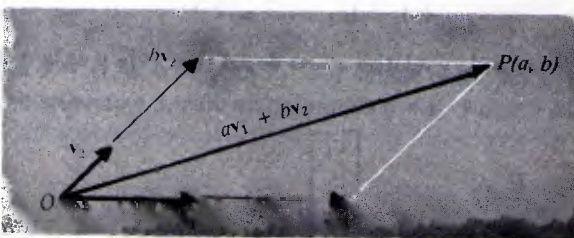


Figura 4.16

Es posible considerar  $(a, b)$  como las coordenadas de  $P$ , relativas a la base  $\{v_1, v_2\}$ . Esta noción generalizada de coordenadas es importante, porque se puede extender a espacios vectoriales más generales. Pero primero son necesarios algunos resultados preliminares.

Supóngase que  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base para un espacio vectorial de dimensión finita  $V$ . Dado que  $S$  genera a  $V$ , todo vector en  $V$  se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en  $S$ . Es más, la independencia lineal de  $S$  asegura que hay una manera única para expresar un vector como una combinación lineal de los vectores en  $S$ . A fin de ver por qué, supóngase que un vector  $v$  se puede escribir como

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

y también como

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

Al restar la segunda ecuación de la primera da

$$0 = (c_1 - k_1)v_1 + (c_2 - k_2)v_2 + \dots + (c_n - k_n)v_n$$

Ya que el segundo miembro de esta ecuación es una combinación lineal de los vectores en  $S$ , la independencia lineal de  $S$  implica que

$$c_1 - k_1 = 0, \quad c_2 - k_2 = 0, \dots, \quad c_n - k_n = 0$$

es decir,

$$c_1 = k_1, \quad c_2 = k_2, \dots, \quad c_n = k_n$$

En resumen, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 24.** Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base para un espacio vectorial  $V$ , entonces todo vector  $v$  en  $V$  se puede expresar en la forma  $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$ , exactamente de una manera.

Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base para un espacio vectorial de dimensión finita  $V$  y

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

es la expresión para  $v$  en términos de la base  $S$ , entonces los escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$  se denominan *coordenadas* de  $v$  relativas a la base  $S$ . El *vector de coordenadas* de  $v$  relativo a  $S$  se denota por  $(v)_S$  y es el vector en  $R^n$  definido por

$$(v)_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

La *matriz de coordenadas* de  $v$  relativa a  $S$  se denota por  $[v]_S$  y es la matriz de  $n \times 1$  definida por

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

## Ejemplo 59

En el ejemplo 28 de la sección 4.5 se mostró que  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  es una base para  $R^3$ , en donde  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$  y  $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ .

- (a) Encuéntrese el vector de coordenadas y la matriz de coordenadas de  $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$  con respecto a  $S$ .
- (b) Encuéntrese el vector  $\mathbf{v}$  en  $R^3$  cuyo vector de coordenadas con respecto a  $S$  sea  $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$ .

**Solución (a).** Es necesario encontrar los escalares  $c_1, c_2, c_3$  tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

o, en términos de componentes,

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Al igualar las componentes correspondientes se obtiene

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5$$

$$2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = -1$$

$$c_1 + 4c_3 = 9$$

Al resolver este sistema se obtiene  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 2$ . Por tanto,

$$(\mathbf{v})_S = (1, 1, 2) \quad \text{y} \quad [\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**Solución b).** Aplicando la definición del vector de coordenadas  $(\mathbf{v})_S$ , se obtiene

$$\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 = (11, 31, 7)$$

Los vectores y las matrices de coordenadas dependen del orden en el que se escriban los vectores base; un cambio en el orden de los vectores base conduce a un cambio correspondiente en el orden de los elementos de las matrices y los vectores de coordenadas.

## Ejemplo 60

Considérese la base  $S = \{1, x, x^2\}$  para  $P_2$ . Por simple observación, el vector y la matriz de coordenadas con respecto a  $S$ , para un polinomio  $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , son

$$(\mathbf{p})_S = (a_0, a_1, a_2) \quad \text{y} \quad [\mathbf{p}]_S = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



**Ejemplo 61**

Supóngase que se introduce un sistema de coordenadas rectangulares  $xyz$  en el espacio tridimensional y considérese la base estándar  $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , en donde

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \text{y} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Si, como en la figura 4.17,  $\mathbf{v} = (a, b, c)$  es cualquier vector en  $R^3$ , entonces

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

lo cual significa que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (\mathbf{v})_S$$

En otras palabras, las componentes de un vector  $\mathbf{v}$  relativas a un sistema de coordenadas rectangulares  $xyz$  son las mismas que las coordenadas de  $\mathbf{v}$ , relativas a la base estándar  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .

**Ejemplo 62**

Si  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base ortonormal a un espacio de productos interiores  $V$ , entonces, por el teorema 18 de la sección 4.9, la expresión para un vector  $\mathbf{u}$  en términos de la base  $S$  es

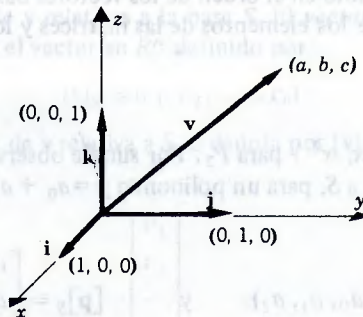
$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

lo cual significa que

$$(\mathbf{u})_S = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle, \dots, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle)$$

y

$$[\mathbf{u}]_S = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \end{bmatrix}$$



**Figura 4.17**

Por ejemplo, si

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right), \mathbf{v}_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

entonces, como se observó en el ejemplo 55 de la sección 4.9,  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  es una base ortonormal para  $R^3$ , con el producto euclidiano interior. Si  $\mathbf{u} = (2, -1, 4)$ , entonces

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = -1, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = \frac{4}{5}, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{22}{5}$$

de modo que

$$(\mathbf{u})_S = \left(-1, \frac{4}{5}, \frac{22}{5}\right) \quad \text{y} \quad [\mathbf{u}]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{22}{5} \end{bmatrix}$$

Las bases ortonormales para los espacios de productos interiores son convenientes porque, como los muestra el siguiente teorema, muchas fórmulas conocidas se cumplen en esos espacios.

**Teorema 25.** Si  $S$  es una base ortonormal para un espacio de productos interiores con  $n$  dimensiones y si

$$(\mathbf{u})_S = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{y} \quad (\mathbf{v})_S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

entonces

(a)  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$

(b)  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$

(c)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$

En los ejercicios se analizan las demostraciones y algunos ejemplos numéricos.

Ahora se pasa al problema principal de esta sección.

**Problema del cambio de base.** Si se cambia la base para un espacio vectorial, de cierta base  $B$  a otra nueva  $B'$ , ¿en qué forma está relacionada la matriz de coordenadas en aquella,  $[\mathbf{v}]_B$ , de un vector  $\mathbf{v}$  con la nueva matriz de coordenadas  $[\mathbf{v}]_{B'}$ ?

Por sencillez, se resolverá este problema para los espacios bidimensionales. La solución para los espacios con  $n$  dimensiones es semejante y se deja como ejercicio. Sean

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \text{y} \quad B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$$

las bases inicial y nueva, respectivamente. Se necesitan las matrices de coordenadas para los vectores base iniciales, con relación a la nueva base. Supóngase que son

$$[\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}; \quad (4.30)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= a\mathbf{u}'_1 + b\mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}_2 &= c\mathbf{u}'_1 + d\mathbf{u}'_2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sea ahora  $\mathbf{v}$  cualquier vector en  $V$  y

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

la matriz de coordenadas inicial, de modo que

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 \quad (4.33)$$

Para encontrar las nuevas coordenadas de  $\mathbf{v}$ , se debe expresar  $\mathbf{v}$  en términos de la nueva base  $B'$ . Para hacerlo, se sustituye (4.31) en (4.33). Esto conduce a

$$\mathbf{v} = k_1(a\mathbf{u}'_1 + b\mathbf{u}'_2) + k_2(c\mathbf{u}'_1 + d\mathbf{u}'_2)$$

o bien,

$$\mathbf{v} = (k_1a + k_2c)\mathbf{u}'_1 + (k_1b + k_2d)\mathbf{u}'_2$$

Por tanto, la nueva matriz de coordenadas para  $\mathbf{v}$  es

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{bmatrix}$$

la cual se puede volver a escribir como

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

o, con base en (4.32),

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_B$$

En esta ecuación se afirma que es posible obtener la nueva matriz de coordenadas  $[\mathbf{v}]_{B'}$ , multiplicando la matriz de coordenadas inicial,  $[\mathbf{v}]_B$ , del primer miembro, por la matriz

$$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

cuyas columnas son las coordenadas de los vectores base iniciales, con relación a la nueva base (véase 4.30). Así entonces, se tiene la solución siguiente del problema del cambio de base.



**Solución del problema del cambio de base.** Si se cambia la base para un espacio vectorial  $V$ , de cierta base dada  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  hacia otra nueva base  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n\}$ , entonces la matriz de coordenadas inicial,  $[\mathbf{v}]_B$ , de un vector  $\mathbf{v}$  está relacionada con la nueva matriz de coordenadas  $[\mathbf{v}]_{B'}$ , por medio de la ecuación

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P[\mathbf{v}]_B \tag{4.34}$$

en donde las columnas de  $P$  son las matrices de coordenadas de los vectores base iniciales con relación a la nueva base, es decir los vectores columnas de  $P$  son

$$[\mathbf{u}_1]_{B'}, [\mathbf{u}_2]_{B'}, \dots, [\mathbf{u}_n]_{B'}$$

Simbólicamente, la matriz  $P$  se puede escribir

$$P = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} [\mathbf{u}_1]_{B'} & [\mathbf{u}_2]_{B'} & \cdots & [\mathbf{u}_n]_{B'} \end{array} \right]:$$

esta matriz se conoce como *matriz de transición* de  $B$  hacia  $B'$ .

**Ejemplo 63**

Considérense las bases

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \text{y} \quad B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$$

para  $R^2$ , en donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Hállese la matriz de transición de  $B$  hacia  $B'$ .
- (b) Usese (4.34) a fin de hallar  $[\mathbf{v}]_{B'}$ , si

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**Solución (a).** En primer lugar deben encontrarse las matrices de coordenadas para los vectores base iniciales,  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ , en relación con la nueva base  $B'$ . Al seguir el procedimiento del ejemplo 59a, el lector debe poder demostrar que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= -\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}_2 &= 2\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2 \end{aligned}$$

(verifíquese), de modo que

$$[\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz de transición de  $B$  hacia  $B'$  es

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

*Solución (b).* Por simple observación,

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

de modo que al aplicar (4.34) y la matriz de transición del inciso (a),

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Es posible que el lector desee verificar este resultado, comprobando que  $\mathbf{v} = -3\mathbf{u}'_1 + 5\mathbf{u}'_2$ .

#### Ejemplo 64 (Aplicación a la rotación de los ejes de coordenadas.)

En muchos problemas, se da un sistema de coordenadas rectangulares  $xy$  y se obtiene un nuevo sistema de coordenadas  $x'y'$ , al hacer girar el sistema  $xy$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj, alrededor del origen, para describir un ángulo  $\theta$ . Cuando se hace esto, cada punto  $Q$  en el plano tiene dos conjuntos de coordenadas: las coordenadas  $(x, y)$ , relativas al sistema  $xy$ , y las coordenadas  $(x', y')$ , relativas al sistema  $x'y'$  (figura 4.18a).

Al introducir los vectores unitarios  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ , a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  positivos y los vectores unitarios  $\mathbf{u}'_1$  y  $\mathbf{u}'_2$ , a lo largo de los ejes  $x'$  y  $y'$  positivos, se puede considerar esta rotación como un cambio desde una base  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  hasta una nueva base  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$  (figura 4.18b). Por tanto, las nuevas coordenadas  $(x', y')$  y las coordenadas iniciales  $(x, y)$  de un punto  $Q$  están relacionadas por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

en donde  $P$  es la transición de  $B$  hacia  $B'$ . Para encontrar  $P$ , deben determinarse las matrices de coordenadas de los vectores base iniciales  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ , con relación a la nueva base.

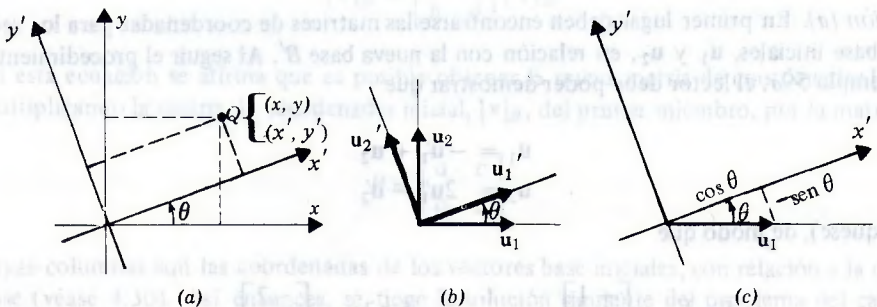


Figura 4.18

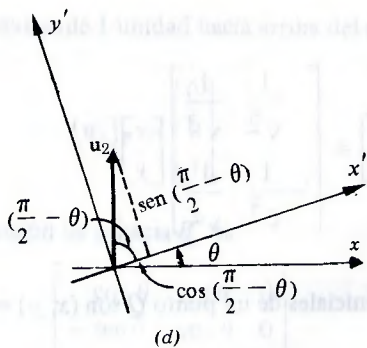


Figura 4.18d

Como se indica en la figura 4.18c, las componentes de  $u_1$  en la nueva base son  $\cos \theta$  y  $-\text{sen } \theta$ , de modo que

$$[u_1]_{B'} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\text{sen } \theta \end{bmatrix}$$

en tanto que, como se indica en la figura 4.18d en seguida las componentes de  $u_2$  en la nueva base son  $\cos(\pi/2 - \theta) = \text{sen } \theta$  y  $\text{sen}(\pi/2 - \theta) = \cos \theta$ , de modo que

$$[u_2]_{B'} = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, la matriz de transición de  $B$  hacia  $B'$  es

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

y (4.35) queda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

o, de modo equivalente,

$$x' = x \cos \theta + y \text{sen } \theta$$

$$y' = -x \text{sen } \theta + y \cos \theta$$

Por ejemplo, si se hacen girar los ejes  $\theta = 45^\circ$  entonces, puesto que

$$\text{sen } 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



(4.36) queda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por tanto, si las coordenadas iniciales de un punto  $Q$  son  $(x, y) = (2, -1)$ , entonces

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

de modo que las nuevas coordenadas de  $Q$  son  $(x', y') = (1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$ .

### Ejemplo 65 (Aplicación a la rotación de ejes en el espacio tridimensional.)

Supóngase que se hace girar un sistema de coordenadas rectangulares  $xyz$ , alrededor de su eje  $z$ , en sentido contrario al de las manecillas del reloj (si se mira hacia abajo a lo largo del eje positivo  $z$ ), hasta describir un ángulo  $\theta$  (figura 4.19). Si se introducen los vectores unitarios  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  y  $\mathbf{u}_3$ , a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  positivos, y los vectores unitarios  $\mathbf{u}'_1$ ,  $\mathbf{u}'_2$  y  $\mathbf{u}'_3$ , a lo largo de los ejes  $x'$ ,  $y'$  y  $z'$  positivos, es posible considerar la rotación como un cambio desde la base  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  hacia la nueva base  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ . Con base en lo desarrollado en el ejemplo 64, debe resultar evidente que

$$[\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

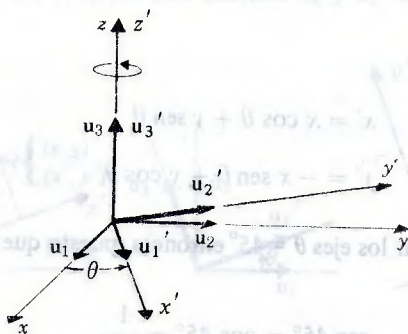


Figura 4.19

Es más, supuesto que  $\mathbf{u}_3$  se extiende 1 unidad hacia arriba del eje positivo  $z'$ ,

$$[\mathbf{u}_3]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz de transición de  $B$  hacia  $B'$  es

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y las coordenadas iniciales  $(x, y, z)$  de un punto  $Q$  están relacionadas con sus nuevas coordenadas  $(x', y', z')$  por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 66**

Considérense los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En el ejemplo 63 se encontró la matriz de transición de la base  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  para  $R^2$  hacia la base  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ . Sin embargo, también es posible preguntar acerca de la matriz de transición de  $B'$  hacia  $B$ . Para obtener esta matriz, simplemente se cambia el punto de vista y se considera a  $B'$  como la base inicial y a  $B$  como la base nueva. Como es costumbre, las columnas de la matriz de transición serán las coordenadas de los vectores base iniciales con relación a la nueva base.

Por simple observación,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}'_2 &= 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

de manera que

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz de transición de  $B'$  hacia  $B$  es

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si se multiplica la matriz de transición de  $B$  hacia  $B'$ , que se obtuvo en el ejemplo 63, por la matriz de transición de  $B'$  hacia  $B$ , que se obtuvo en este ejemplo, se encuentra

$$PQ = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

lo cual indica que  $Q = P^{-1}$ . Como hace ver el teorema que sigue, esto no es accidental.

**Teorema 26.** Si  $P$  es la matriz de transición desde una base  $B$  hacia una base  $B'$  entonces

- (a)  $P$  es invertible  
 (b)  $P^{-1}$  es la matriz de transición de  $B'$  hacia  $B$ .

(La demostración se pospone hasta el final de la sección.) Como resumen, si  $P$  es la matriz de transición desde una base  $B$  hacia una base  $B'$  entonces, para todo vector  $\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_{B'} &= P[\mathbf{v}]_B \\ [\mathbf{v}]_B &= P^{-1}[\mathbf{v}]_{B'} \end{aligned}$$

El siguiente teorema indica que si  $P$  es la matriz de transición desde una base *ortonormal* hacia otra, entonces, en especial, la inversa de  $P$  se encuentra con mucha facilidad.

**Teorema 27.** Si  $P$  es la matriz de transición desde una base *ortonormal* hacia otra base *ortonormal*, para un espacio de productos interiores, entonces

$$P^{-1} = P^t$$

(Se omite la demostración.)

Para ilustrar este resultado, considérese la matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sen \theta \\ -\sen \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

que se obtuvo en el ejemplo 64, cuando se hicieron girar los ejes de coordenadas (cambiando en consecuencia la base ortonormal  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  de la figura 4.18b a la base ortonormal  $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ ). Es fácil verificar que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sen \theta \\ \sen \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

de manera que  $P^{-1} = P^t$ .

**Definición.** Una matriz cuadrada  $A$  con la propiedad de que

$$A^{-1} = A^t$$

se denomina *matriz ortogonal*.



Como consecuencia, en el teorema 27 se afirma que una matriz de transición de una base ortonormal a otra siempre es ortogonal.

El siguiente resultado, cuya demostración se analiza en los ejercicios, facilita averiguar si una matriz  $A$  de  $n \times n$  es ortogonal.

**Teorema 28.** *Las proposiciones que siguen son equivalentes:*

- (a)  $A$  es ortogonal
- (b) Los vectores renglón de  $A$  forman un conjunto ortonormal en  $R^n$ , con el producto euclidiano interior
- (c) Los vectores columna de  $A$  forman un conjunto ortonormal en  $R^n$ , con el producto euclidiano interior.

### Ejemplo 67

Considérese la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Los vectores renglón de  $A$  son

$$\mathbf{r}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \mathbf{r}_2 = (0, 0, 1), \quad \mathbf{r}_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

Con relación al producto euclidiano interior se tiene

$$\|\mathbf{r}_1\| = \|\mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{r}_3\| = 1$$

y

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 = 0$$

de modo que los vectores renglón de  $A$  forman un conjunto ortonormal en  $R^3$ . Por tanto,  $A$  es ortogonal y

$$A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Es posible que el lector encuentre instructivo verificar que los vectores columna de  $A$  también forman un conjunto ortonormal.)

En los ejemplos 64 y 65 se consideró el problema de relacionar las coordenadas iniciales y las nuevas, cuando se llevó a cabo un cambio geométrico (rotación) en los ejes. A veces se presenta el problema inverso siguiente. Se conoce una relación

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

entre las coordenadas iniciales y las nuevas, en donde la matriz de  $2 \times 2$  es ortogonal, y se tiene interés en determinar cómo están relacionados geoméricamente el sistema de coordenadas  $xy$  y el sistema  $x'y'$ . La ecuación (4.37) se conoce como **transformación ortogonal de coordenadas** sobre  $R^2$ . A fin de estudiar el efecto de una transformación ortogonal de coordenadas, considérense los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

en el sistema de coordenadas  $xy$ , e introdúzcase un sistema de coordenadas  $x'y'$ , con el eje  $x'$  positivo a lo largo de  $\mathbf{u}'_1$ , y el eje  $y'$  positivo a lo largo de  $\mathbf{u}'_2$  (figura 4.20). Debido a que se supone que la matriz de  $2 \times 2$  de (4.37) es ortogonal, los vectores  $\mathbf{u}'_1$  y  $\mathbf{u}'_2$  son ortogonales, lo cual asegura que los ejes  $x'$  y  $y'$  son perpendiculares. Dado que

$$\mathbf{u}'_1 = a_1\mathbf{u}_1 + b_1\mathbf{u}_2$$

y

$$\mathbf{u}'_2 = a_2\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2$$

la matriz

$$Q = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

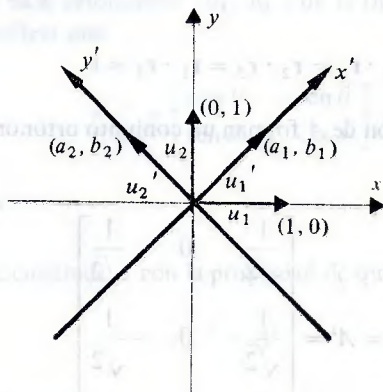


Figura 4.20

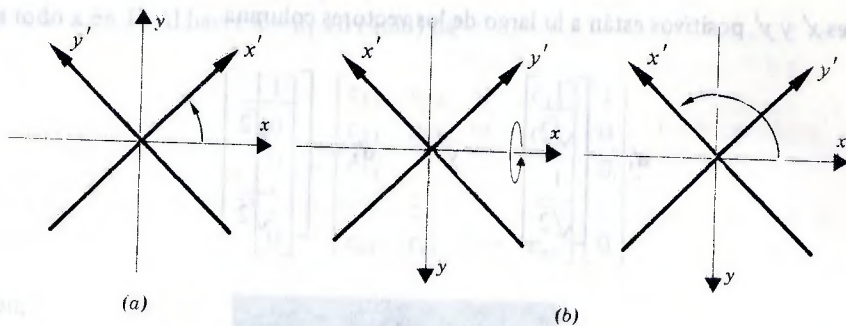


Figura 4.21

dada en (4.37) es la matriz de transición de la base  $\{u'_1, u'_2\}$  hacia la base  $\{u_1, u_2\}$ . Evidentemente, hay dos posibilidades; se puede obtener el sistema de coordenadas  $x'y'$  haciendo girar el sistema de coordenadas  $xy$  (figura 4.21a), o bien, es posible obtener el sistema de coordenadas  $x'y'$  reflejando primero el sistema  $xy$  con relación al eje  $x$  y, a continuación, girando el sistema de coordenadas reflejado (figura 4.21b). En los ejercicios se demuestra que el determinante de una matriz ortogonal siempre es  $+1$  ó  $-1$ . Es más, se puede probar que la transformación ortogonal de coordenadas (4.37) es una rotación si

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 1$$

y es una reflexión seguida por una rotación ortogonal si este determinante es  $-1$ .

De manera análoga, una transformación ortogonal de coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{sobre } R^3 \text{ es una rotación si } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1$$

y es una rotación combinada con una reflexión en uno de los planos coordenados, si este determinante es  $-1$ .

Ejemplo 68

La transformación ortogonal de coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{es una rotación ya que } \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1$$



Los ejes  $x'$  y  $y'$  positivos están a lo largo de los vectores columna

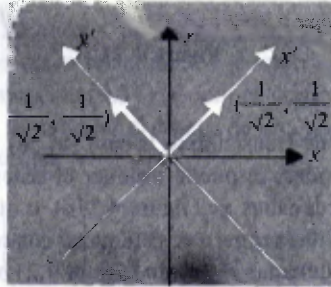
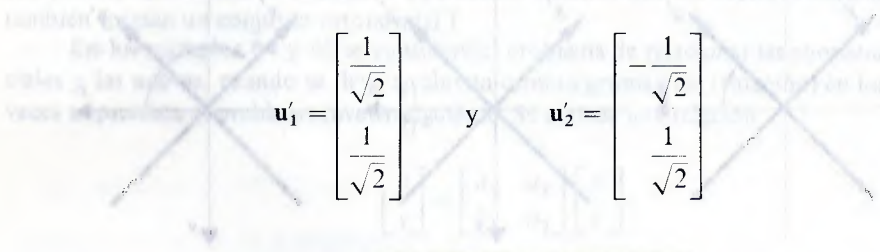


Figura 4.22

### OPCIONAL

**Demostración del teorema 26.** Sea  $Q$  la matriz de transición de  $B'$  hacia  $B$ . Se demostrará que  $QP = I$  y, en consecuencia, se concluirá que  $Q = P^{-1}$ , para completar la demostración.

Supóngase que  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  y supóngase además que

$$QP = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Con base en (4.34),

$$[x]_{B'} = P[x]_B$$

y

$$[x]_B = Q[x]_{B'}$$

para todo  $x$  en  $V$ . Al multiplicar toda la ecuación de arriba desde la izquierda por  $Q$  y sustituir la segunda ecuación da

$$[x]_B = QP[x]_B \quad (4.38)$$

para todo  $x$  en  $V$ . Al hacer  $x = u_1$  en (4.38) da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & & & \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$$

De manera análoga, al sustituir sucesivamente  $x = u_2, \dots, u_n$  en (4.38) se llega a

$$\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ c_{3n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,  $QP = I$ . ■

**EJERCICIOS 4.10**

1. Halle la matriz de coordenadas y el vector de coordenadas para  $w$ , con relación a la base  $S = \{u_1, u_2\}$ .

- (a)  $u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1); w = (3, -7)$
- (b)  $u_1 = (2, -4), u_2 = (3, 8); w = (1, 1)$
- (c)  $u_1 = (1, 1), u_2 = (0, 2); w = (a, b)$

2. Halle el vector de coordenadas y la matriz de coordenadas para  $v$ , con relación a  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ .

- (a)  $v = (2, -1, 3), v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (2, 2, 0), v_3 = (3, 3, 3)$
- (b)  $v = (5, -12, 3), v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (-4, 5, 6), v_3 = (7, -8, 9)$

3. Halle el vector de coordenadas y la matriz de coordenadas para  $p$ , con relación a  $S = \{p_1, p_2, p_3\}$ .

- (a)  $p = 4 - 3x + x^2, p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2$
- (b)  $p = 2 - x + x^2, p_1 = 1 + x, p_2 = 1 + x^2, p_3 = x + x^2$

4. Halle el vector de coordenadas y la matriz de coordenadas para  $A$ , con relación a  $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. En cada inciso se da una base ortonormal relativa al producto euclidiano interior. Aplique el método del ejemplo 62 para encontrar el vector de coordenadas y la matriz de coordenadas de  $\mathbf{w}$ .

(a)  $\mathbf{w} = (3, 7)$ ;  $\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $\mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b)  $\mathbf{w} = (-1, 0, 2)$ ;  $\mathbf{u}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ,  $\mathbf{u}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ,  $\mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

6. (a) Halle  $\mathbf{w}$  si  $(\mathbf{w})_S = (6, -1, 4)$  y  $S$  es la base que se da en el ejercicio 2a.  
 (b) Halle  $\mathbf{q}$  si  $(\mathbf{q})_S = (3, 0, 4)$  y  $S$  es la base que se da en el ejercicio 3a.  
 (c) Halle  $B$  si  $(B)_S = (-8, 7, 6, 3)$  y  $S$  es la base que se da en el ejercicio 4.

7. Suponga que  $R^2$  tiene el producto euclidiano interior y que  $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$  es la base ortonormal con  $\mathbf{w}_1 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ ,  $\mathbf{w}_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ . Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  los vectores en  $R^2$  para los que  $(\mathbf{u})_S = (1, 1)$  y  $(\mathbf{v})_S = (-1, 4)$ .

(a) Calcule  $\|\mathbf{u}\|$ ,  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  y  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ , aplicando el teorema 25.

(b) Halle  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  y verifique los resultados del inciso (a), calculando  $\|\mathbf{u}\|$ ,  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  y  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  directamente.

8. Considere las bases  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  y  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  para  $R^2$ , en donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Halle la matriz de transición de  $B$  hacia  $B'$ .

(b) Calcule la matriz de coordenadas  $[\mathbf{w}]_B$ , en donde

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

y use (4.34) para calcular  $[\mathbf{w}]_{B'}$ .

(c) Verifique lo que se hizo, calculando  $[\mathbf{w}]_{B'}$  directamente.

(d) Halle la matriz de transición de  $B'$  hacia  $B$ .

9. Repita las instrucciones del ejercicio 8 con

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

10. Considere las bases  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  y  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  para  $R^3$ , en donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad y \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- (a) Halle la matriz de transición de  $B$  hacia  $B'$ .
- (b) Calcule la matriz de coordenadas  $[w]_{B'}$ , en donde

$$w = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

- y aplique (4.34) para calcular  $[w]_{B'}$ .
- (c) Verifique lo que se acaba de hacer, calculando  $[w]_{B'}$  directamente.

11. Repita las instrucciones del ejercicio 10 con

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

12. Considere las bases  $B = \{p_1, p_2\}$  y  $B' = \{q_1, q_2\}$  para  $P_1$ , en donde  $p_1 = 6 + 3x$ ,  $p_2 = 10 + 2x$ ,  $q_1 = 2$ ,  $q_2 = 3 + 2x$ .

- (a) Halle la matriz de transición de  $B$  hacia  $B'$ .
- (b) Calcule la matriz de coordenadas  $[p]_{B'}$  en donde  $p = -4 + x$ , y aplique (4.34) para calcular  $[p]_{B'}$ .
- (c) Verifique los resultados obtenidos calculando  $[p]_{B'}$  directamente.
- (d) Halle la matriz de transición de  $B'$  hacia  $B$ .

13. Sea  $V$  el espacio generado por  $f_1 = \text{sen } x$  y  $f_2 = \text{cos } x$ .

- (a) Demuestre que  $g_1 = 2 \text{ sen } x + \text{cos } x$  y  $g_2 = 3 \text{ cos } x$  forman una base para  $V$ .
- (b) Halle la matriz de transición de  $B = \{f_1, f_2\}$  hacia  $B' = \{g_1, g_2\}$ .
- (c) Calcule la matriz de coordenadas  $[h]_{B'}$  en donde  $h = 2 \text{ sen } x - 5 \text{ cos } x$  y aplique (4.34) para obtener  $[h]_{B'}$ .
- (d) Verifique los resultados obtenidos calculando  $[h]_{B'}$  directamente.
- (e) Halle la matriz de transición de  $B'$  hacia  $B$ .

14. Supóngase que se obtiene un sistema de coordenadas rectangulares  $x'y'$  haciendo girar un sistema de coordenadas rectangulares  $xy$  hasta describir un ángulo  $\theta = 3\pi/4$ .

- (a) Halle las coordenadas  $x'y'$  del punto cuyas coordenadas  $xy$  son  $(-2, 6)$
- (b) Halle las coordenadas  $xy$  del punto cuyas coordenadas  $x'y'$  son  $(5, 2)$ .

15. Repita el ejercicio 14 con  $\theta = \pi/3$ .

16. Suponga que se obtiene un sistema de coordenadas rectangulares  $x'y'z'$  haciendo girar un sistema de coordenadas rectangulares  $xyz$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje  $z$  (cuando se observa hacia abajo a lo largo del eje  $z$ ) hasta describir un ángulo  $\theta = \pi/4$ .

- (a) Halle las coordenadas  $x'y'z'$  del punto cuyas coordenadas  $xyz$  son  $(-1, 2, 5)$ .  
 (b) Halle las coordenadas  $xyz$  del punto cuyas coordenadas  $x'y'z'$  son  $(1, 6, -3)$ .
17. Repita el ejercicio 16 para una rotación de  $\theta = \pi/3$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje  $y$  (cuando se observa a lo largo del eje  $y$  positivo hacia el origen).
18. Repita el ejercicio 16 para una rotación de  $\theta = 3\pi/4$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje  $x$  (al observar a lo largo del eje  $x$  positivo hacia el origen).
19. Aplique el teorema 28 para determinar cuáles de las siguientes matrices son ortogonales.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

20. Halle la inversa de aquellas matrices del ejercicio 19 que sean ortogonales.
21. Demuestre que las siguientes matrices son ortogonales para todo valor de  $\theta$ .

$$(a) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Halle las inversas de las matrices del ejercicio 21.

23. Considere la transformación ortogonal de coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Encuentre  $(x', y')$  para los puntos con las coordenadas  $(x, y)$  siguientes.

- (a)  $(2, -1)$     (b)  $(4, 2)$     (c)  $(-7, -8)$     (d)  $(0, 0)$

24. Dibuje un esquema de los ejes  $xy$  y los ejes  $x'y'$  para la transformación de coordenadas del ejercicio 23.

25. ¿Para cuáles de las siguientes matrices  $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$  es una rotación?

$$(a) P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (b) P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$(c) P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad (d) P = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

26. Construya un esquema de los ejes  $xy$  y los  $x'y'$  para las transformaciones de coordenadas del ejercicio 25.

27. Considere la transformación ortogonal de coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Halle  $(x', y', z')$  para los puntos con las coordenadas  $(x, y, z)$  siguientes.

(a)  $(3, 0, -7)$     (b)  $(1, 2, 6)$     (c)  $(-9, -2, -3)$     (d)  $(0, 0, 0)$

28. Dibuje un esquema de los ejes  $xyz$  y los ejes  $x'y'z'$  para la transformación de coordenadas del ejercicio 27.

29. ¿Para cuáles de las siguientes matrices  $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$  es una rotación?

$$(a) P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) P = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

30. Dibuje un esquema de los ejes  $xyz$  y  $x'y'z'$  para las transformaciones de coordenadas del ejercicio 29.

31. (a) Se obtiene un sistema de coordenadas rectangulares  $x'y'z'$  al hacer girar un sistema de coordenadas  $xyz$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje  $y$  hasta formar un ángulo  $\theta$  (al observar a lo largo del eje  $y$  positivo hacia el origen). Halle una matriz  $A$  tal que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

en donde  $(x, y, z)$  y  $(x', y', z')$  son las coordenadas de un punto en los sistemas  $xyz$  y  $x'y'z'$ , respectivamente.

(b) Repita el inciso (a) para una rotación alrededor del eje  $x$ .

32. Se obtiene un sistema de coordenadas rectangulares  $x''y''z''$  al hacer girar primero un sistema de coordenadas rectangulares  $xyz$ ,  $60^\circ$  en sentido contrario al



de las manecillas del reloj (al mirar hacia abajo del eje  $z$  positivo), para obtener un sistema de coordenadas  $xyz$  y, a continuación, haciendo girar el sistema de coordenadas  $x'y'z'$ ,  $45^\circ$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje  $y'$  (si se mira a lo largo del eje  $y'$  positivo, hacia el origen). Halle una matriz  $A$  tal que

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

en donde  $(x, y, z)$  y  $(x'', y'', z'')$  son las coordenadas  $xyz$  y  $x''y''z''$  de un punto.

33. Demuestre que si  $A$  es una matriz ortogonal, entonces  $A^t$  también es ortogonal.
34. Pruebe que una matriz de  $n \times n$  es ortogonal si sólo si sus renglones forman un conjunto ortonormal en  $R^n$ .
35. Aplique los resultados de los ejercicios 33 y 34 para demostrar que una matriz de  $n \times n$  es ortogonal si y sólo si sus columnas forman un conjunto ortonormal en  $R^n$ .
36. Pruebe que si  $P$  es una matriz ortogonal, entonces  $\det(P) = 1$  ó  $-1$ .
37. Pruebe el teorema 25a.
38. Pruebe el teorema 25b.
39. Pruebe el teorema 25c.

## EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

1. En cada inciso, el espacio de solución es un subespacio de  $R^3$  y, por tanto, debe ser una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen, todo  $R^3$ , o únicamente el origen. (Vea la observación que sigue al ejemplo 11.) Para cada sistema, determine cuál es el caso. Si el subespacio es un plano, halle una ecuación para él, y si es una recta encuentre las ecuaciones paramétricas.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & 0x + 0y + 0z = 0 \\ \text{(b)} & \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 6x - 9y + 3z = 0 \\ -4x + 6y - 2z = 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(c)} & \begin{array}{l} x - 2y + 7z = 0 \\ -4x + 8y + 5z = 0 \\ 2x - 4y + 3z = 0 \end{array} \\ \text{(d)} & \begin{array}{l} x + 4y + 8z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{array} \end{array}$$

2. Suponga que  $R^4$  tiene el producto euclidiano interior.

- (a) Halle un vector en  $R^4$  sea ortogonal a  $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, 0)$  y  $\mathbf{u}_4 = (0, 0, 0, 1)$  y forme ángulos iguales con  $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 0)$  y  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 0)$ .
- (b) Halle un vector  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  de longitud 1 que sea ortogonal a  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ , por arriba, y tal que el coseno del ángulo entre  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{u}_2$  sea el doble del coseno del ángulo entre  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{u}_3$ .

3. (a) Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  con los vectores renglón  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$ , y  $B$  una matriz de  $n \times p$  con los vectores columna  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_p$ . Demuestre que el elemento del renglón  $i$  y la columna  $j$  de  $AB$  es el producto euclidiano interior de  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{c}_j$ .
  - (b) Use el resultado de (a) para demostrar que si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  tal que  $AA^t = I$ , entonces los vectores renglón de  $A$  forman un conjunto ortonormal en  $R^n$ , con el producto euclidiano interior.
  - (c) Demuestre que si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  y  $AA^t = I$ , entonces los vectores columna de  $A$  forman un conjunto ortonormal en  $R^n$ , con el producto euclidiano interior [*Sugerencia*: Demuestre que  $A^t A = I$  y aplique el resultado del inciso (b) a  $A^t$ .]
4. Sea  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  un sistema de  $m$  ecuaciones en  $n$  incógnitas. Demuestre que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

es una solución del sistema si y sólo si el vector  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es ortogonal a todo vector renglón de  $A$  en el producto euclidiano interior sobre  $R^n$  (*Sugerencia*: Aplique el resultado del ejercicio suplementario 3a.)

5. Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz para demostrar que si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son números reales positivos, entonces

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

6. Sea  $W$  el espacio generado por  $\mathbf{f} = \sin x$  y  $\mathbf{g} = \cos x$ .
- (a) Demuestre que para cualquier valor de  $\theta$ ,  $\mathbf{f}_1 = \sin(x + \theta)$  y  $\mathbf{g}_1 = \cos(x + \theta)$  son vectores en  $W$ .
  - (b) Demuestre que  $\mathbf{f}_1$  y  $\mathbf{g}_1$  forman una base para  $W$ .
7. (a) Expresé  $(4a, a - b, a + 2b)$  como una combinación lineal de  $(4, 1, 1)$  y  $(0, -1, 2)$ .
- (b) Expresé  $(3a + b + 3c, -a + 4b - c, 2a + b + 2c)$  como una combinación lineal de  $(3, -1, 2)$  y  $(1, 4, 1)$ .
- (c) Expresé  $(2a - b + 4c, 3a - c, 4b + c)$  como una combinación lineal de tres vectores diferentes de cero.
8. (a) Expresé  $\mathbf{v} = (1, 1)$  como una combinación lineal de  $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (3, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (2, 1)$ , de dos maneras diferentes.
- (b) Demuestre que esto no viola el teorema 24.
9. Demuestre que si  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  son vectores en un espacio de productos interiores y  $c$  es un escalar cualquiera, entonces

$$\|c\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = c^2\|\mathbf{x}\|^2 + 2c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2$$

10. Suponga que  $R^3$  tiene el producto euclidiano interior. Halle dos vectores de longitud 1 que sean ortogonales a los tres vectores  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-2, 1, 2)$  y  $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 1)$ .

# 5

## Transformaciones lineales

### 5.1 INTRODUCCION A LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

En esta sección se inicia el estudio de las funciones con valor vectorial de una variable vectorial. Es decir, funciones que tienen la forma  $\mathbf{w} = F(\mathbf{v})$ , en donde la variable independiente  $\mathbf{v}$  y la dependiente  $\mathbf{w}$  son vectores. Se enfoca la atención en una clase especial de funciones vectoriales conocidas como transformaciones lineales. Estas funciones tienen muchas aplicaciones importantes en física, ingeniería, ciencias sociales y diversas ramas de las matemáticas.

Si  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales y  $F$  es una función que asocia un vector único en  $W$ , con cada vector en  $V$ , se dice que  $F$  **aplica (mapea)**  $V$  en  $W$  y se escribe  $F: V \rightarrow W$ . Además, si  $F$  asocia el vector  $\mathbf{w}$  al vector  $\mathbf{v}$  se escribe  $\mathbf{w} = F(\mathbf{v})$  y se dice que  $\mathbf{w}$  es la **imagen** de  $\mathbf{v}$  bajo  $F$ .

Como ilustración, si  $\mathbf{v} = (x, y)$  es un vector en  $R^2$ , entonces la fórmula

$$F(\mathbf{v}) = (x, x + y, x - y) \quad (5.1)$$

define una función que aplica  $R^2$  en  $R^3$ . En particular, si  $\mathbf{v} = (1, 1)$ , entonces  $x = 1$  y  $y = 1$ , de modo que la imagen de  $\mathbf{v}$  bajo  $F$  es  $F(\mathbf{v}) = (1, 2, 0)$ .

**Definición.** Si  $F: V \rightarrow W$  es una función del espacio vectorial  $V$  hacia el espacio vectorial  $W$ , entonces  $F$  es una **transformación lineal** si

- (i)  $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$  para todos los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en  $V$ .
- (ii)  $F(k\mathbf{u}) = kF(\mathbf{u})$  para todos los vectores  $\mathbf{u}$  en  $V$  y todos los escalares  $k$ .

Como ilustración, sea  $F: R^2 \rightarrow R^3$  la función definida por (5.1). Si  $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$  y  $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ , entonces  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ , de modo que

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (x_1 + x_2, [x_1 + x_2] + [y_1 + y_2], [x_1 + x_2] - [y_1 + y_2]) \\ &= (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ &= F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) \end{aligned}$$



También, si  $k$  es un escalar,  $k\mathbf{u} = (kx_1, ky_1)$ , de manera que

$$\begin{aligned} F(k\mathbf{u}) &= (kx_1, kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1) \\ &= k(x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) \\ &= kF(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Por tanto,  $F$  es una transformación lineal.

Si  $F: V \rightarrow W$  es una transformación lineal, entonces para  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  cualesquiera en  $V$  y cualesquiera escalares  $k_1$  y  $k_2$ , se tiene

$$F(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2) = F(k_1\mathbf{v}_1) + F(k_2\mathbf{v}_2) = k_1F(\mathbf{v}_1) + k_2F(\mathbf{v}_2)$$

De modo análogo, si  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  son vectores en  $V$  y  $k_1, k_2, \dots, k_n$  son escalares, entonces

$$F(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n) = k_1F(\mathbf{v}_1) + k_2F(\mathbf{v}_2) + \dots + k_nF(\mathbf{v}_n) \quad (5.2)$$

A continuación se dan algunos ejemplos adicionales de transformaciones lineales.

### Ejemplo 1

Sea  $A$  una matriz fija de  $m \times n$ . Si se utiliza la notación matricial para vectores en  $R^m$  y  $R^n$ , entonces se puede definir una función  $T: R^n \rightarrow R^m$  por medio de

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

Obsérvese que si  $\mathbf{x}$  es una matriz de  $n \times 1$ , entonces el producto  $A\mathbf{x}$  es una matriz de  $m \times 1$ ; así entonces,  $T$  aplica  $R^n$  en  $R^m$ . Además,  $T$  es lineal; para comprobarlo, sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  matrices de  $n \times 1$  y  $k$  un escalar. Al aplicar las propiedades de la multiplicación de matrices, se obtiene

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} \quad \text{y} \quad A(k\mathbf{u}) = k(A\mathbf{u})$$

o, de modo equivalente,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \text{y} \quad T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$$

A la transformación lineal de este ejemplo se le denominará *multiplicación por  $A$* . A las transformaciones lineales de este tipo se les conoce como *transformaciones matriciales*.

### Ejemplo 2

Como caso especial del ejemplo anterior, sea  $\theta$  un ángulo fijo, supóngase que  $T: R^2 \rightarrow R^2$  es la multiplicación por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Si  $\mathbf{v}$  es el vector

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

entonces

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta \\ x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}$$

Geoméricamente,  $T(\mathbf{v})$  es el vector que se obtiene si se hace girar  $\mathbf{v}$  hasta describir un ángulo  $\theta$ . A fin de comprobarlo, sea  $\phi$  el ángulo entre  $\mathbf{v}$  y el eje  $x$  positivo y supóngase que

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

es el vector que se obtiene al hacer girar  $\mathbf{v}$  hasta que describe un ángulo  $\theta$  (figura 5.1). Se demostrará que  $\mathbf{v}' = T(\mathbf{v})$ . Si  $r$  denota la longitud de  $\mathbf{v}$ , entonces

$$x = r \cos \phi \quad y = r \operatorname{sen} \phi$$

De modo semejante, supuesto que  $\mathbf{v}'$  tiene la misma longitud que  $\mathbf{v}$ , se tiene

$$x' = r \cos(\theta + \phi) \quad y' = r \operatorname{sen}(\theta + \phi)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta + \phi) \\ r \operatorname{sen}(\theta + \phi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r \cos \theta \cos \phi - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ r \operatorname{sen} \theta \cos \phi + r \cos \theta \operatorname{sen} \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta \\ x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= A\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

La transformación lineal de este ejemplo se conoce como *rotación de  $\mathbb{R}^2$  hasta describir el ángulo  $\theta$* .

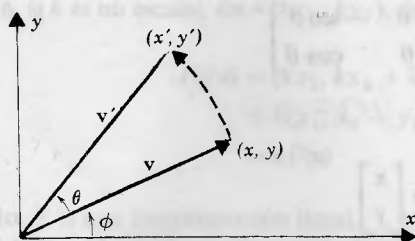


Figura 5.1

**Ejemplo 3**

Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales cualesquiera. La aplicación  $T: V \rightarrow W$  tal que  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  para todo  $\mathbf{v}$  en  $V$  es una transformación lineal conocida como **transformación cero**. A fin de ver que  $T$  es lineal, obsérvese que

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad T(k\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Por tanto,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \text{y} \quad T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$$

**Ejemplo 4**

Sea  $V$  cualquier espacio vectorial. La aplicación  $T: V \rightarrow V$  definida por  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  se conoce como **transformación identidad** sobre  $V$ . La verificación de que  $T$  es lineal se deja como ejercicio.

Si, como en los ejemplos 2 y 4,  $T: V \rightarrow V$  es una transformación lineal de un espacio vectorial  $V$  en sí mismo, entonces  $T$  es un **operador lineal** sobre  $V$ .

**Ejemplo 5**

Sea  $V$  cualquier espacio vectorial y  $k$  cualquier escalar fijo. Se deja como ejercicio verificar que la función  $T: V \rightarrow V$  definida por

$$T(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$$

es un operador lineal sobre  $V$ . Si  $k > 1$ ,  $T$  es una **dilatación** de  $V$ , y si  $0 < k < 1$ , entonces  $T$  es una **contracción** de  $V$ . Geométricamente, una dilatación "estira" cada vector que está en  $V$  en un factor  $k$ , y una contracción de  $V$  "comprime" cada vector en un factor de  $k$  (figura 5.2).

**Ejemplo 6**

Sea  $V$  un espacio de productos interiores y supóngase que  $W$  es un subespacio con dimensión finita de  $V$  y que tiene a

$$S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r\}$$



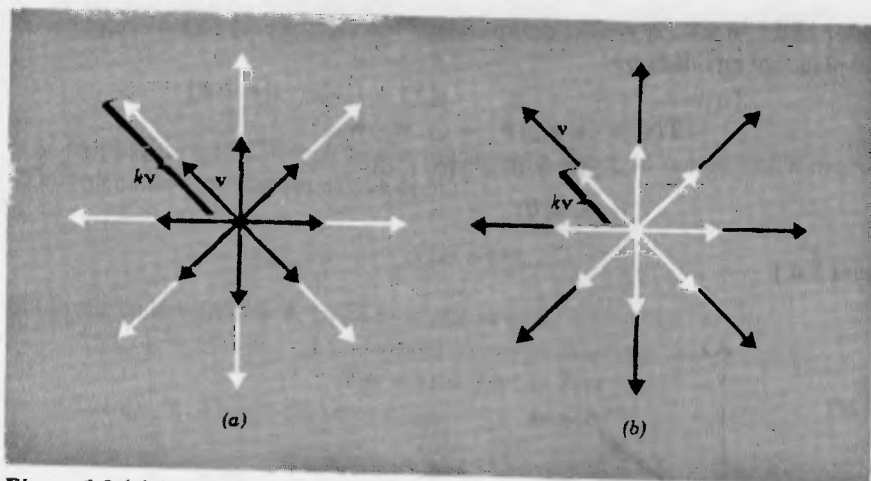


Figura 5.2 (a) Dilatación de  $V$ . (b) Contracción de  $V$ .

como una base ortonormal. Supóngase que  $T: V \rightarrow W$  es la función que aplica un vector  $v$  en  $V$  hacia su proyección ortogonal sobre  $W$  (sección 4.9); es decir

$$T(v) = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \cdots + \langle v, w_r \rangle w_r$$

(véase figura 5.3). La aplicación  $T$  recibe el nombre de *proyección ortogonal de  $V$  sobre  $W$* ; su linealidad se deduce a partir de las propiedades básicas del producto interior. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} T(u + v) &= \langle u + v, w_1 \rangle w_1 + \langle u + v, w_2 \rangle w_2 + \cdots + \langle u + v, w_r \rangle w_r \\ &= \langle u, w_1 \rangle w_1 + \langle u, w_2 \rangle w_2 + \cdots + \langle u, w_r \rangle w_r \\ &\quad + \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \cdots + \langle v, w_r \rangle w_r \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

De manera análoga  $T(ku) = kT(u)$ .

**Ejemplo 7**

Como caso especial del ejemplo anterior, supóngase que  $V = R^3$  tiene el producto euclidiano interior. Los vectores  $w_1 = (1, 0, 0)$  y  $w_2 = (0, 1, 0)$  forman una base ortonormal para el

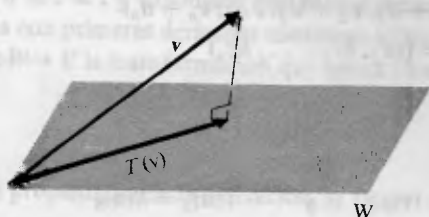


Figura 5.3

plano  $xy$ . Por tanto, si  $\mathbf{v} = (x, y, z)$  es cualquier vector en  $R^3$ , la proyección ortogonal de  $R^3$  sobre el plano  $xy$  está dada por

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \\ &= (x, y, 0) \end{aligned}$$

(Véase figura 5.4.)

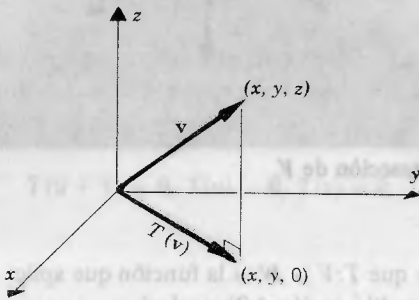


Figura 5.4

### Ejemplo 8

Sea  $V$  un espacio vectorial con  $n$  dimensiones y  $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$  una base fija para  $V$ . Por el teorema 24 de la sección 4.10, dos vectores cualesquiera  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en  $V$  se pueden escribir de manera única en la forma

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2 + \dots + c_n \mathbf{w}_n \quad \mathbf{v} = d_1 \mathbf{w}_1 + d_2 \mathbf{w}_2 + \dots + d_n \mathbf{w}_n$$

Por tanto,

$$(\mathbf{u})_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$(\mathbf{v})_S = (d_1, d_2, \dots, d_n)$$

Pero

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{w}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{w}_2 + \dots + (c_n + d_n)\mathbf{w}_n$$

$$k\mathbf{u} = (kc_1)\mathbf{w}_1 + (kc_2)\mathbf{w}_2 + \dots + (kc_n)\mathbf{w}_n$$

de modo que

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})_S = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n)$$

$$(k\mathbf{u})_S = (kc_1, kc_2, \dots, kc_n)$$

Por tanto,

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})_S = (\mathbf{u})_S + (\mathbf{v})_S \quad \text{y} \quad (k\mathbf{u})_S = k(\mathbf{u})_S \quad (5.3)$$

Análogamente, para las matrices de coordenadas se tiene

$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_S = [\mathbf{u}]_S + [\mathbf{v}]_S \quad \text{y} \quad [k\mathbf{u}]_S = k[\mathbf{u}]_S$$

Supóngase que  $T: V \rightarrow R^n$  es la función que aplica un vector  $\mathbf{v}$  en  $V$  hacia su vector de coordenadas con respecto a  $S$ ; es decir,

$$T(\mathbf{v}) = (\mathbf{v})_S$$

Entonces, en términos de  $T$ , en (5.3) se afirma que

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

y

$$T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$$

Así entonces,  $T$  es una transformación lineal de  $V$  hacia  $R^n$ .

### Ejemplo 9

Sea  $V$  un espacio de productos interiores y supóngase que  $\mathbf{v}_0$  es cualquier vector fijo en  $V$ . Sea  $T: V \rightarrow R$  la transformación que aplica un vector  $\mathbf{v}$  hacia su producto interior con  $\mathbf{v}_0$ ; es decir,

$$T(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle$$

Con base en las propiedades de un producto interior,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

y

$$T(k\mathbf{u}) = \langle k\mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle = kT(\mathbf{u})$$

de manera que  $T$  es una transformación lineal.

### Ejemplo 10

(Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.)

Sea  $V = C[0, 1]$  el espacio vectorial de todas las funciones con valor real continuas sobre el intervalo  $0 \leq x \leq 1$  y supóngase que  $W$  es el subespacio de  $C[0, 1]$  que consta de todas las funciones con primeras derivadas continuas sobre el intervalo  $0 \leq x \leq 1$ .

Sea  $D: W \rightarrow V$  la transformación que aplica  $\mathbf{f}$  hacia su derivada; es decir,

$$D(\mathbf{f}) = \mathbf{f}'$$

Al aplicar las propiedades de la derivación, se tiene



$$D(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = D(\mathbf{f}) + D(\mathbf{g})$$

y

$$D(k\mathbf{f}) = kD(\mathbf{f})$$

Por tanto,  $D$  es una transformación lineal.

### Ejemplo 11

(Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.)

Sea  $V = C[0, 1]$  el mismo del ejemplo anterior y supóngase que  $J: V \rightarrow R$  se define por medio de

$$J(\mathbf{f}) = \int_0^1 f(x) dx$$

Por ejemplo, si  $f(x) = x^2$ , entonces

$$J(\mathbf{f}) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Dado que

$$\int_0^1 (f(x) + g(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx$$

y

$$\int_0^1 kf(x) dx = k \int_0^1 f(x) dx$$

para cualquier constante  $k$ , se deduce que

$$J(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = J(\mathbf{f}) + J(\mathbf{g})$$

$$J(k\mathbf{f}) = kJ(\mathbf{f})$$

Por tanto,  $J$  es una transformación lineal.

### EJERCICIOS 5.1

En los ejercicios 1 al 8 se da una fórmula para una función  $F: R^2 \rightarrow R^2$ . En cada ejercicio, determine si  $F$  es lineal.

1.  $F(x, y) = (2x, y)$
2.  $F(x, y) = (x^2, y)$
3.  $F(x, y) = (y, x)$
4.  $F(x, y) = (0, y)$

5.  $F(x, y) = (x, y + 1)$       6.  $F(x, y) = (2x + y, x - y)$   
 7.  $F(x, y) = (y, y)$       8.  $F(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$

En los ejercicios 9 al 12, se da una fórmula para una función  $F: R^3 \rightarrow R^2$ . En cada ejercicio, determine si  $F$  es lineal.

9.  $F(x, y, z) = (x, x + y + z)$       10.  $F(x, y, z) = (0, 0)$   
 11.  $F(x, y, z) = (1, 1)$       12.  $F(x, y, z) = (2x + y, 3y - 4z)$

En los ejercicios 13 al 16, se da una fórmula para una función  $F: M_{22} \rightarrow R$ . En cada ejercicio, determine si  $F$  es lineal.

13.  $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$       14.  $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$   
 15.  $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2a + 3b + c - d$       16.  $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2$

En los ejercicios 17 al 20, se da una fórmula para una función  $F: P_2 \rightarrow P_2$ . En cada ejercicio, determine si  $F$  es lineal.

17.  $F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1 + a_2)x + (2a_0 - 3a_1)x^2$   
 18.  $F(a_0 - a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2$   
 19.  $F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0$   
 20.  $F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 1) + a_1x + a_2x^2$

21. Sea  $F: R^2 \rightarrow R^2$  la función que aplica cada punto del plano hacia su reflexión respecto al eje  $y$ . Halle una fórmula para  $F$  y demuestre que  $F$  es un operador lineal sobre  $R^2$ .  
 22. Sea  $B$  una matriz fija de  $2 \times 3$ . Demuestre que la función  $T: M_{22} \rightarrow M_{23}$  definida por  $T(A) = AB$  es una transformación lineal.  
 23. Sea  $T: R^3 \rightarrow R^2$  una transformación matricial y supóngase que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ y } T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

a) Halle la matriz.

b) Halle  $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}\right)$

c) Encuentre  $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$

24. Sea  $T: R^3 \rightarrow W$  la proyección ortogonal de  $R^3$  sobre el plano  $xz$ ,  $W$ .

- a) Halle una fórmula para  $T$ .  
 b) Halle  $T(2, 7, -1)$ .

25. Sea  $T:R^3 \rightarrow W$  la proyección ortogonal de  $R^3$  sobre el plano  $W$  que tiene la ecuación  $x + y + z = 0$ .

- a) Halle una fórmula para  $T$ .  
 b) Halle  $T(3, 8, 4)$ .

26. En cada inciso, sea  $T:R^2 \rightarrow R^2$  el operador lineal que hace girar cada vector del plano hasta describir el ángulo  $\theta$ . Encuentre  $T(-1, 2)$  y  $T(x, y)$ , cuando

(a)  $\theta = \frac{\pi}{4}$       (b)  $\theta = \pi$       (c)  $\theta = \frac{\pi}{6}$       (d)  $\theta = -\frac{\pi}{3}$

27. Pruebe que si  $T:V \rightarrow W$  es una transformación lineal, entonces  $T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$  para todos los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en  $V$ .

28. Sea  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$  una base para un espacio vectorial  $V$  y supóngase que  $T:V \rightarrow W$  es una transformación lineal. Demuestre que si  $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) = \dots = T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$ , entonces  $T$  es la transformación cero.

29. Sea  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$  una base para un espacio vectorial  $V$  y supóngase que  $T:V \rightarrow V$  es un operador lineal. Demuestre que si  $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$ ,  $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$ ,  $\dots$ ,  $T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_n$ , entonces  $T$  es la transformación identidad sobre  $V$ .

30. Sea  $S$  una base para un espacio vectorial  $V$ , con  $n$  dimensiones. Demuestre que si  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  forman un conjunto linealmente independiente de vectores en  $V$ , entonces los vectores de coordenadas  $(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \dots, (\mathbf{v}_r)_S$  forman un conjunto linealmente independiente en  $R^n$ , e inversamente.

31. Aplicando la notación del ejercicio 30, demuestre que si  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  genera a  $V$ , entonces los vectores de coordenadas  $(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \dots, (\mathbf{v}_r)_S$  generan a  $R^n$ , e inversamente.

32. Halle una base para el subespacio de  $P_2$  generado por los vectores que se dan.

- (a)  $-1 + x - 2x^2, 3 + 3x + 6x^2, 9$   
 (b)  $1 + x, x^2, -2 + 2x^2, -3x$   
 (c)  $1 + x - 3x^2, 2 + 2x - 6x^2, 3 + 3x - 9x^2$

(Sugerencia. Suponga que  $S$  es la base estándar para  $P_2$  y trabájese con los vectores de coordenadas en relación con  $S$ ; vea los ejercicios 30, 31.)

## 5.2 PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES: NUCLEO (KERNEL) Y RECORRIDO

En esta sección se desarrollan algunas propiedades básicas de las transformaciones lineales. En particular, se demuestra que una vez que se conocen las imágenes de los vectores base bajo una transformación lineal, es posible encontrar las imágenes de los vectores restantes en el espacio.



**Teorema 1.** Si  $T: V \rightarrow W$  es una transformación lineal, entonces:

- (a)  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
- (b)  $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$  para todos los  $\mathbf{v}$  en  $V$
- (c)  $T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})$  Para todos los  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  en  $V$

*Demostración.* Sea  $\mathbf{v}$  cualquier vector en  $V$ . Debido a que  $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , se tiene:

$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{v}) = 0T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

lo cual prueba (a).

También,  $T(-\mathbf{v}) = T((-1)\mathbf{v}) = (-1)T(\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ , lo cual prueba (b).

Por último,  $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}$ ; por tanto,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) &= T(\mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}) \\ &= T(\mathbf{v}) + (-1)T(\mathbf{w}) \\ &= T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Definición.** Si  $T: V \rightarrow W$  es una transformación lineal, entonces el conjunto de vectores en  $V$  que  $T$  aplica hacia  $\mathbf{0}$  se conoce como **núcleo** (*kernel* o *espacio nulo*) de  $T$ ; este espacio se denota por  $\ker(T)$ . El conjunto de todos los vectores en  $W$  que son imágenes bajo  $T$  de al menos un vector en  $V$  se conoce como **recorrido** de  $T$ ; este conjunto se denota por  $R(T)$ .

**Ejemplo 12**

Supóngase que  $T: V \rightarrow W$  es la transformación cero. Supuesto que  $T$  aplica todo vector hacia  $\mathbf{0}$ ,  $\ker(T) = V$ . Ya que  $\mathbf{0}$  es la única imagen posible bajo  $T$ ,  $R(T)$  consta del vector cero.

**Ejemplo 13**

Sea  $T: R^n \rightarrow R^m$  la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El núcleo de  $T$  consta de todos los

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

que son vectores solución del sistema homogéneo

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

El recorrido de  $T$  consta de los vectores

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

tales que el sistema

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

es consistente.

**Teorema 2.** Si  $T: V \rightarrow W$  es una transformación lineal entonces:

- El núcleo de  $T$  es un subespacio de  $V$ .
- El recorrido de  $T$  es un subespacio de  $W$ .

*Demostración.*

a) Para demostrar que  $\ker(T)$  es un subespacio, se debe demostrar que es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar. Sean  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  vectores en  $\ker(T)$  y supóngase que  $k$  es cualquier escalar. Entonces,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

de modo que  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  está en  $\ker(T)$ . También

$$T(k\mathbf{v}_1) = kT(\mathbf{v}_1) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de manera que  $k\mathbf{v}_1$  está en  $\ker(T)$ .

b) Sean  $\mathbf{w}_1$  y  $\mathbf{w}_2$  vectores en el recorrido de  $T$ . Para probar esta parte, es necesario demostrar que  $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$  y  $k\mathbf{w}_1$  están en el recorrido de  $T$ , para cualquier escalar  $k$ ; es decir, se han de encontrar los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  en  $V$  tales que  $T(\mathbf{a}) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$  y  $T(\mathbf{b}) = k\mathbf{w}_1$ .

Supuesto que  $\mathbf{w}_1$  y  $\mathbf{w}_2$  están en el recorrido de  $T$ , existen los vectores  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$  en  $V$  tales que  $T(\mathbf{a}_1) = \mathbf{w}_1$  y  $T(\mathbf{a}_2) = \mathbf{w}_2$ . Sean  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$  y  $\mathbf{b} = k\mathbf{a}_1$ . Entonces

$$T(\mathbf{a}) = T(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = T(\mathbf{a}_1) + T(\mathbf{a}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

y

$$T(\mathbf{b}) = T(k\mathbf{a}_1) = kT(\mathbf{a}_1) = k\mathbf{w}_1$$

lo cual completa la demostración. ■

#### Ejemplo 14

Supóngase que  $T: R^n \rightarrow R^m$  es la multiplicación por una matriz  $A$  de  $m \times n$ . Por lo visto en el ejemplo 13, el núcleo de  $T$  consta de todas las soluciones de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ; por tanto, el núcleo es el *espacio de soluciones* de este sistema. También, por lo visto en el ejemplo 13, el recorrido de  $T$  consta de todos los vectores  $\mathbf{b}$  tales que  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es consistente. Por consiguiente, por el teorema 14 de la sección 4.6, el recorrido de  $T$  es el *espacio de columnas* de la matriz  $A$ .

Supóngase que  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base para un espacio vectorial  $V$  y  $T: V \rightarrow W$  es una transformación lineal. Si sucede que se conocen las imágenes de los vectores base, esto es,

$$T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_n)$$

entonces se puede obtener la imagen  $T(\mathbf{v})$  de cualquier vector  $\mathbf{v}$ , expresando primero  $\mathbf{v}$  en términos de la base, por ejemplo,

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n$$

y, a continuación, utilizando la relación (5.2) de la sección 5.1, para escribir

$$T(\mathbf{v}) = k_1T(\mathbf{v}_1) + k_2T(\mathbf{v}_2) + \dots + k_nT(\mathbf{v}_n)$$

En pocas palabras, *una transformación lineal está completamente determinada por sus "valores" en una base.*

#### Ejemplo 15

Considérese la base  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  para  $R^3$ , donde  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$  y sea  $T: R^3 \rightarrow R^2$  una transformación lineal tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0) \quad T(\mathbf{v}_2) = (2, -1) \quad T(\mathbf{v}_3) = (4, 3)$$

Encuéntrese  $T(2, -3, 5)$ .

*Solución.* Expresese primero  $\mathbf{v} = (2, -3, 5)$  como combinación lineal de  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$  y  $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$ . Por tanto,

$$(2, -3, 5) = k_1(1, 1, 1) + k_2(1, 1, 0) + k_3(1, 0, 0)$$

o, al igualar las componentes correspondientes,



$$k_1 + k_2 + k_3 = 2$$

$$k_1 + k_2 = -3$$

$$k_1 = 5$$

lo cual conduce a  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = -8$ ,  $k_3 = 5$ , de modo que

$$(2, -3, 5) = 5\mathbf{v}_1 - 8\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3$$

De donde,

$$\begin{aligned} T(2, -3, 5) &= 5T(\mathbf{v}_1) - 8T(\mathbf{v}_2) + 5T(\mathbf{v}_3) \\ &= 5(1, 0) - 8(2, -1) + 5(4, 3) \\ &= (9, 23) \end{aligned}$$

**Definición.** Si  $T: V \rightarrow W$  es una transformación lineal, entonces la dimensión del recorrido de  $T$  se conoce como *rango de  $T$* , y la dimensión del núcleo se denomina *nulidad de  $T$* .

#### Ejemplo 16

Sea  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la rotación de  $\mathbb{R}^2$  hasta describir el ángulo  $\pi/4$ . Geométricamente es obvio que el recorrido de  $T$  es la totalidad de  $\mathbb{R}^2$  y que el núcleo de  $T$  es  $\{0\}$ . Por tanto,  $T$  tiene el rango = 2 y la nulidad = 0.

#### Ejemplo 17

Sea  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  la multiplicación por una matriz  $A$  de  $m \times n$ . En el ejemplo 14 se observó que el recorrido de  $T$  es el espacio de columnas de  $A$ . Por tanto, el rango de  $T$  es la dimensión del espacio de columnas de  $A$ , el cual es precisamente el rango de  $A$ . En pocas palabras,

$$\text{rango}(T) = \text{rango}(A)$$

También en el ejemplo 14 se vio que el núcleo de  $T$  es el espacio de soluciones de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Por consiguiente, la nulidad de  $T$  es la dimensión de este espacio de soluciones.

El teorema que sigue establece una relación entre el rango y la nulidad de una transformación lineal definida sobre un espacio vectorial de dimensión finita. La demostración se deja hasta el final de la sección.

**Teorema 3. (Teorema de la dimensión.)** Si  $T: V \rightarrow W$  es una transformación lineal desde un espacio vectorial  $V$  con dimensión  $n$  hacia un espacio vectorial  $W$ , entonces

$$(\text{rango de } T) + (\text{nulidad de } T) = n$$

En el caso especial en el que  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $W = \mathbb{R}^m$  y  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es la multiplicación por una matriz  $A$  de  $m \times n$ , el teorema de la dimensión conduce al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \text{nulidad de } T &= n - (\text{rango de } T) \\ &= (\text{número de columnas de } A) - (\text{rango de } T) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Sin embargo, en el ejemplo 17 se hizo notar que la nulidad de  $T$  es la dimensión del espacio de soluciones de  $Ax = 0$ , y que el rango de  $T$  es el rango de la matriz  $A$ . Por consiguiente, (5.4) conduce al teorema que sigue:

**Teorema 4.** *Si  $A$  es una matriz de  $m \times n$ , entonces la dimensión del espacio de soluciones de  $Ax = 0$  es*

$$n - \text{rango}(A)$$

**Ejemplo 18**

En el ejemplo 35 de la sección 4.5 se demostró que el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

tiene un espacio de soluciones bidimensional, al resolver el sistema y encontrar una base. Debido a que la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene cinco columnas, por el teorema 4 se deduce que el rango de  $A$  debe satisfacer

$$2 = 5 - \text{rango}(A)$$

de modo que  $\text{rango}(A) = 3$ . El lector puede verificar este resultado, reduciendo  $A$  hasta una forma escalonada en los renglones y demostrando que la matriz resultante tiene tres renglones diferentes de cero.

**OPCIONAL**

**Demostración del teorema 3.** Se debe demostrar que

$$\dim(R(T)) + \dim(\ker(T)) = n$$

Se dará la demostración para el caso en el que  $1 \leq \dim(\ker(T)) < n$ . Los casos  $\dim(\ker(T)) = 0$  y  $\dim(\ker(T)) = n$  se dejan como ejercicios. Supóngase que  $\dim(\ker(T)) = r$  y

que  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  es una base para el núcleo. Debido a que  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$  es linealmente independiente, en el inciso (c) del teorema 9 que se da en el capítulo 4 se afirma que existen  $n - r$  vectores,  $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ , tales que  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base para  $V$ . Para completar la demostración, se probará que los  $n - r$  vectores del conjunto  $S = \{T(\mathbf{v}_{r+1}), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$  forman una base para el recorrido de  $T$ . Entonces se concluye que

$$\dim(R(T)) + \dim(\ker(T)) = (n - r) + r = n$$

Primero se demostrará que  $S$  genera el recorrido de  $T$ . Si  $\mathbf{b}$  es un vector cualquiera en el recorrido de  $T$ , entonces  $\mathbf{b} = T(\mathbf{v})$  para algún vector  $\mathbf{v}$  en  $V$ . Ya que  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base para  $V$ ,  $\mathbf{v}$  se puede describir en la forma

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_r\mathbf{v}_r + c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$

Debido a que  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  están en el núcleo de  $T$ ,  $T(\mathbf{v}_1) = \dots = T(\mathbf{v}_r) = \mathbf{0}$ , de modo que

$$\mathbf{b} = T(\mathbf{v}) = c_{r+1}T(\mathbf{v}_{r+1}) + \dots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$

Por tanto,  $S$  genera el recorrido de  $T$ .

Por último, se demuestra que  $S$  es un conjunto linealmente independiente y, como consecuencia, forma una base para el recorrido de  $T$ . Supóngase que alguna combinación lineal de los vectores en  $S$  es cero, esto es,

$$k_{r+1}T(\mathbf{v}_{r+1}) + \dots + k_nT(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

Se debe demostrar que  $k_{r+1} = \dots = k_n = 0$ . Supuesto que  $T$  es lineal, es posible volver a escribir (5.5) como

$$T(k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \dots + k_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

con lo cual se afirma que  $k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \dots + k_n\mathbf{v}_n$  está en el núcleo de  $T$ . Por tanto, se puede escribir este vector como una combinación lineal de los vectores base  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$  por ejemplo,

$$k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \dots + k_n\mathbf{v}_n = k_1\mathbf{v}_1 + \dots + k_r\mathbf{v}_r$$

Por consiguiente,

$$k_1\mathbf{v}_1 + \dots + k_r\mathbf{v}_r - k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} - \dots - k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Supuesto que  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es linealmente independiente, todas las  $k$  son cero; en particular,  $k_{r+1} = \dots = k_n = 0$ , lo cual completa la demostración. ■

## EJERCICIOS 5.2

1. Sea  $T: R^2 \rightarrow R^2$  la multiplicación por

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$



¿Cuáles de las siguientes matrices están en  $R(T)$ ?

(a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$     (c)  $\begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$

2. Sea  $T: R^2 \rightarrow R^2$  la transformación lineal del ejercicio 1. ¿Cuáles de las siguientes matrices están en  $\ker(T)$ ?

(a)  $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$     (c)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Sea  $T: R^4 \rightarrow R^3$  la multiplicación por

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes matrices están en  $R(T)$ ?

(a)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$     (c)  $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Sea  $T: R^4 \rightarrow R^3$  la transformación lineal del ejercicio 3. ¿Cuáles de las siguientes matrices están en  $\ker(T)$ ?

(a)  $\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$     (c)  $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. Sea  $T: P_2 \rightarrow P_3$  la transformación lineal definida por  $T(p(x)) = xp(x)$ . ¿Cuáles de los polinomios siguientes están en  $\ker(T)$ ?

(a)  $x^2$     (b)  $0$     (c)  $1 + x$

6. Sea  $T: P_2 \rightarrow P_3$  la transformación lineal del ejercicio 5. ¿Cuáles de los siguientes polinomios están en  $R(T)$ ?

(a)  $x + x^2$     (b)  $1 + x$     (c)  $3 - x^2$

7. Sea  $V$  cualquier espacio vectorial y supóngase que  $T: V \rightarrow V$  está definida por  $T(v) = 3v$ .

- a) ¿Cuál es el núcleo de  $T$ ?  
b) ¿Cuál es el recorrido de  $T$ ?

8. Halle el rango y la nulidad de la transformación lineal del ejercicio 1.

9. Halle el rango y la nulidad de la transformación lineal del ejercicio 5.  
 10. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Encuentre el rango y la nulidad de la transformación lineal  $T: V \rightarrow V$  definida por

(a)  $T(x) = x$       (b)  $T(x) = 0$       (c)  $T(x) = 3x$

11. Considérese la base  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  para  $R^3$ , en donde  $v_1 = (1, 2, 3)$ ,  $v_2 = (2, 5, 3)$  y  $v_3 = (1, 0, 10)$ . Encuentre una fórmula para la transformación lineal  $T: R^3 \rightarrow R^2$  para la que  $T(v_1) = (1, 0)$ ,  $T(v_2) = (1, 0)$  y  $T(v_3) = (0, 1)$ . Calcule  $T(1, 1, 1)$ .  
 12. Halle la transformación lineal  $T: P_2 \rightarrow P_2$  para la que  $T(1) = (1) + x$ ,  $T(x) = 3 - x^2$  y  $T(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$ . Calcule  $T(2 - 2x + 3x^2)$ .

13. En cada inciso utilice la información dada a fin de encontrar la nulidad de  $T$ .

a)  $T: R^5 \rightarrow R^7$  tiene rango 3.      b)  $T: P_4 \rightarrow P_3$  tiene rango 1  
 c) El recorrido de  $T: R^6 \rightarrow R^3$  es  $R^3$ .      d)  $T: M_{22} \rightarrow M_{22}$  tiene rango 3.

14. Sea  $A$  una matriz de  $7 \times 6$  tal que  $Ax = 0$  tiene únicamente la solución trivial y supóngase que  $T: R^6 \rightarrow R^7$  es la multiplicación por  $A$ . Halle el rango y la nulidad de  $T$ .

15. Sea  $A$  una matriz de  $5 \times 7$  con rango 4.

- a) ¿Cuál es la dimensión del espacio de soluciones de  $Ax = 0$ ?  
 b) ¿ $Ax = b$  es consistente para todos los vectores  $b$  en  $R^5$ ? Dé una explicación.

En los ejercicios 16 al 19, sea  $T$  la multiplicación por la matriz que se da. Halle:

- a) Una base para el recorrido de  $T$ .  
 b) Una base para el núcleo de  $T$ .  
 c) El rango y la nulidad de  $T$ .

16.  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$       17.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

18.  $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$       19.  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

20. Sea  $T: R^3 \rightarrow V$  una transformación lineal de  $R^3$  hacia cualquier espacio vectorial. Demuestre que el núcleo de  $T$  es una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen, únicamente el origen, o bien, la totalidad de  $R^3$ .

21. Sea  $T: V \rightarrow R^3$  una transformación lineal desde cualquier espacio vectorial hacia  $R^3$ . Demuestre que el recorrido de  $T$  es una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen, únicamente el origen, o bien, la totalidad de  $R^3$ .

22. Sea  $T: R^3 \rightarrow R^3$  la multiplicación por

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Demuestre que el núcleo de  $T$  es una recta que pasa por el origen y encuentre las ecuaciones paramétricas de tal recta.  
 b) Demuestre que el recorrido de  $T$  es un plano que pasa por el origen y halle la ecuación de este plano.
23. Pruebe que si  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base para  $V$  y  $w_1, w_2, \dots, w_n$  son vectores en  $W$ , no necesariamente distintos, entonces hay una transformación lineal  $T: V \rightarrow W$  tal que  $T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, \dots, T(v_n) = w_n$ .
24. Pruebe el teorema de la dimensión en los casos:

- (a)  $\dim(\ker(T)) = 0$   
 (b)  $\dim(\ker(T)) = n$

25. Sea  $T: V \rightarrow V$  un operador lineal sobre un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita. Pruebe que  $R(T) = V$  si y sólo si  $\ker(T) = \{0\}$ .
26. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.) Sea  $D: P_3 \rightarrow P_2$  la transformación derivación  $D(p) = p'$ . Describa el núcleo de  $D$ .
27. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.) Sea  $J: P_1 \rightarrow R$  la transformación integración  $(p) = \int_{-1}^1 p(x)dx$ . Describa el núcleo de  $J$ .

### 5.3 TRANSFORMACIONES LINEALES DE $R^n$ HACIA $R^m$ ; GEOMETRIA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES DE $R^2$ HACIA $R^2$

En esta sección se estudian las transformaciones lineales de  $R^n$  hacia  $R^m$  y se obtienen las propiedades geométricas de las transformaciones lineales de  $R^2$  hacia  $R^2$ .

Primero se demuestra que toda transformación lineal de  $R^n$  hacia  $R^m$  es una transformación matricial. Más concretamente, se demuestra que si  $T: R^n \rightarrow R^m$  es cualquier transformación lineal, entonces es posible encontrar una matriz  $A$  de  $m \times n$  tal que  $T$  es la multiplicación por  $A$ . A fin de verificarlo, sea

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

la base estándar para  $R^n$  y supóngase que  $A$  es la matriz de  $m \times n$  que tiene a

$$T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$$

como sus vectores columna. (En esta sección se supone que todos los vectores se expresan en notación matricial.) Por ejemplo, si  $T: R^2 \rightarrow R^2$  está dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 $T(e_1)$     $T(e_2)$



De modo más general, si

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, T(\mathbf{e}_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

entonces,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Se demostrará que la transformación lineal  $T: R^n \rightarrow R^m$  es la multiplicación por  $A$ . Para verificarlo, obsérvese primero que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$$

Por tanto, por la linealidad de  $T$ ,

$$T(\mathbf{x}) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n T(\mathbf{e}_n) \quad (5.7)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n T(\mathbf{e}_n) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Al comparar (5.7) y (5.8) se llega a  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , es decir,  $T$  es la multiplicación por  $A$ .

A la matriz  $A$  que se da en (5.6) se le llamará la *matriz estándar para  $T$* .

**Ejemplo 19**

Hállese la matriz estándar para la transformación  $T: R^3 \rightarrow R^4$  definida por

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

*Solución.*

$$T(\mathbf{e}_1) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T(\mathbf{e}_2) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T(\mathbf{e}_3) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando a  $T(\mathbf{e}_1)$ ,  $T(\mathbf{e}_2)$ , y  $T(\mathbf{e}_3)$  como vectores columna, se obtiene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como una verificación, obsérvese que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

lo cual concuerda con la fórmula dada para  $T$ .

**Ejemplo 20**

Sea  $T: R^n \rightarrow R^m$  la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Encuéntrese la matriz estándar para  $T$ .

*Solución.* Los vectores  $T(\mathbf{e}_1)$ ,  $T(\mathbf{e}_2)$ ,  $\dots$ ,  $T(\mathbf{e}_n)$  son los vectores columna sucesivos de  $A$ . Por ejemplo,

$$T(\mathbf{e}_1) = A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Así entonces, la matriz estándar para  $T$  es

$$[T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n)] = A$$

En resumen, la matriz estándar para una transformación matricial es la propia matriz.

En el ejemplo 20 se sugiere una nueva manera de concebir las matrices. Una matriz  $A$  de  $m \times n$  se puede considerar como la matriz estándar para la transformación lineal que aplica la base estándar para  $R^n$  en los vectores columna de  $A$ . Por tanto,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

es la matriz estándar para la transformación lineal de  $R^3$  hacia  $R^2$  que aplica

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

respectivamente.

En el resto de esta sección se estudian las propiedades geométricas de las *transformaciones lineales en el plano*, es decir, transformaciones lineales de  $R^2$  hacia  $R^2$ . Si  $T: R^2 \rightarrow R^2$  es una transformación de este tipo y

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

es la matriz estándar para  $T$ , entonces

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Hay dos interpretaciones geométricas igualmente apropiadas para esta fórmula: Es posible considerar los elementos de las matrices



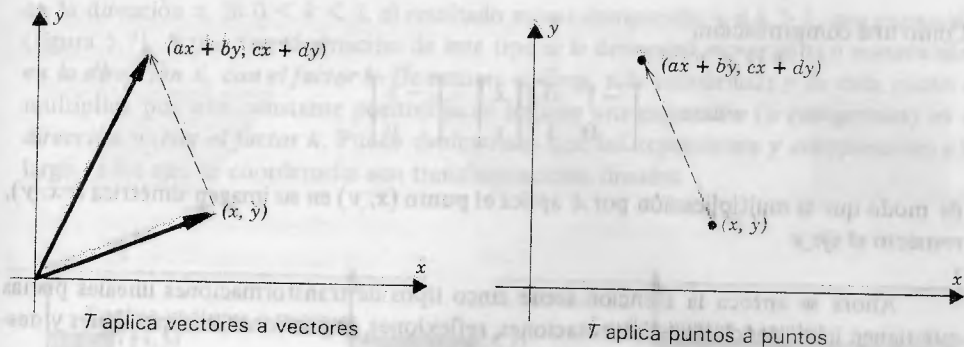


Figura 5.5

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

como componentes de vectores, o bien, como coordenadas de puntos. Con la primera interpretación,  $T$  aplica flechas hacia flechas, y con la segunda, puntos hacia puntos (figura 5.5). La interpretación que se elija no tiene importancia. En el análisis que sigue, se consideraran las transformaciones lineales en el plano como aplicaciones de puntos hacia puntos.

**Ejemplo 21**

Sea  $T: R^2 \rightarrow R^2$  la transformación lineal que aplica cada punto en su imagen simétrica respecto al eje  $y$  (figura 5.6). Hállese la matriz estándar para  $T$ .

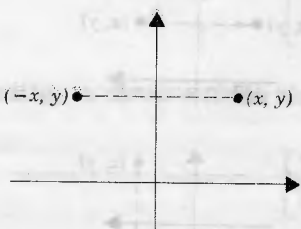


Figura 5.6

*Solución*

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando a  $T(\mathbf{e}_1)$  y  $T(\mathbf{e}_2)$  como vectores columna, se obtiene la matriz estándar

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como una comprobación,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

de modo que la multiplicación por  $A$  aplica el punto  $(x, y)$  en su imagen simétrica  $(-x, y)$ , respecto al eje  $y$ .

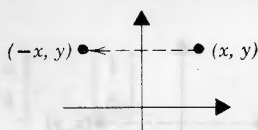
Ahora se enfoca la atención sobre cinco tipos de transformaciones lineales planas que tienen importancia especial: rotaciones, reflexiones, expansiones, compresiones y deslizamientos cortantes (cizallamientos).

**Rotaciones.** Si  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  hace girar cada punto en el plano alrededor del origen, hasta describir un ángulo  $\theta$ , entonces, por lo visto en el ejemplo 2 de la sección 5.1, se deduce que la matriz estándar para  $T$  es

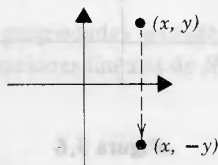
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

**Reflexiones.** Una *reflexión* respecto a una recta  $l$  que pasa por el origen, es una transformación que aplica cada punto del plano en su imagen como en un espejo, respecto a la recta  $l$ . Se puede demostrar que las reflexiones son transformaciones lineales. Los casos más importantes son las reflexiones respecto a los ejes de coordenadas y respecto a la recta  $y = x$ . Siguiendo el método del ejemplo 21, el lector debe poder demostrar que las matrices estándar para estas transformaciones son:

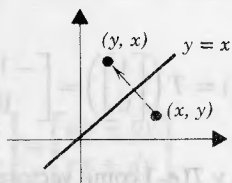
Reflexión respecto al  
eje  $y$   $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



Reflexión respecto al  
eje  $x$   $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



Reflexión respecto a  
la recta  $y = x$   $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



**Expansiones y compresiones.** Si la coordenada  $x$  de cada punto en el plano se multiplica por una constante positiva  $k$ , entonces el efecto es dilatar o comprimir cada figura plana

en la dirección  $x$ . Si  $0 < k < 1$ , el resultado es una compresión y si  $k > 1$ , una expansión (figura 5.7). A una transformación de este tipo se le denomina *expansión* (o *compresión*) *en la dirección  $x$ , con el factor  $k$* . De manera análoga, si la coordenada  $y$  de cada punto se multiplica por una constante positiva  $k$ , se obtiene una *expansión* (o *compresión*) *en la dirección  $y$ , con el factor  $k$* . Puede demostrarse que las expansiones y compresiones a lo largo de los ejes de coordenadas son transformaciones lineales.

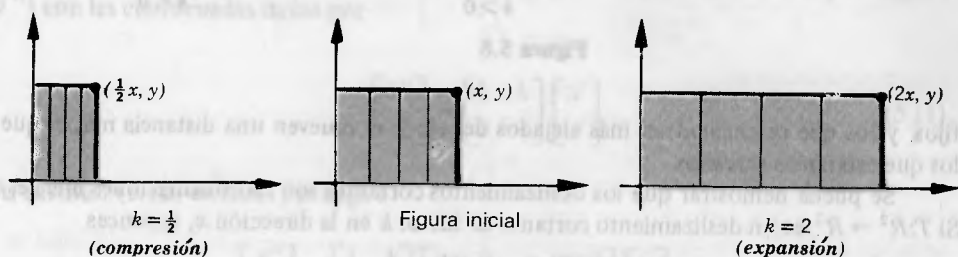


Figura 5.7

Si  $T:R^2 \rightarrow R^2$  es una expansión o compresión en la dirección  $x$ , con el factor  $k$ , entonces

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que la matriz estándar para  $T$  es

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De manera análoga, la matriz estándar para una expansión o compresión en la dirección  $y$  es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

**Deslizamientos cortantes (cizallamientos).** Un *deslizamiento cortante en la dirección  $x$ , con factor  $k$* , es una transformación que mueve cada punto  $(x, y)$  paralelo al eje  $x$ , en una cantidad  $ky$ , hacia la nueva posición  $(x + ky, y)$ . Bajo una transformación de este tipo, los puntos que están sobre el eje  $x$  no se mueven puesto que  $y = 0$ . Sin embargo, conforme se avanza alejándose del eje  $x$ , la magnitud de  $y$  aumenta, por tanto, aquellos puntos más alejados del eje  $x$  se mueven una distancia mayor que los que se encuentran más cercanos (figura 5.8).

Un *deslizamiento cortante en la dirección  $y$ , con factor  $k$* , es una transformación que mueve cada punto  $(x, y)$  paralelo al eje  $y$ , en una cantidad  $kx$ , hasta la nueva posición  $(x, y + kx)$ . Bajo una transformación de este tipo, los puntos sobre el eje  $y$  permanecen



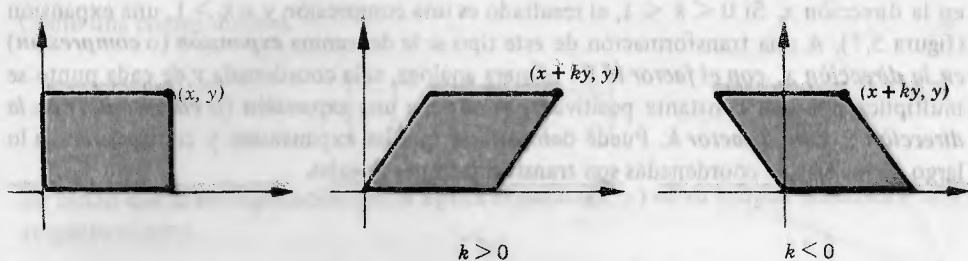


Figura 5.8

fijos, y los que se encuentran más alejados del eje  $y$  se mueven una distancia mayor que los que están más cercanos.

Se puede demostrar que los deslizamientos cortantes son transformaciones lineales. Si  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un deslizamiento cortante de factor  $k$  en la dirección  $x$ , entonces

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que la matriz estándar para  $T$  es

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De modo análogo, la matriz estándar para un deslizamiento cortante en la dirección  $y$ , de factor  $k$ , es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

**OBSERVACION.** La multiplicación por la matriz identidad de  $2 \times 2$  aplica cada punto en sí mismo. A esta transformación se le denomina **transformación identidad**. Si se desea, es posible imaginar esta transformación como una rotación que describe un ángulo de  $0^\circ$ , o bien, como un deslizamiento cortante a lo largo de cualquiera de los dos ejes, con  $k = 0$ , o bien, como una compresión o una expansión a lo largo de cualquiera de los ejes, con un factor  $k = 1$ .

Si se efectúan en sucesión un número muy grande, pero finito, de transformaciones de  $\mathbb{R}^n$  hacia  $\mathbb{R}^n$ , entonces es posible obtener el mismo resultado mediante una sola transformación matricial. En el ejemplo que sigue se ilustra este hecho.

### Ejemplo 22

Supóngase que se hace girar el plano hasta que describe un ángulo  $\theta$  y, a continuación, se sujeta a un deslizamiento cortante, de factor  $k$ , en la dirección  $x$ . Encuéntrese una sola transformación matricial que produzca el mismo efecto que el de las dos transformaciones sucesivas.

*Solución.* Bajo la rotación, el punto  $(x, y)$  se transforma en el punto  $(x', y')$  con las coordenadas dadas por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Bajo el deslizamiento cortante, el punto  $(x', y')$  se transforma entonces en el punto  $(x'', y'')$  con las coordenadas dadas por

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Al sustituir (5.10) en (5.11) se llega a

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta + k \operatorname{sen} \theta & -\operatorname{sen} \theta + k \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por tanto, la rotación seguida por el deslizamiento cortante se pueden efectuar por medio de la transformación matricial con matriz

$$\begin{bmatrix} \cos \theta + k \operatorname{sen} \theta & -\operatorname{sen} \theta + k \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

En general, si se llevan a cabo en sucesión las transformaciones matriciales

$$T_1(x) = A_1x, \quad T_2(x) = A_2x, \dots, T_k(x) = A_kx$$

de  $R^n$  hacia  $R^n$  (primero  $T_1$ , a continuación  $T_2$ , etc.), entonces se obtiene el mismo resultado por medio de la transformación matricial única  $T(x) = Ax$ , en donde

$$A = A_k \cdots A_2 A_1 \quad (5.12)$$

Nótese que se obtiene el orden en el que se llevan a cabo las transformaciones al leer de derecha a izquierda en (5.12).

**Ejemplo 23**

a) Hállese una transformación matricial de  $R^2$  hacia  $R^2$  que primero lleve a cabo un deslizamiento cortante en un factor de 2 en la dirección  $x$  y, a continuación, realice una reflexión respecto a  $y = x$ .

- b) Encuéntrese una transformación matricial de  $R^2$  hacia  $R^2$  que primero realice una reflexión respecto a  $y = x$  y a continuación, un deslizamiento cortante en un factor de 2, en la dirección  $x$ .

*Solución a).* La matriz estándar para el deslizamiento cortante es

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y para la reflexión es

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que la matriz estándar para el deslizamiento cortante seguido por la reflexión es

$$A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

*Solución b).* La reflexión seguida por el deslizamiento cortante se representa por medio de

$$A_1 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En el último ejemplo, nótese que  $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$ , de manera que el efecto de realizar un deslizamiento cortante y, a continuación, una reflexión es diferente de realizar la reflexión y, a continuación, el deslizamiento cortante. En la figura 5.9 se ilustra geoméricamente este hecho, en ella se muestra el efecto de las transformaciones sobre un rectángulo.

#### Ejemplo 24

Demuéstrese que si  $T: R^2 \rightarrow R^2$  es la multiplicación por una *matriz elemental*, entonces la transformación es cualquiera de las que siguen:

- Un deslizamiento cortante a lo largo de uno de los ejes de coordenadas.
- Una reflexión respecto a  $y = x$ .
- Una compresión a lo largo de uno de los ejes de coordenadas.
- Una expansión a lo largo de uno de los ejes de coordenadas.
- Una reflexión respecto a uno de los ejes de coordenadas.
- Una compresión o expansión a lo largo de uno de los ejes de coordenadas, seguida por una reflexión respecto a uno de tales ejes.

*Solución.* Dado que una matriz elemental de  $2 \times 2$  es el resultado de efectuar una sola operación elemental sobre los renglones, sobre la matriz identidad de  $2 \times 2$ , se debe tener una de las formas que siguen (verifíquese):



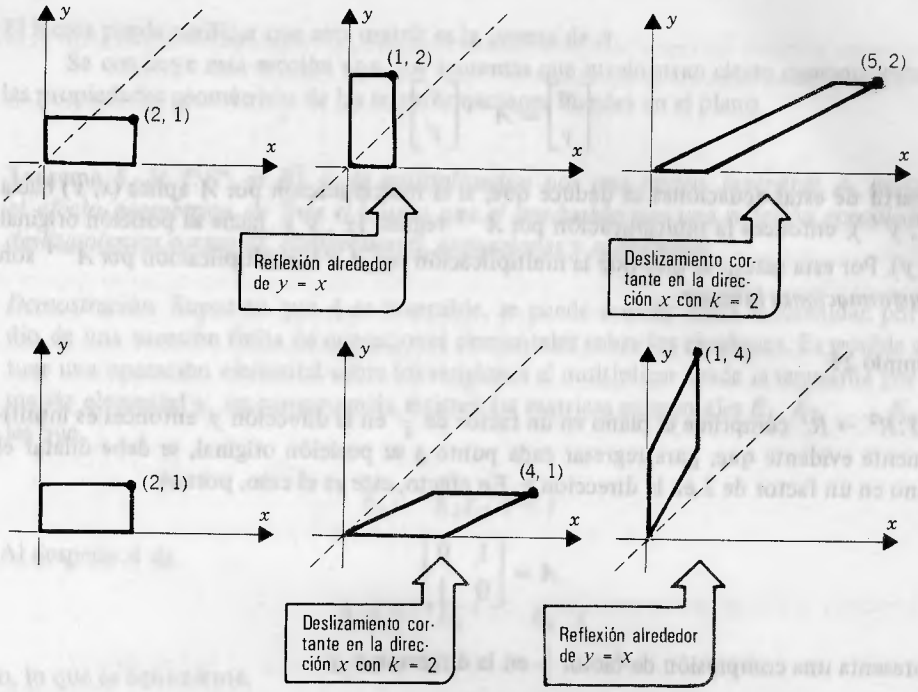


Figura 5.9

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Las dos primeras matrices representan deslizamientos cortantes a lo largo de los ejes de coordenadas y la tercera, una reflexión respecto a  $y = x$ . Si  $k > 0$ , las dos últimas matrices representan compresiones, o expansiones, a lo largo de los ejes de coordenadas, dependiendo de si  $0 \leq k \leq 1$ , o bien,  $k \geq 1$ . Si  $k < 0$ , y si se expresa  $k$  en la forma  $k = -k_1$ , en donde  $k_1 > 0$ , entonces las dos últimas matrices se pueden escribir como

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Ya que  $k_1 > 0$ , el producto que se da en (5.13) representa una compresión, o expansión, a lo largo del eje  $x$ , seguida por una reflexión respecto al eje  $y$ , y (5.14) representa una compresión, o una expansión, a lo largo del eje  $y$ , seguida por una reflexión respecto al eje  $x$ . En el caso en el que  $k = -1$ , (5.13) y (5.14) son tan sólo reflexiones respecto a los ejes  $y$  y  $x$ , respectivamente.

Sea  $T: R^2 \rightarrow R^2$  la multiplicación por una matriz *invertible*  $A$  y supóngase que  $T$  aplica el punto  $(x, y)$  hacia el punto  $(x', y')$ . Entonces

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

A partir de estas ecuaciones se deduce que, si la multiplicación por  $A$  aplica  $(x, y)$  hacia  $(x', y')$ , entonces la multiplicación por  $A^{-1}$  regresa  $(x', y')$ , hacia su posición original  $(x, y)$ . Por esta razón, se dice que la multiplicación por  $A$  y la multiplicación por  $A^{-1}$  son *transformaciones inversas*.

### Ejemplo 25

Si  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  comprime el plano en un factor de  $\frac{1}{2}$  en la dirección  $y$ , entonces es intuitivamente evidente que, para regresar cada punto a su posición original, se debe dilatar el plano en un factor de 2 en la dirección  $y$ . En efecto, este es el caso, porque

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

representa una compresión de factor  $\frac{1}{2}$  en la dirección  $y$ , y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

es una expansión de factor 2 en la dirección  $y$ .

### Ejemplo 26

La multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

hace girar los puntos del plano hasta describir un ángulo  $\theta$ . Para regresar un punto hasta su posición original, se debe hacer girar hasta que describa un ángulo  $-\theta$ . Se puede lograr esto al multiplicar por la matriz de rotación

$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

Aplicando las identidades,  $\cos(-\theta) = \cos \theta$  y  $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$ , se puede volver a escribir esto como

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

El lector puede verificar que esta matriz es la inversa de  $A$ .

Se concluye esta sección con dos teoremas que suministran cierto conocimiento de las propiedades geométricas de las transformaciones lineales en el plano.

**Teorema 5.** Si  $T: R^2 \rightarrow R^2$  es la multiplicación por una matriz inversible  $A$ , entonces el efecto geométrico de  $T$  es el mismo que el producido por una sucesión apropiada de deslizamientos cortantes, compresiones, expansiones y reflexiones.

*Demostración.* Supuesto que  $A$  es inversible, se puede reducir hasta la identidad por medio de una sucesión finita de operaciones elementales sobre los renglones. Es posible efectuar una operación elemental sobre los renglones al multiplicar desde la izquierda por una matriz elemental y, en consecuencia, existen las matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_k$ , tales que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

Al despejar  $A$  da

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I$$

o, lo que es equivalente,

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \tag{5.15}$$

En esta ecuación se expresa  $A$  como un producto de matrices elementales (ya que, por el teorema 9 de la sección 1.6, la inversa de una matriz elemental también es elemental). Entonces se llega al resultado con base en lo visto en el ejemplo 24. ■

**Ejemplo 27**

Exprésese

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

como producto de matrices elementales y, a continuación, describese el efecto geométrico de la multiplicación por  $A$ , en términos de deslizamientos cortantes, compresiones, expansiones y reflexiones.

*Solución.* Se puede reducir  $A$  hasta  $I$ , como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Súmesese  $-3$  veces el primer renglón al tercero

Multiplíquese el segundo renglón por  $-\frac{1}{2}$

Súmesese  $-2$  veces el segundo renglón al primero



Se pueden efectuar las tres operaciones sucesivas sobre los renglones, multiplicando desde la izquierda sucesivamente por

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al invertir estas matrices y aplicar (5.15) se obtiene

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Leyendo de derecha a izquierda y observando que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

se concluye que el efecto de multiplicar por  $A$  equivale a:

- 1) Realizar un deslizamiento cortante por un factor de 2, en la dirección  $x$ ;
- 2) a continuación expandir por un factor de 2 en la dirección  $y$ ;
- 3) a continuación reflejar respecto al eje  $x$ ;
- 4) a continuación realizar un deslizamiento cortante por un factor de 3 en la dirección  $y$ .

En los ejercicios se analizan las demostraciones por partes del teorema siguiente:

**Teorema 6.** Si  $T: R^2 \rightarrow R^2$  es la multiplicación por una matriz inversible, entonces:

- a) La imagen de una recta es una recta.
- b) La imagen de una recta que pasa por el origen es una recta que pasa por el origen.
- c) Las imágenes de rectas paralelas son rectas paralelas.
- d) La imagen del segmento rectilíneo que une los puntos  $P$  y  $Q$  es el segmento rectilíneo que une las imágenes de  $P$  y  $Q$ .
- e) Las imágenes de tres puntos están sobre una recta si y sólo si los puntos también lo están.

OBSERVACION. Por las partes (c), (d) y (e), se deduce que la multiplicación por una matriz inversible  $A$  de  $2 \times 2$  aplica triángulos en triángulos y paralelogramos en paralelogramos.

### Ejemplo 28

Trácese el esquema de la imagen del cuadrado con vértices  $P_1$  (0, 0),  $P_2$  (1, 0),  $P_3$  (0, 1) y  $P_4$  (1, 1), bajo la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

*Solución.* Puesto que

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

la imagen es un paralelogramo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(2, -1)$  y  $(1, 1)$  (figura 5.10).

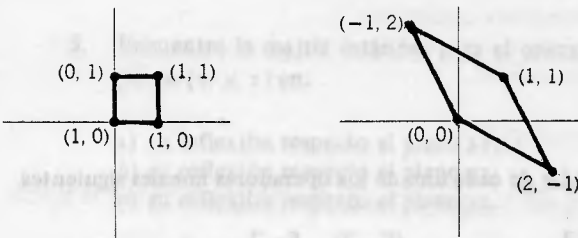


Figura 5.10

**Ejemplo 29**

De acuerdo con el teorema 6, la matriz inversible

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

aplica la recta  $y = 2x + 1$  en otra recta. Encuéntrese su ecuación.

*Solución.* Sea  $(x, y)$  un punto de la recta  $y = 2x + 1$  ( $x', y'$ ) su imagen bajo la multiplicación por  $A$ . Entonces

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

de donde,

$$x = x' - y'$$

$$y = -2x' + 3y'$$

Al sustituir en  $y = 2x + 1$  da

$$-2x' + 3y' = 2(x' - y') + 1$$

o, lo que es equivalente,

$$y' = \frac{4}{3}x' + \frac{1}{3}$$

Por tanto,  $(x', y')$  satisface

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$$

la cual es la ecuación que se desea.

### EJERCICIOS 5.3

1. Encuentre la matriz estándar de cada uno de los operadores lineales siguientes.

$$(a) T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$(b) T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(c) T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 5x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$(d) T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 7x_2 \\ -8x_3 \end{bmatrix}$$

2. Encuentre la matriz estándar de cada una de las transformaciones lineales siguientes.

$$(a) T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$(b) T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 + x_3 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

$$(c) T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

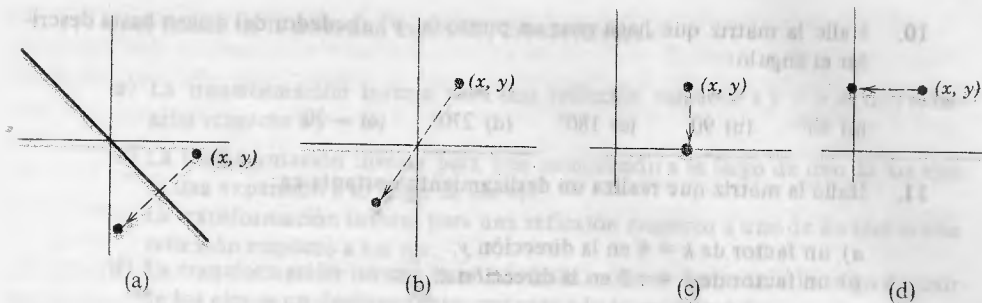
$$(d) T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

3. Halle la matriz estándar para la transformación lineal en el plano  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que aplica un punto  $(x, y)$  en (vea la figura siguiente):

- su reflexión respecto a la recta  $y = -x$ ;
- su reflexión respecto al origen;
- su proyección ortogonal sobre el eje  $x$ ;
- su proyección ortogonal sobre el eje  $y$ .

4. Para cada uno de los incisos del ejercicio 3, utilice la matriz que se haya obtenido para calcular  $T(2, 1)$ . Verifique las respuestas geoméricamente, situando los puntos  $(2, 1)$  y  $T(2, 1)$ .





5. Encuentre la matriz estándar para el operador lineal  $T: R^3 \rightarrow R^3$  que aplica un punto  $(x, y, z)$  en:

- a) su reflexión respecto al plano  $xy$ ;
- b) su reflexión respecto al plano  $xz$ ;
- c) su reflexión respecto al plano  $yz$ .

6. Para cada inciso del ejercicio 5, utilice la matriz que se haya obtenido para calcular  $T(1, 1, 1)$ . Verifique las respuestas geoméricamente, haciendo un esquema de los vectores  $(1, 1, 1)$  y  $T(1, 1, 1)$ .

7. Halle la matriz estándar para el operador lineal  $T: R^3 \rightarrow R^3$ , el cual

- a) haga girar cada vector  $90^\circ$  en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, alrededor del eje  $z$  (cuando se observa hacia abajo del eje  $z$  positivo, hacia el origen);
- b) haga girar cada vector  $90^\circ$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj, alrededor del eje  $x$  (cuando se mira a lo largo del eje  $x$  positivo hacia el origen);
- c) haga girar cada vector  $90^\circ$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj, alrededor del eje  $y$  (cuando se mira a lo largo del eje  $y$  positivo hacia el origen).

8. Trace un esquema de la imagen del rectángulo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 2)$  y  $(0, 2)$ , bajo:

- a) una reflexión respecto al eje  $x$ ;
- b) una reflexión respecto al eje  $y$ ;
- c) una compresión de factor  $k = \frac{1}{4}$  en la dirección  $y$ ;
- d) una expansión de factor  $k = 2$  en la dirección  $x$ ;
- e) un deslizamiento cortante de factor  $k = 3$  en la dirección  $x$ ;
- f) un deslizamiento cortante de factor  $k = -2$  en la dirección  $y$ .

9. Haga un esquema de la imagen del cuadrado con vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$ , bajo la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Halle la matriz que haga girar un punto  $(x, y)$  alrededor del origen hasta describir el ángulo:

- (a)  $45^\circ$     (b)  $90^\circ$     (c)  $180^\circ$     (d)  $270^\circ$     (e)  $-30^\circ$

11. Halle la matriz que realiza un deslizamiento cortante en:

- a) un factor de  $k = 4$  en la dirección  $y$ ;  
 b) un factor de  $k = -2$  en la dirección  $x$ .

12. Encuentre la matriz que comprime o dilata en:

- a) un factor de  $\frac{1}{3}$  en la dirección  $y$ ;  
 b) un factor de 6 en la dirección  $x$ .

13. En cada inciso, describa el efecto geométrico de la multiplicación por la matriz dada.

(a)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$     (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. Exprese la matriz como un producto de matrices elementales y, a continuación, describa el efecto de la multiplicación por la matriz dada, en términos de compresiones, expansiones, reflexiones y deslizamientos cortantes.

(a)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$     (d)  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

15. En cada inciso, encuentre una sola matriz que lleve a cabo la sucesión indicada de operaciones.

- a) Comprima en un factor de  $\frac{1}{2}$  en la dirección  $x$ ; a continuación, dilate en un factor de 5 en la dirección  $y$ .  
 b) Dilate en un factor de 5 en la dirección  $y$ ; a continuación, realice un deslizamiento cortante en un factor de 2 en la dirección  $y$ .  
 c) Refleje respecto a  $y = x$ ; a continuación, realice un giro hasta describir un ángulo de  $180^\circ$ .

16. En cada inciso, halle una sola matriz que lleve a cabo la sucesión indicada de operaciones.

- a) Refleje respecto al eje  $y$ ; a continuación, dilate en un factor de 5 en la dirección  $x$ ; y, finalmente, refleje respecto a  $y = x$ .  
 b) Haga girar hasta describir un ángulo de  $30^\circ$ ; a continuación, realice un deslizamiento cortante en un factor de  $-2$  en la dirección  $y$ ; y, finalmente, dilate en un factor de 3 en la dirección  $y$ .

17. Por medio de la inversión matricial, demuestre que:

- a) La transformación inversa para una reflexión respecto a  $y = x$  es una reflexión respecto a  $y = x$ .
- b) La transformación inversa para una compresión a lo largo de uno de los ejes es una expansión a lo largo de ese eje.
- c) La transformación inversa para una reflexión respecto a uno de los ejes es una reflexión respecto a ese eje.
- d) La transformación inversa para un deslizamiento cortante a lo largo de uno de los ejes es un deslizamiento cortante a lo largo de ese eje.

18. Halle la ecuación de la imagen de la recta  $y = -4x + 3$ , bajo la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

19. En los incisos (a) hasta el (e), halle la ecuación de la imagen de la recta  $y = 2x$ , bajo:

- a) un deslizamiento cortante de factor 3 en la dirección  $x$ ;
- b) una compresión de factor  $\frac{1}{2}$  en la dirección  $y$
- c) una reflexión respecto a  $y = x$ ;
- d) una reflexión respecto al eje  $y$ ;
- e) una rotación de  $60^\circ$ .

20. Sea  $l$  la recta que pasa por el origen y que forma un ángulo de  $\phi$  con el eje  $x$  positivo. Demuestre que

$$\begin{bmatrix} \cos 2\phi & \text{sen} 2\phi \\ \text{sen} 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}$$

es la matriz estándar para la transformación lineal que aplica cada punto del plano en su reflexión a  $l$ . (*Sugerencia.* Se puede realizar la transformación por medio de una rotación hasta describir el ángulo  $-\phi$  para alinear  $l$  con el eje  $x$ ; a continuación, una reflexión respecto al eje  $x$ ; y, finalmente una rotación hasta describir el ángulo  $\phi$  para colocar nuevamente  $l$  en su posición original.)

21. Encuentre la matriz para un deslizamiento cortante en la dirección  $x$  que transforme el triángulo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$  y  $(3, 0)$  en un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el origen.

22. a) Demuestre que la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

aplica todo punto del plano sobre la recta  $y = 2x$ .

b) Del inciso (a) se deduce que los puntos no colineales  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  se aplican sobre una recta. ¿Viola este hecho el inciso (e) del teorema 6?



23. Pruebe el inciso (a) del teorema 6. (*Sugerencia*, Una recta en el plano tiene una ecuación  $Ax + By + C = 0$ , en donde  $A$  y  $B$  no son ambas cero. Aplique el método del ejemplo 29 para demostrar que la imagen de este recta, bajo la multiplicación por la matriz inversible

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tiene la ecuación  $A'x + B'y + C = 0$ , en donde  $A' = (dA - cB)/(ad - bc)$  y  $B' = (-bA + aB)/(ad - bc)$ . Demuestre entonces que  $A'$  y  $B'$  no son ambas cero, a fin de concluir que la imagen es una recta.)

24. Aplique la sugerencia del ejercicio 23 para probar los incisos (b) y (c) del teorema 6.

### 5.4 MATRICES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

En esta sección se demuestra que si  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales con dimensión finita (no necesariamente  $R^n$  y  $R^m$ ), entonces, con un poco de ingenio, cualquier transformación lineal  $T: V \rightarrow W$  se puede considerar como una transformación matricial. La idea básica es elegir bases para  $V$  y  $W$ , y trabajar con las matrices de coordenadas relativas a estas bases, en lugar de con los vectores. Para ser específicos, supóngase que  $V$  tiene dimensión  $n$  y que  $W$  tiene dimensión  $m$ . Si se eligen las bases  $B$  y  $B'$  para  $V$  y  $W$ , respectivamente, entonces, para cada  $x$  en  $V$ , la matriz de coordenadas  $[x]_B$  será un vector en  $R^n$ , y la matriz de coordenadas  $[T(x)]_{B'}$  será algún vector en  $R^m$ . Por tanto, en el proceso de aplicar  $x$  en  $T(x)$ , la transformación lineal  $T$  "genera" una aplicación de  $R^n$  hacia  $R^m$ , enviando  $[x]_B$  hacia  $[T(x)]_{B'}$ . Se puede demostrar que esta aplicación generada siempre es una transformación lineal. Como tal, se puede realizar aplicando la matriz estándar  $A$ , para esta transformación; es decir,

$$A[x]_B = [T(x)]_{B'} \tag{5.16}$$

Si, de alguna manera, es posible encontrar la matriz  $A$ , entonces, como se muestra en la figura 5.11, se puede calcular  $T(x)$  en tres pasos, por medio del procedimiento indirecto siguiente:

- 1) Calcular la matriz de coordenadas  $[x]_B$
- 2) Multiplicar  $[x]_B$  desde la izquierda, por  $A$ , para producir  $[T(x)]_{B'}$
- 3) Reconstruir  $T(x)$ , a partir de su matriz de coordenadas  $[T(x)]_{B'}$

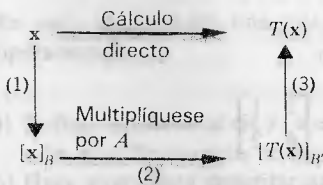


Figura 5.11

Hay dos razones principales por las que este procedimiento indirecto es importante. En primer lugar, suministra una manera eficiente de llevar a cabo las transformaciones lineales en una computadora digital. La segunda razón es teórica, pero con importantes consecuencias prácticas. La matriz  $A$  depende de las bases  $B$  y  $B'$ . Por lo general se elegirían las bases  $B$  y  $B'$  a fin de hacer que el cálculo de las matrices de coordenadas sea lo más fácil posible. Sin embargo, en lugar de ello se podría intentar elegir las bases  $B$  y  $B'$  para hacer que la matriz  $A$  sea lo más sencilla posible, por ejemplo, con grupos de elementos iguales a cero. Cuando se hace esto en la forma correcta, la matriz  $A$  puede proporcionar información importante acerca de la transformación lineal  $T$ . En secciones posteriores se amplía esta idea.

Se considera ahora el problema de encontrar una matriz  $A$  que satisfaga (5.16). Supóngase que  $V$  es un espacio de  $n$  dimensiones con base  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  y que  $W$  es un espacio de  $m$  con base  $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ . Se está buscando una matriz de  $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

tal que se cumpla (5.16), para todos los vectores  $x$  en  $V$ . En particular, cuando  $x$  es el vector base  $u_1$ , se desea que

$$A[u_1]_B = [T(u_1)]_{B'} \tag{5.17}$$

Pero

$$[u_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$A[u_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Por tanto, (5.17) implica que

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = [T(u_1)]_{B'}$$

Es decir, la primera columna de  $A$  es la matriz de coordenadas para el vector  $T(\mathbf{u}_1)$ , con respecto a la base  $B'$ . De manera análoga, si se hace que  $\mathbf{x} = \mathbf{u}_2$  en (5.16), se obtiene

$$A[\mathbf{u}_2]_B = [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}$$

Pero,

$$[\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$A[\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'}$$

Es decir, la segunda columna de  $A$  es la matriz de coordenadas para el vector  $T(\mathbf{u}_2)$ , con respecto a la base  $B'$ . Continuando de esta manera, se encuentra que la  $j$ -ésima columna de  $A$  es la matriz de coordenadas para el vector  $T(\mathbf{u}_j)$ , con respecto a  $B'$ . La matriz única  $A$  que se obtiene de esta manera se conoce como **matriz de  $T$  con respecto a las bases  $B$  y  $B'$** . Simbólicamente, se puede denotar esta matriz por medio de

$$A = \begin{matrix} \text{matriz de } T \text{ con} \\ \text{respecto a las} \\ \text{bases } B \text{ y } B'. \end{matrix} = \left[ [T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} \mid \cdots \mid [T(\mathbf{u}_n)]_{B'} \right]$$

**Ejemplo 30**

Sea  $T: P_1 \rightarrow P_2$  la transformación lineal definida por

$$T(p(x)) = xp(x)$$

Encuéntrese la matriz para  $T$ , con respecto a las bases



$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \text{y} \quad B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$$

en donde

$$\mathbf{u}_1 = 1, \quad \mathbf{u}_2 = x; \quad \mathbf{u}'_1 = 1, \quad \mathbf{u}'_2 = x, \quad \mathbf{u}'_3 = x^2$$

*Solución.* Con base en la fórmula para  $T$  se obtiene

$$T(\mathbf{u}_1) = T(1) = (x)(1) = x$$

$$T(\mathbf{u}_2) = T(x) = (x)(x) = x^2$$

Por simple observación, se puede determinar las matrices de coordenadas para  $T(\mathbf{u}_1)$  y  $T(\mathbf{u}_2)$  con relación a  $B'$ ; éstas son

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz para  $T$  con respecto a  $B$  y  $B'$  es

$$A = \left[ [T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Ejemplo 31

Sean  $T: P_1 \rightarrow P_2$ ,  $B$  y  $B'$  las que se dan en el ejemplo 30 y supóngase que

$$\mathbf{x} = 1 - 2x$$

Usese la matriz obtenida en el ejemplo 30 para calcular  $T(\mathbf{x})$  por el procedimiento indirecto de la figura 5.11.

*Solución.* Por observación, la matriz de coordenadas de  $\mathbf{x}$  con respecto a  $B$  es

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$[T(\mathbf{x})]_{B'} = A[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Así entonces,

$$T(\mathbf{x}) = 0\mathbf{u}'_1 + 1\mathbf{u}'_2 - 2\mathbf{u}'_2 = 0(1) + 1(x) - 2(x^2) \\ = x - 2x^2$$

Como verificación, nótese que el cálculo directo de  $T(\mathbf{x})$  es

$$T(\mathbf{x}) = T(1 - 2x) = x(1 - 2x) = x - 2x^2$$

lo cual concuerda con el resultado que se obtiene por medio del procedimiento indirecto.

### Ejemplo 32

Si  $T: R^n \rightarrow R^m$  es una transformación lineal y si  $B$  y  $B'$  son las bases estándar para  $R^n$  y  $R^m$ , respectivamente, entonces la matriz para  $T$  con respecto a  $B$  y  $B'$  es precisamente la matriz estándar para  $T$  que se analizó en la sección anterior. (Se deja la verificación de esto como ejercicio.)

En el caso especial en el que  $V = W$  (de modo que  $T: V \rightarrow V$  es un operador lineal), es común tomar  $B = B'$  al construir una matriz de  $T$ . La matriz resultante se conoce como *matriz de  $T$  con respecto a la base  $B$* .

### Ejemplo 33

Si  $B = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \}$  es cualquier base para un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita y  $I: V \rightarrow V$  es el operador identidad sobre  $V$ , entonces  $I(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1$ ,  $I(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2$ , ...,  $I(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$ .

Por lo tanto,

$$[I(\mathbf{u}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, [I(\mathbf{u}_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, [I(\mathbf{u}_n)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

así entonces,

$$[I]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Como consecuencia, la matriz del operador identidad con respecto a cualquier base es la matriz identidad de  $n \times n$ .

### Ejemplo 34

Sea  $T: R^2 \rightarrow R^2$  el operador lineal definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Encuéntrese la matriz de  $T$  con respecto a la base  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ , en donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

*Solución.* A partir de la definición  $T$ ,

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{u}_1 \quad \text{y} \quad T(\mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{u}_2$$

Por tanto,

$$[T(\mathbf{u}_1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T(\mathbf{u}_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Como consecuencia, la matriz de  $T$  con respecto a  $B$  es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

#### EJERCICIOS 5.4

1. Sea  $T: P_2 \rightarrow P_1$  la transformación lineal definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$$

Halle la matriz de  $T$ , con respecto a las bases estándar para  $P_2$  y  $P_1$ .

2. Sea  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- a) Encuentre la matriz de  $T$  con respecto a las bases  $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{u}_2\}$  y  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ , en donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- b) Use la matriz obtenida en (a) con el fin de calcular



$$T\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

3. Sea  $T: R^3 \rightarrow R^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

- a) Halle la matriz de  $T$  con respecto a la base  $B = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$ , en donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- b) Use la matriz obtenida en (a) para calcular

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

4. Sea  $T: P_2 \rightarrow P_4$  la transformación lineal definida por  $T(p(x)) = x^2 p(x)$ .

- a) Halle la matriz de  $T$  con respecto a las bases  $B = \{ \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \}$  y  $B'$  en donde  $\mathbf{p}_1 = 1 + x^2$ ,  $\mathbf{p}_2 = 1 + 2x + 3x^2$ ,  $\mathbf{p}_3 = 4 + 5x + x^2$  y  $B'$  es la base estándar para  $P_4$ .

- b) Use la matriz obtenida en (a) para calcular  $T(-3 + 5x - 2x^2)$ .

5. Sean  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ , y suponga que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

es la matriz de  $T: R^2 \rightarrow R^2$  con respecto a la base  $B = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \}$ .

- a) Halle  $[T(\mathbf{v}_1)]_B$  y  $[T(\mathbf{v}_2)]_B$ .

- b) Encuentre  $T(\mathbf{v}_1)$  y  $T(\mathbf{v}_2)$ .

- c) Halle  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Sea  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$  la matriz de  $T: R^4 \rightarrow R^3$  con respecto a las bases

$B = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \}$  y  $B' = \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \}$ , en donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- a) Halle  $[T(\mathbf{v}_1)]_{B'}$ ,  $[T(\mathbf{v}_2)]_{B'}$ ,  $[T(\mathbf{v}_3)]_{B'}$  y  $[T(\mathbf{v}_4)]_{B'}$ .  
 b) Encuentre  $T(\mathbf{v}_1)$ ,  $T(\mathbf{v}_2)$ ,  $T(\mathbf{v}_3)$  y  $T(\mathbf{v}_4)$ .

c) Halle  $T \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. Sea  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$  la matriz de  $T: P_2 \rightarrow P_2$  con respecto a la base  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ , en donde  $\mathbf{v}_1 = 3x + 3x^2$ ,  $\mathbf{v}_2 = -1 + 3x + 2x^2$ ,  $\mathbf{v}_3 = 3 + 7x + 2x^2$ .

- a) Halle  $[T(\mathbf{v}_1)]_B$ ,  $[T(\mathbf{v}_2)]_B$  y  $[T(\mathbf{v}_3)]_B$ .  
 b) Encuentre  $T(\mathbf{v}_1)$ ,  $T(\mathbf{v}_2)$  y  $T(\mathbf{v}_3)$ .  
 c) Halle  $T(1 + x^2)$ .

8. Demuestre que si  $T: V \rightarrow W$  es la transformación cero (ejemplo 3), entonces la matriz de  $T$  con respecto a bases cualesquiera para  $V$  y  $W$  es una matriz cero.

9. Demuestre que si  $T: V \rightarrow V$  es una contracción o una dilatación de  $V$  (ejemplo 5), entonces la matriz de  $T$  con respecto a cualquier base para  $V$  es una matriz diagonal.

10. Sea  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  una base para un espacio vectorial  $V$ . Halle la matriz con respecto a  $B$  del operador lineal  $T: V \rightarrow V$  definido por  $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$ ,  $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ ,  $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_4$ ,  $T(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_1$ .

11. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.) Sea  $D: P_2 \rightarrow P_2$  el operador derivación  $D(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$ . En los incisos (a) y (b), halle la matriz de  $D$  con respecto a la base  $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ .

- a)  $\mathbf{p}_1 = 1$ ,  $\mathbf{p}_2 = x$ ,  $\mathbf{p}_3 = x^2$   
 b)  $\mathbf{p}_1 = 2$ ,  $\mathbf{p}_2 = 2 - 3x$ ,  $\mathbf{p}_3 = 2 - 3x + 8x^2$   
 c) Use la matriz que se encontró en el inciso (a) para calcular  $D(6 - 6x + 24x^2)$ .  
 d) Repita las instrucciones del inciso (c) para la matriz hallada en el inciso (b).

12. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.) En cada inciso,  $B = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$  es una base para un subespacio  $V$  del espacio vectorial de las funciones con va-

lor real definidas sobre la recta real. Halle la matriz con respecto a  $B$  del operador derivación  $D: V \rightarrow V$ .

- (a)  $\mathbf{f}_1 = 1, \mathbf{f}_2 = \operatorname{sen} x, \mathbf{f}_3 = \cos x$   
 (b)  $\mathbf{f}_1 = 1, \mathbf{f}_2 = e^x, \mathbf{f}_3 = e^{2x}$   
 (c)  $\mathbf{f}_1 = e^{2x}, \mathbf{f}_2 = xe^{2x}, \mathbf{f}_3 = x^2e^{2x}$

## 5.5 SEMEJANZA

La matriz de un operador lineal  $T: V \rightarrow V$  depende de la base seleccionada para  $V$ . Uno de los problemas fundamentales del álgebra lineal es elegir una base para  $V$  que haga que la matriz de  $T$  sea tan sencilla como se pueda. A menudo este problema se ataca encontrando primero una matriz para  $T$ , con relación a alguna base "sencilla", como una base estándar. Por lo común, esta elección no conduce a la matriz más sencilla para  $T$ , de modo que entonces se busca una manera de cambiar la base a fin de simplificar la matriz. Para dirigir un problema como éste, es necesario saber en qué forma un cambio de base afecta la matriz de un operador lineal; en esta sección se estudia este problema.

El siguiente teorema es el resultado clave:

**Teorema 7.** Sea  $T: V \rightarrow V$  un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita  $V$ . Si  $A$  es la matriz de  $T$  con respecto a una base  $B$ , y  $A'$  es la matriz de  $T$  con respecto a una base  $B'$ , entonces

$$A' = P^{-1}AP \quad (5.18)$$

en donde  $P$  es la matriz de transición de  $B'$  hacia  $B$ .

Para establecer este teorema, conviene describir la relación

$$Au = v$$

de manera gráfica, escribiendo

$$u \xrightarrow{A} v$$

Supuesto que  $A$  es la matriz de  $T$  con respecto a  $B$ , y  $A'$  es la matriz de  $T$  con respecto a  $B'$ , las siguientes relaciones se cumplen para todo  $x$  en  $V$ .

$$A[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_B$$

y

$$A'[\mathbf{x}]_{B'} = [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

Estas relaciones se pueden escribir como

$$[\mathbf{x}]_B \xrightarrow{A} [T(\mathbf{x})]_B$$



y

$$[\mathbf{x}]_{B'} \longrightarrow [T(\mathbf{x})]_{B'} \quad (5.19)$$

A fin de ver cómo están relacionadas las matrices  $A$  y  $A'$ , sea  $P$  la matriz de transición de la base  $B'$  hacia la base  $B$ , de modo que  $P^{-1}$  es la matriz de transición de  $B$  hacia  $B'$ . Así entonces,

$$P[\mathbf{x}]_{B'} = [\mathbf{x}]_B$$

y

$$P^{-1}[T(\mathbf{x})]_B = [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

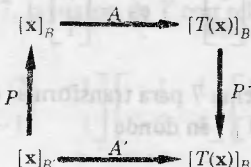
lo cual se puede escribir como

$$[\mathbf{x}]_B \xrightarrow{P} [\mathbf{x}]_{B'} \quad (5.20)$$

y

$$[T(\mathbf{x})]_B \xrightarrow{P^{-1}} [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

Para expresarlo en forma más compacta, las relaciones (5.19) y (5.20) se pueden eslabonar en una sola figura como sigue:



En esta figura se ilustra que se tienen dos maneras para obtener la matriz  $[T(\mathbf{x})]_{B'}$ , a partir de la matriz  $[\mathbf{x}]_{B'}$ . Es posible tomar la trayectoria inferior a través de la figura, es decir,

$$A'[\mathbf{x}]_{B'} = [T(\mathbf{x})]_{B'} \quad (5.21)$$

o bien, se puede subir por el lado izquierdo, a través de la parte superior y bajar por el lado derecho, es decir,

$$P^{-1}AP[\mathbf{x}]_{B'} = [T(\mathbf{x})]_{B'} \quad (5.22)$$

De (5.21) y (5.22) se deduce que

$$P^{-1}AP[\mathbf{x}]_{B'} = A'[\mathbf{x}]_{B'} \quad (5.23)$$

para todo  $\mathbf{x}$  en  $V$ . De (5.23) y el inciso (b) del ejercicio 11 se deduce que

$$P^{-1}AP = A'$$

Esto prueba el teorema 7. ■

**Observación.** Al aplicar el teorema 7, es fácil olvidar si  $P$  es la matriz de transición de  $B$  hacia  $B'$ . (incorrecto), o bien de  $B'$  hacia  $B$  (correcto). Es posible que ayude dar a  $B$  el nombre de base inicial, a  $B'$  el de base nueva, a  $A$  el de matriz inicial y a  $A'$  el de matriz nueva. Debido a que  $P$  es la matriz de transición de  $B'$  hacia  $B$ ,  $P^{-1}$  es la matriz de transición de  $B$  hacia  $B'$  por tanto, (5.18) se puede expresar como:

$$\text{matriz nueva} = P^{-1} (\text{matriz inicial}) P$$

en donde  $P$  es la matriz de transición de la base nueva hacia la base inicial.

### Ejemplo 35

Supóngase que  $T:R^2 \rightarrow R^2$  se define por medio de

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Hállese la matriz estándar para  $T$ , es decir, la matriz para  $T$  con relación a la base  $B = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \}$ , en donde

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y, a continuación, aplíquese el teorema 7 para transformar esta matriz en la matriz para  $T$  con relación a la base  $B' = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \}$ , en donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**Solución.** A partir de la fórmula para  $T$ ,

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

y

$$T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

de modo que la matriz estándar para  $T$  es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

En seguida se necesita la matriz de transición de  $B'$  hacia  $B$ . Para esta matriz de transición se necesitan las matrices de coordenadas para los vectores base  $B'$ , con relación a la base  $B$ . Por observación,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

de modo que

$$[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz de transición de  $B'$  hacia  $B$  es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

El lector puede comprobar que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que, por el teorema 7, la matriz de  $T$  con relación a la base  $B'$  es

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

En este ejemplo se ilustra que la base estándar para un espacio vectorial no necesariamente produce la matriz más sencilla para un operador lineal; en este ejemplo, la matriz estándar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

no fue tan sencilla en estructura como la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

con relación a la base  $B'$ . La matriz (5.24) es un ejemplo de una **matriz diagonal**; esto es, una matriz cuadrada en la que todos los elementos que *no* están en la diagonal son ceros. Las matrices diagonales tienen muchas propiedades convenientes. Por ejemplo, la  $k$ -ésima potencia de una matriz diagonal



$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

es

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Así entonces, para elevar una matriz diagonal a la  $k$ -ésima potencia, sólo se necesita elevar cada elemento de la diagonal a la  $k$ -ésima potencia. Para una matriz no diagonal se requieren mucho más cálculos para obtener la  $k$ -ésima potencia. Las matrices diagonales también tienen otras propiedades útiles.

En el capítulo que sigue se analiza el problema de hallar bases que produzcan matrices diagonales para operadores lineales.

El teorema 7 da lugar a la definición siguiente:

**Definición.** Si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas, se dice que  $B$  es semejante a  $A$  si existe una matriz inversible  $P$  tal que  $B = P^{-1}AP$ .

Nótese que la ecuación  $B = P^{-1}AP$  se puede escribir también como

$$A = PBP^{-1} \quad \text{o bien,} \quad A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$$

Al hacer  $Q = P^{-1}$  se llega a

$$A = Q^{-1}BQ$$

con lo que se afirma que  $A$  es semejante a  $B$ . Por tanto,  $B$  es semejante a  $A$  si y sólo si  $A$  es semejante a  $B$ ; como consecuencia, por lo general simplemente se dirá que  $A$  y  $B$  son semejantes.

Con esta terminología, en el teorema 7 se afirma que *dos matrices que representan el mismo operador lineal  $T: V \rightarrow V$  con respecto a bases diferentes son semejantes.*

## EJERCICIOS 5.5

En los ejercicios 1–7, halle la matriz  $T$  con respecto a  $B$  y aplique el teorema 7 para calcular la matriz de  $T$  con respecto a  $B'$ .

1.  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se define por medio

$$T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$B = \{u_1, u_2\}$  y  $B' = \{v_1, v_2\}$ , en donde

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2.  $T: R^2 \rightarrow R^2$  se define por medio de

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}$$

$B = \{u_1, u_2\}$  y  $B' = \{v_1, v_2\}$ , en donde

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.  $T: R^2 \rightarrow R^2$  es la rotación alrededor del origen hasta describir un ángulo de  $45^\circ$ ;  $B$  y  $B'$  son las bases del ejercicio 1.

4.  $T: R^3 \rightarrow R^3$  se define por medio de

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 \\ x_1 + 7x_3 \end{bmatrix}$$

$B$  es la base estándar para  $R^3$  y  $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ , en donde

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.  $T: R^3 \rightarrow R^3$  es la proyección ortogonal sobre el plano  $xy$ ;  $B$  y  $B'$  son las del ejercicio 4.

6.  $T: R^2 \rightarrow R^2$  se define por medio de  $T(x) = 5x$ ;  $B$  y  $B'$  son las bases del ejercicio 2.

7.  $T: P_1 \rightarrow P_1$  se define por medio de  $T(a_0 + a_1x) = a_0 + a_1(x + 1)$ ;  $B = \{p_1, p_2\}$  y  $B' = \{q_1, q_2\}$ , en donde  $p_1 = 6 + 3x$ ,  $p_2 = 10 + 2x$ ,  $q_1 = 2$ ,  $q_2 = 3 + 2x$ .

8. Pruebe que si  $A$  y  $B$  son matrices semejantes, entonces  $\det(A) = \det(B)$ .

9. Pruebe que las matrices semejantes tienen el mismo rango.

10. Pruebe que si  $A$  y  $B$  son matrices semejantes, entonces  $A^2$  y  $B^2$  también son semejantes. De modo más general, pruebe que  $A^k$  y  $B^k$  son semejantes, en donde  $k$  es cualquier entero positivo.

11. Sean  $C$  y  $D$  matrices de  $m \times n$ . Demuestre que:

a) Si  $Cx = Dx$  para todo  $x$  en  $R^n$ , entonces  $C = D$ .

b) Si  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base para un espacio vectorial  $V$  y  $C[x]_B = D[x]_B$  para todo  $x$  en  $V$ , entonces  $C = D$ .

## EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

1. Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$ ,  $B$  una matriz diferente de cero de  $n \times 1$  y  $\mathbf{x}$  un vector en  $R^n$ , expresado en notación matricial. ¿Es  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B$  un operador lineal sobre  $R^n$ ? Justifique su respuesta.
2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

a) Demuestre que

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & -\operatorname{sen} 3\theta \\ \operatorname{sen} 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$$

- b) dé una suposición lógica de la forma de la matriz  $A^n$  para cualquier entero positivo  $n$ .
- c) Considerando el efecto geométrico de  $T: R^2 \rightarrow R^2$ , en donde  $T$  es la multiplicación por  $A$ , obtenga geoméricamente el resultado que se obtuvo en (b).

3. Sea  $\mathbf{v}_0$  un vector fijo en un espacio de productos interiores  $V$  y suponga que  $T: V \rightarrow V$  se define por medio de  $T(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle \mathbf{v}_0$ . Demuestre que  $T$  es un operador lineal sobre  $V$ .

4. Sean  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$  vectores fijos en  $R^n$  y suponga que  $T: R^n \rightarrow R^m$  se define por medio de  $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_m)$ , en donde  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_i$  es el producto euclidiano interior sobre  $R^n$ .

a) Demuestre que  $T$  es una transformación lineal.

b) Demuestre que la matriz con los vectores renglón  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$  es la matriz estándar para  $T$ .

5. Sea  $T: R^4 \rightarrow R^3$  la transformación lineal para la que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= (1, 2, 1), & T(\mathbf{e}_2) &= (0, 1, 0) \\ T(\mathbf{e}_3) &= (1, 3, 0), & T(\mathbf{e}_4) &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

a) Halle las bases para el recorrido y el núcleo de  $T$ .

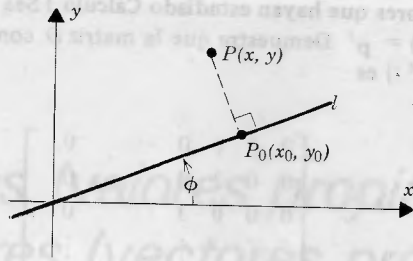
b) Halle el rango y la nulidad de  $T$ .

6. Sea  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  un sistema lineal homogéneo con  $n$  incógnitas y suponga que  $r$  es el rango de  $A$ . Halle la dimensión del espacio de soluciones si:

$$(a) \ n = 5, r = 3 \quad (b) \ n = 4, r = 4$$

7. a) Sea  $l$  la recta en el plano  $xy$  que pasa por el origen y forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$  positivo; y sea  $P_0(x_0, y_0)$  la proyección ortogonal de un punto  $P(x, y)$  sobre  $l$  (vea la figura a continuación).





Se puede realizar esta proyección haciendo girar el plano hasta describir el ángulo  $-\phi$  hasta alinear  $l$  con el eje  $x$ ,  $y$ , a continuación, proyectando la imagen de  $P$  bajo la rotación sobre el eje  $x$   $y$ , por último, haciendo girar el plano hasta describir el ángulo  $\phi$  para regresar  $l$  a su posición original. Aplique esta observación para demostrar que

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \text{sen } \phi \cos \phi \\ \text{sen } \phi \cos \phi & \text{sen}^2 \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

b) Aplique el resultado que se obtuvo en (a) con el fin de encontrar la proyección ortogonal del punto  $(1, 5)$  sobre la recta que pasa por el origen y forma un ángulo  $\phi = 30^\circ$  con el eje  $x$  positivo.

8. Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales,  $T$ ,  $T_1$  y  $T_2$  transformaciones lineales desde  $V$  hacia  $W$ , y  $k$  un escalar. Defina las nuevas transformaciones  $T_1 + T_2$  y  $kT$ , por medio de las fórmulas

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(\mathbf{x}) &= T_1(\mathbf{x}) + T_2(\mathbf{x}) \\ (kT)(\mathbf{x}) &= k[T(\mathbf{x})] \end{aligned}$$

a) Demuestre que  $(T_1 + T_2): V \rightarrow W$  y  $kT: V \rightarrow W$  son transformaciones lineales.

b) Demuestre que el conjunto de todas las transformaciones lineales de  $V$  hacia  $W$ , con las operaciones dadas en el inciso (a), forma un espacio vectorial.

9. Sean  $A$  y  $B$  matrices semejantes. Pruebe:

a)  $A^t$  y  $B^t$  son semejantes.

b)  $A$  es invertible si y sólo si  $B$  es invertible.

c) Si  $A$  y  $B$  son invertibles, entonces  $A^{-1}$  y  $B^{-1}$  son semejantes.

10. (Teorema de la alternativa de Fredholm.) Sea  $T: V \rightarrow V$  un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones. Pruebe que se cumple exactamente una de las siguientes proposiciones:

i) La ecuación  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  tiene una solución para todos los vectores  $\mathbf{b}$  en  $V$ .

ii) La nulidad de  $T > 0$ .

11. (Para los lectores que hayan estudiado Cálculo.) Sea  $D: P_n \rightarrow P_n$  el operador derivación  $D(p) = p'$ . Demuestre que la matriz  $D$  con respecto a la base  $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar que la matriz  $D$  con respecto a la base  $B$  es la matriz  $D$  dada. Para ello, basta con verificar que  $D(x^k) = kx^{k-1}$  para  $k=0, 1, \dots, n$ . Esto se puede hacer directamente, o bien utilizando el operador derivación  $D$  en la base  $B$ . En este caso, se puede observar que la matriz  $D$  es una matriz triangular superior, y que los elementos no nulos de la diagonal superior son los números  $1, 2, 3, \dots, n-1$ . Esto se puede verificar directamente, o bien utilizando el operador derivación  $D$  en la base  $B$ .

10. (Tome en cuenta la alternativa de Frobenius.) Sea  $T: V \rightarrow V$  un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones. Pruebe que si  $T$  es nilpotente, entonces  $T^n = 0$  y  $T^{n-1} \neq 0$ . Pruebe que si  $T$  es invertible, entonces  $T^{-1}$  es nilpotente.

9. (a) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente. (b) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente.

8. Sean  $A$  y  $B$  matrices semejantes. Pruebe que  $A$  y  $B$  tienen el mismo polinomio característico.

7. (a) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente. (b) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente.

6. (a) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente. (b) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente.

5. (a) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente. (b) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente.

4. (a) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente. (b) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente.

3. (a) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente. (b) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente.

2. (a) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente. (b) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente.

1. (a) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente. (b) Pruebe que si  $T$  es un operador lineal sobre un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, entonces  $T^n = 0$  si y solo si  $T$  es nilpotente.

# 6

## Eigenvalores (valores propios), eigenvectores (vectores propios)

### 6.1 EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

En muchos problemas de ciencias y matemáticas, se da un operador lineal  $T: V \rightarrow V$  y es importante determinar aquellos escalares  $\lambda$  para los cuales la ecuación  $Tx = \lambda x$  tiene soluciones diferentes de cero. En esta sección se analiza este problema y, en secciones posteriores, se investigan algunas de sus aplicaciones.

**Definición.** Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces se dice que un vector diferente de cero  $x$  en  $R^n$  es un **eigenvector** de  $A$  si  $Ax$  es un múltiplo escalar de  $x$ ; es decir,

$$Ax = \lambda x$$

para algún escalar  $\lambda$ . El escalar  $\lambda$  se denomina **eigenvalor** de  $A$  y se dice que  $x$  es un eigenvector **correspondiente** a  $\lambda$ .

Uno de los significados de la palabra "eigen" en alemán es el de "propio"; por ello, algunos autores también le dan a los eigenvalores los nombres de **valores propios**, **valores característicos**, o bien, **raíces latentes**.

#### Ejemplo 1

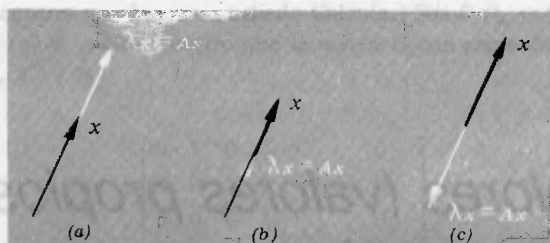
El vector  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  es un eigenvector de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

correspondiente al eigenvalor  $\lambda = 3$ , debido a que

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$





**Figura 6.1** (a) Dilatación,  $\lambda > 1$ . (b) Contracción,  $0 < \lambda < 1$ . (c) Inversión de la dirección,  $\lambda < 0$ .

Los eigenvalores y los eigenvectores tienen una interpretación geométrica útil en  $R^2$  y  $R^3$ . Si  $\lambda$  es un eigenvalor de  $A$  correspondiente a  $x$ , entonces  $Ax = \lambda x$ , de modo que la multiplicación por  $A$  dilata a  $x$ , contrae a  $x$  o invierte la dirección de  $x$ , dependiendo del valor de  $\lambda$  (figura 6.1).

Para encontrar los eigenvalores de una matriz  $A$  de  $n \times n$ , se vuelve a escribir  $Ax = \lambda x$  como

$$Ax = \lambda x$$

o, lo que es equivalente,

$$(\lambda I - A)x = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

Para que  $\lambda$  sea un eigenvalor, debe haber una solución diferente de cero de esta ecuación. Sin embargo, por el teorema 13 de la sección 4.6, la ecuación 6.1 tendrá una solución diferente de cero si y sólo si

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Esto se conoce como *ecuación característica* de  $A$ ; los escalares que satisfacen esta ecuación son los eigenvalores de  $A$ . Cuando se desarrolla, el determinante  $\det(\lambda I - A)$  es un polinomio en  $\lambda$  conocido como *polinomio característico* de  $A$ .

### Ejemplo 2

Hállense los eigenvalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Solución.* Dado que

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

el polinomio característico de  $A$  es

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

y la ecuación característica de  $A$  es

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son  $\lambda = 1$  y  $\lambda = 2$ ; estos son los eigenvalores de  $A$ .

### Ejemplo 3

Hállense los eigenvalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

*Solución.* Procediendo como en el ejemplo 2,

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Por tanto, los eigenvalores de  $A$  deben satisfacer la ecuación cuadrática  $\lambda^2 + 1 = 0$ . Ya que las únicas soluciones de esta ecuación son los números imaginarios  $\lambda = i$  y  $\lambda = -i$ , y como se está suponiendo que todos los escalares en este texto son números reales,  $A$  no tiene eigenvalores.\*

### Ejemplo 4

Hállense los eigenvalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

*Solución.* Como en los ejemplos precedentes,

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

\* Como se señaló en la sección 4.2, hay algunas aplicaciones que requieren escalares complejos y espacios vectoriales complejos. En dichos casos, se permite que las matrices tengan eigenvalores complejos. Sin embargo, en este texto, sólo se consideran eigenvalores reales.

Por consiguiente, los eigenvalores de  $A$  deben satisfacer la ecuación cúbica

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0 \quad (6.2)$$

Para resolver esta ecuación, se principia por buscar soluciones enteras. Se puede simplificar en gran parte esta tarea, aprovechando el hecho de que todas las soluciones enteras (si las hay) para una ecuación polinómica con coeficientes enteros

deben ser divisores del término constante,  $c_n$ . Por consiguiente, las únicas soluciones enteras posibles de (6.2) son los divisores de  $-4$ , es decir,  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ . Al sustituir sucesivamente estos valores en (6.2) se llega a la conclusión de que  $\lambda = 4$  es una solución entera. Como consecuencia,  $\lambda - 4$  debe ser un factor del primer miembro de (6.2). La división de  $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$  entre  $\lambda - 4$  indica que (6.2) se puede escribir como

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

Por consiguiente, las soluciones restantes de (6.2) satisfacen la ecuación cuadrática

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

que se puede resolver por medio de la fórmula correspondiente. Por tanto, los eigenvalores de  $A$  son

$$\lambda = 4 \quad \lambda = 2 + \sqrt{3} \quad \text{y} \quad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

**OBSERVACION.** En muchos problemas prácticos, la matriz  $A$  a menudo es demasiado grande como para que convenga determinar la ecuación característica. Como resultado, se aplican diversos métodos de aproximación para obtener los eigenvalores; en el capítulo 8 se analizan algunos de estos métodos.

El siguiente teorema, resume todos los resultados obtenidos hasta ahora.

**Teorema 1.** Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $\lambda$  es un eigenvalor de  $A$ .
- El sistema de ecuaciones  $(N - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene soluciones no triviales.
- Existe un vector diferente de cero  $\mathbf{x}$  en  $R^n$ , tal que  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ .
- $\lambda$  es una solución real de la ecuación característica  $\det(N - A) = 0$ .

Ahora que se ha visto cómo se encuentran los eigenvalores, se considerará el problema de encontrar los eigenvectores. Los eigenvectores de  $A$  correspondientes a un eigenvalor  $\lambda$  son los vectores diferentes de cero que satisfacen  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . También se puede decir que los eigenvectores correspondientes a  $\lambda$  son los vectores diferentes de cero en el espacio de soluciones de  $(N - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . A este espacio de soluciones se le conoce como **eigenespacio** de  $A$  correspondiente a  $\lambda$ .



## Ejemplo 5

Hállense bases para los eigenespacios de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

**Solución.** La ecuación característica de  $A$  es  $(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0$  (verifíquese), de modo que los eigenvalores de  $A$  son  $\lambda = 1$  y  $\lambda = 5$ .

Por definición,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

es un eigenvector de  $A$  correspondiente a  $\lambda$  si y sólo si  $\mathbf{x}$  es una solución no trivial de  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , es decir, de

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Si  $\lambda = 5$ , (6.3) queda

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver este sistema se llega a (verifíquese)

$$x_1 = -s \quad x_2 = s \quad x_3 = t$$

Por tanto, los eigenvectores de  $A$  correspondientes a  $\lambda = 5$  son los vectores diferentes de cero de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ya que

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes, forman una base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 5$ .

Si  $\lambda = 1$ , entonces (6.3) queda

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver este sistema se obtiene (verifíquese)

$$x_1 = t \quad x_2 = t \quad x_3 = 0$$

Por tanto, los eigenvectores correspondientes a  $\lambda = 1$  son los vectores diferentes de cero de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es una base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 1$ .

## OPCIONAL

Los eigenvectores y los eigenvalores se pueden definir tanto para los operadores lineales como para las matrices. Un escalar  $\lambda$  se denomina **eigenvalor** de un operador lineal  $T: V \rightarrow V$ , si existe un vector diferente de cero  $\mathbf{x}$  en  $V$  tal que  $T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . El vector  $\mathbf{x}$  es un **eigenvector** de  $T$  correspondiente a  $\lambda$ . De modo equivalente, los eigenvectores de  $T$  que corresponden a  $\lambda$  son los vectores diferentes de cero en el núcleo de  $\lambda I - T$  (ejercicio 19). Este núcleo es el **eigenspacio** de  $T$  correspondiente a  $\lambda$ .

Se puede demostrar que si  $V$  es un espacio de dimensión finita y  $A$  es la matriz de  $T$  con respecto a *cualquier* base  $B$ , entonces:

1. Los eigenvalores de  $T$  son los eigenvalores de la matriz  $A$ .
2. Un vector  $\mathbf{x}$  es un eigenvector de  $T$  correspondiente a  $\lambda$  si y sólo si su matriz de coordenadas  $[\mathbf{x}]_B$  es un eigenvector de  $A$  correspondiente a  $\lambda$ .

Se dejan las demostraciones para los ejercicios.

## Ejemplo 6

Hállense los eigenvalores y bases para los eigenspacios del operador lineal  $T: P_2 \rightarrow P_2$  definido por

$$T(a + bx + cx^2) = (3a - 2b) + (-2a + 3b)x + (5c)x^2$$

**Solución.** La matriz de  $T$  con respecto a la base estándar  $B = \{1, x, x^2\}$  es

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Los eigenvalores de  $T$  son los eigenvalores de  $A$ ; a saber,  $\lambda = 1$  y  $\lambda = 5$  (ejemplo 5). También, por lo visto en el ejemplo 5, el eigenspacio de  $A$  correspondiente a  $\lambda = 5$  tiene la base  $\{u_1, u_2\}$ , y el correspondiente a  $\lambda = 1$  tiene la base  $\{u_3\}$ , en donde

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estas matrices son las matrices de coordenadas con respecto a  $B$  de

$$p_1 = -1 + x \quad p_2 = x^2 \quad p_3 = 1 + x$$

Por tanto,  $\{-1 + x, x^2\}$  es una base para el eigenspacio de  $T$ , correspondiente a  $\lambda = 5$ , y  $\{1 + x\}$  es una base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 1$ .

## EJERCICIOS 6.1

1. Encuentre las ecuaciones características de las matrices siguientes:

a)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

e)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

f)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Halle los eigenvalores de las matrices del ejercicio 1.

3. Halle bases para los eigenspacios de las matrices del ejercicio 1.

4. En cada inciso del ejercicio 1, sea  $T: R^2 \rightarrow R^2$  la multiplicación por la matriz dada. En cada caso, haga un esquema de las rectas en  $R^2$  que se aplican sobre sí mismas bajo  $T$ .



5. Halle las ecuaciones características de las matrices siguientes:

$$a) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f) \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6. Halle los eigenvalores de las matrices del ejercicio 5.

7. Encuentre bases para los eigenspacios de las matrices del ejercicio 5.

8. Halle las ecuaciones características de las matrices siguientes:

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

9. Halle los eigenvalores de las matrices del ejercicio 8.

10. Encuentre bases para los eigenspacios de las matrices del ejercicio 8.

11. (Para los lectores del material opcional.) Suponga que  $T: P_2 \rightarrow P_2$  se define por medio de

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2.$$

a) Halle los eigenvalores de  $T$ .

b) Encuentre bases para los eigenspacios de  $T$ .

12. Suponga que  $T: M_{22} \rightarrow M_{22}$  se define por medio de

$$T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$$

a) Halle los eigenvalores de  $T$ .

b) Encuentre bases para los eigenspacios de  $T$ .

13. Pruebe que  $\lambda = 0$  es un eigenvalor de una matriz  $A$  si y sólo si  $A$  no es inversible.

14. Pruebe que el término constante que se encuentra en el polinomio característico de una matriz  $A$  de  $n \times n$  es  $(-1)^n \det(A)$ . (Sugerencia. El término constante es el valor del polinomio característico cuando  $\lambda = 0$ .)

15. La *traza* de una matriz cuadrada  $A$  es la suma de los elementos que están en la diagonal principal. Demuestre que la ecuación característica de una matriz  $A$  de  $2 \times 2$  es  $\lambda^2 - \text{tr}(A) + \det(A) = 0$ , en donde  $\text{tr}(A)$  es la traza de  $A$ .

16. Pruebe que los eigenvalores de una matriz triangular son los elementos que se encuentran en la diagonal principal.
17. Demuestre que si  $\lambda$  es un eigenvalor de  $A$ , entonces  $\lambda^2$  es un eigenvalor de  $A^2$ ; de modo más general, demuestre que  $\lambda^n$  es un eigenvalor de  $A^n$ , si  $n$  es un entero positivo.
18. Aplique los resultados de los ejercicios 16 y 17 para hallar los eigenvalores de  $A^9$ , en donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

19. (Para los lectores del material opcional.) Sea  $\lambda$  un eigenvalor de un operador lineal  $T: V \rightarrow V$ . Pruebe que los eigenvectores de  $T$  correspondientes a  $\lambda$  son los vectores diferentes de cero del núcleo de  $\lambda I - T$ .

## 6.2 DIAGONALIZACION

En esta sección y la siguiente, se enfoca la atención en los siguientes problemas:

**Problema 1.** Dado un operador lineal  $T: V \rightarrow V$  sobre un espacio vectorial de dimensión finita, ¿existe una base para  $V$  respecto a la cual la matriz de  $T$  sea diagonal?

**Problema 2.** Dado un operador lineal  $T: V \rightarrow V$  sobre un espacio de productos interiores, de dimensión finita, ¿Hay una base ortonormal para  $V$  con respecto a la cual la matriz de  $T$  sea diagonal?

Si  $A$  es la matriz de  $T: V \rightarrow V$ , con respecto a alguna base, entonces el problema 1 equivale a preguntar si existe un cambio de base tal que la nueva matriz para  $T$  sea diagonal. Por el teorema 7 de la sección 5.5, la nueva matriz para  $T$  será  $P^{-1}AP$ , en donde  $P$  es la matriz de transición apropiada. Si  $V$  es un espacio de productos interiores y las bases son ortonormales entonces, por el teorema 27 de la sección 4.10,  $P$  será ortogonal. Por tanto, se ha llegado a los siguientes planteamientos matriciales de los problemas anteriores.

**Problema 1 (forma matricial).** Dada una matriz cuadrada  $A$ , ¿existe una matriz invertible  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  sea diagonal?

**Problema 2 (forma matricial).** Dada una matriz cuadrada  $A$ , ¿hay una matriz ortogonal  $P$  tal que  $P^{-1}AP (= P^t AP)$  sea diagonal?

Estos problemas sugieren las definiciones que siguen.

**Definición.** Se dice que una matriz cuadrada  $A$  es *diagonalizable* si hay una matriz inversible  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  sea diagonal; se dice que la matriz  $P$  *diagonaliza a  $A$* .

El teorema que se da a continuación es la herramienta básica en el estudio de la diagonalizabilidad; su demostración revela la técnica para diagonalizar una matriz.

**Teorema 2.** Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces las proposiciones que siguen son equivalentes:

- $A$  es diagonalizable.
- $A$  tiene  $n$  eigenvectores linealmente independientes.

**Demostración a)  $\Rightarrow$  b)** Dado que se supone que  $A$  es diagonalizable, existe una matriz inversible

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

tal que  $P^{-1}AP$  es diagonal, por ejemplo  $P^{-1}AP = D$ , en donde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Por tanto,  $AP = PD$ ; es decir,

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Si ahora se denotan los vectores columna de  $P$  por  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ ; entonces, por (6.4), las columnas sucesivas de  $AP$  son  $\lambda_1 \mathbf{p}_1, \lambda_2 \mathbf{p}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{p}_n$ . Sin embargo, por el ejemplo 17 de la sección 1.4, las columnas sucesivas de  $AP$  son  $A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, \dots, A\mathbf{p}_n$ . Así entonces, se debe tener

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2 = \lambda_2 \mathbf{p}_2, \dots, A\mathbf{p}_n = \lambda_n \mathbf{p}_n \quad (6.5)$$

Supuesto que  $P$  es inversible, no todos sus vectores columna son cero; por tanto, por (6.5),  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son eigenvalores de  $A$ , y  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  son eigenvectores correspondientes. Ya que  $P$  es inversible, del teorema 13 de la sección 4.6 se deduce que  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  son linealmente independientes. Por tanto,  $A$  tiene  $n$  eigenvectores linealmente independientes.



b)  $\Rightarrow$  a). Supóngase que  $A$  tiene  $n$  eigenvectores linealmente independientes,  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ , con los eigenvalores correspondientes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , y sea

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

la matriz cuyos vectores columna son  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ . Por el ejemplo 17 de la sección 1.4, las columnas del producto  $AP$  son

$$A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, \dots, A\mathbf{p}_n$$

Pero

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2, \dots, A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n$$

de modo que

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \tag{6.6}$$

en donde  $D$  es la matriz diagonal que tiene los eigenvalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  en la diagonal principal. Supuesto que los vectores de  $P$  son linealmente independientes,  $P$  es invertible. así entonces, (6.6) se puede reescribir como  $P^{-1}AP = D$ ; es decir,  $A$  es diagonalizable. ■

Con base en esta demostración, se obtiene el siguiente procedimiento para diagonalizar una matriz diagonalizable  $A$  de  $n \times n$ :

- Paso 1.** Se halla  $n$  eigenvectores linealmente independientes  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ .
- Paso 2.** Se forma la matriz  $P$  que tenga a  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  como sus vectores columna.
- Paso 3.** Entonces  $P^{-1}AP$  será matriz diagonal con  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  como sus elementos sucesivos en la diagonal, en donde  $\lambda_i$  es el eigenvalor correspondiente a  $\mathbf{p}_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

**Ejemplo 7**

Hállese una matriz  $P$  que diagonalice a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

*Solución.* Por lo visto en el ejemplo 5, los eigenvalores de  $A$  son  $\lambda = 1$  y  $\lambda = 5$ . También, por los resultados de ese ejemplo, los vectores

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forman una base para el eigenspacio que corresponde a  $\lambda = 5$  y

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es una base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 1$ . Es fácil verificar que  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$  es linealmente independiente, de modo que

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

diagonaliza a  $A$ . Como comprobación, el lector debe verificar que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No existe preferencia respecto al orden de las columnas para  $P$ . Dado que el  $i$ -ésimo elemento en la diagonal de  $P^{-1}AP$  es un eigenvalor para el  $i$ -ésimo vector columna de  $P$ , al cambiar el orden de las columnas de  $P$  sólo se cambia el orden de los eigenvalores en la diagonal de  $P^{-1}AP$ . Por tanto, si se hubiese escrito

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en el último ejemplo, se habría obtenido

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo 8

La ecuación característica de

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

es

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)^2 = 0$$

Por tanto,  $\lambda = -1$  es el único eigenvalor de  $A$ ; los eigenvectores correspondientes a  $\lambda = -1$  son las soluciones de  $(-I - A)x = \mathbf{0}$ ; esto es, de

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

Las soluciones de este sistema son  $x_1 = t$ ,  $x_2 = t$  (verifíquese); de aquí que el eigenespacio consta de todos los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como este espacio es unidimensional,  $A$  no tiene dos eigenvectores linealmente independientes y, por tanto, no es diagonalizable.

## Ejemplo 9

Sea  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el operador lineal dado por

$$T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 5x_3 \end{bmatrix}$$

Hállese una base para  $\mathbb{R}^3$  con relación a la cual la matriz de  $T$  sea diagonal.

**Solución.** Si  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  denota la base estándar para  $\mathbb{R}^3$ , entonces

$$T(\mathbf{e}_1) = T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T(\mathbf{e}_3) = T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$



de modo que la matriz estándar para  $T$  es

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Ahora se desea cambiar de la base estándar hacia una nueva base  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$  para obtener una matriz diagonal  $A'$  para  $T$ . Si se hace que  $P$  sea la matriz de la base desconocida  $B'$  hacia la base estándar  $B$  entonces, por el teorema 7 de la sección 5.5,  $A$  y  $A'$  estarán relacionadas por medio de

$$A' = P^{-1}AP$$

En otras palabras, la matriz de transición  $P$  diagonaliza a  $A$ . En el ejemplo 7 se encontró esta matriz. Por lo que se llevó a cabo en ese ejemplo,

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya que  $P$  representa la matriz de transición de la base  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$  hacia la base estándar  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , las columnas de  $P$  son  $[\mathbf{u}'_1]_B$ ,  $[\mathbf{u}'_2]_B$  y  $[\mathbf{u}'_3]_B$ , de manera que

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{u}'_3]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\mathbf{u}'_1 = (-1)\mathbf{e}_1 + (1)\mathbf{e}_2 + (0)\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'_2 = (0)\mathbf{e}_1 + (0)\mathbf{e}_2 + (1)\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'_3 = (1)\mathbf{e}_1 + (1)\mathbf{e}_2 + (0)\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

son los vectores base que producen la matriz diagonal  $A'$  para  $T$ .

Ahora que se han desarrollado las técnicas para diagonalizar una matriz diagonalizable, se regresará a la pregunta: ¿Cuándo una matriz cuadrada  $A$  es diagonalizable? El resultado siguiente ayudará a estudiarla; la demostración se pospone hasta el final de la sección.

**Teorema 3.** Si  $v_1, v_2, \dots, v_k$  son *eigenvectores* de  $A$  correspondientes a *eigenvalores* distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , entonces  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  es un conjunto linealmente independiente.

Como consecuencia de este teorema, se obtiene el útil resultado que sigue:

**Teorema 4.** Si una matriz  $A$  de  $n \times n$  tiene  $n$  eigenvalores distintos, entonces  $A$  es diagonalizable. ■

*Demostración.* Si  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son *eigenvectores* correspondientes a los eigenvalores distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  entonces, por el teorema 3,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son linealmente independientes. Por tanto,  $A$  es diagonalizable, por el teorema 2.

**Ejemplo 10**

En el ejemplo 4 se vio que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

tiene tres eigenvalores distintos,  $\lambda = 4, \lambda = 2 + \sqrt{3}, \lambda = 2 - \sqrt{3}$ . Por tanto,  $A$  es diagonalizable. Además,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

para alguna matriz inversible  $P$ . Si se desea, se puede encontrar la matriz  $P$  aplicando el método que se muestra en el ejemplo 7.

**Ejemplo 11**

La recíproca del teorema 4 es falsa; es decir, una matriz  $A$  de  $n \times n$  puede ser diagonalizable aun cuando no tenga  $n$  eigenvalores distintos. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

entonces la ecuación característica de  $A$  es

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)^2 = 0$$

de modo que  $\lambda = 3$  es el único eigenvalor distinto de  $A$ . Sin embargo, es obvio que  $A$  es diagonalizable, dado que, con  $P = I$ ,

$$P^{-1}AP = I^{-1}AI = A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**OBSERVACION.** El teorema 3 es un caso especial de un resultado más general: Supóngase que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  son eigenvalores distintos y se elige un conjunto linealmente independiente en cada uno de los eigenspacios correspondientes. Si entonces se combinan todos estos vectores en un solo conjunto, el resultado todavía es un conjunto linealmente independiente. Por ejemplo, si se eligen tres vectores linealmente independientes de un eigenspacio y dos eigenvectores linealmente independientes de otro eigenspacio, entonces los cinco vectores juntos forman un conjunto linealmente independiente. Se omite la demostración.

### OPCIONAL

Se concluye esta sección con una demostración del teorema 3.

*Demostración.* Sean  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  eigenvectores de  $A$  que corresponden a los eigenvalores distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . Se supondrá que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  son linealmente dependientes y se obtendrá una contradicción. Entonces se puede concluir que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  son linealmente independientes.

Ya que, por definición, un eigenvector es diferente de cero,  $\{\mathbf{v}_1\}$  es linealmente independiente. Sea  $r$  el entero más grande tal que  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  es linealmente independiente. Dado que se está suponiendo que  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  es linealmente dependiente,  $r$  satisface  $1 \leq r < k$ . Es más, por definición de  $r$ ,  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{r+1}\}$  es linealmente dependiente. Por tanto, existen los escalares  $c_1, c_2, \dots, c_{r+1}$ , no todos cero, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0} \quad (6.7)$$

Al multiplicar ambos miembros de (6.7) por  $A$  y aplicar

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_{r+1} = \lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}$$

se obtiene

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_{r+1}\lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0} \quad (6.8)$$

Al multiplicar ambos miembros de (6.7) por  $\lambda_{r+1}$  y restar la ecuación resultante de (6.8) se llega a

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_2 + \dots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Supuesto que  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  es linealmente independiente, esta ecuación implica que

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \dots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$$

y como  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}$  son distintos, se deduce que

$$c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0 \quad (6.9)$$

Sustituyendo estos valores en (6.7) se obtiene



$$c_{r+1}v_{r+1} = \mathbf{0}$$

Debido a que el eigenvector  $v_{r+1}$  es diferente de cero, se concluye que

$$c_{r+1} = 0 \tag{6.10}$$

Las ecuaciones (6.9) y (6.10) contradicen el hecho de que  $c_1, c_2, \dots, c_{r+1}$  no son todos cero; esto completa la demostración. ■

**EJERCICIOS 6.2**

Demuestre que las matrices de los ejercicios 1 al 4 no son diagonalizables.

$$1. \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 2. \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad 3. \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 4. \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 5 al 8 halle una matriz  $P$  que diagonalice a  $A$  y determine  $P^{-1}AP$ .

$$5. A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix} \quad 6. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad 8. A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 9 al 14, determine si  $A$  es diagonalizable. Si lo es, halle una matriz  $P$  que diagonalice a  $A$  y determine  $P^{-1}AP$ .

$$9. A = \begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix} \quad 10. A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$11. A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad 12. A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$13. A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad 14. A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

15. Sea  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  el operador lineal dado por

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Halle una base para  $\mathbb{R}^2$  con relación a la cual la matriz de  $T$  sea diagonal.

16. Sea  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el operador lineal dado por

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 - x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

Halle una base para  $\mathbb{R}^3$  con relación a la cual la matriz de  $T$  sea diagonal.

17. Sea  $T: P_1 \rightarrow P_1$  el operador lineal definido por

$$T(a_0 + a_1x) = a_0 + (6a_0 - a_1)x$$

Halle una base para  $P_1$  con respecto a la cual la matriz para  $T$  sea diagonal.

18. Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  y  $P$  una matriz inversible de  $n \times n$ . Demuestre que:

- a)  $(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P$ .  
 b)  $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$  ( $k$  un entero positivo).

19. Use los resultados del ejercicio 18 para ayudarse a calcular  $A^{10}$ , en donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(Sugerencia. Halle una matriz  $P$  que diagonalice a  $A$  y calcule  $(P^{-1}AP)^{10}$ .)

20. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Demuestre que:

- a)  $A$  es diagonalizable si  $(a-d)^2 + 4bc > 0$ .  
 b)  $A$  no es diagonalizable si  $(a-d)^2 + 4bc < 0$ .

### 6.3 DIAGONALIZACION ORTOGONAL; MATRICES SIMETRICAS

En esta sección se estudia el segundo problema propuesto al principio de la sección 6.2. Este estudio conducirá a la consideración de una clase importante de matrices conocidas como matrices simétricas.

En toda esta sección, por *ortogonal* se entiende ortogonal con respecto al producto euclidiano interior sobre  $R_n$ .

**Definición.** Se dice que una matriz cuadrada  $A$  es *ortogonalmente diagonalizable* si existe una matriz ortogonal  $P$  tal que  $P^{-1}AP (= P^tAP)$  sea diagonal; se dice que la matriz  $P$  *diagonaliza ortogonalmente a  $A$* .

Se debe considerar dos interrogantes. Primero, ¿cuáles matrices son ortogonalmente diagonalizables?; y, segundo, ¿cómo se encuentra una matriz  $P$  para llevar a cabo la diagonalización ortogonal de una matriz ortogonalmente diagonalizable? El siguiente teorema se refiere a la primera interrogante.

**Teorema 5.** Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces las proposiciones que siguen son equivalentes:

- a)  $A$  es ortogonalmente diagonalizable.
- b)  $A$  tiene un conjunto ortonormal de  $n$  eigenvectores.

*Demostración a)  $\Rightarrow$  b).* Supuesto que  $A$  es ortogonalmente diagonalizable, existe una matriz ortogonal  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  es diagonal. Como se indica en la demostración del teorema 2, los  $n$  vectores columna de  $P$  son eigenvectores de  $A$ . Como  $P$  es ortogonal, estos vectores columna son ortonormales (véase el teorema 28 de la sección 4.10), de modo que  $A$  tiene  $n$  eigenvectores ortonormales.

*b  $\Rightarrow$  a).* Supóngase que  $A$  tiene un conjunto ortonormal de  $n$  eigenvectores,  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Como se indica en la demostración del teorema 2, la matriz  $P$  que tiene a estos eigenvectores como columnas diagonaliza a  $A$ . Debido a que estos eigenvectores son ortonormales,  $P$  es ortogonal y, por tanto, diagonaliza ortogonalmente a  $A$ . ■

En la demostración del teorema 5 se indica que una matriz  $A$  de  $n \times n$ , ortogonalmente diagonalizable, es ortogonalmente diagonalizada por cualquier matriz  $P$  de  $n \times n$  cuyas columnas formen un conjunto ortonormal de eigenvectores de  $A$ . Sea  $D$  la matriz diagonal

$$D = P^{-1}AP$$

Por tanto,

$$A = PDP^{-1}$$

o, como  $P$  es ortogonal,

$$A = PDP^t$$

Por tanto,

$$A^t = (PDP^t)^t = PD^tP^t = PDP^t = A$$

Una matriz con la propiedad de:

$$A = A^t$$

se conoce como *simétrica*. Así entonces, se ha demostrado que una matriz ortogonalmente diagonalizable es simétrica. La recíproca también es verdadera; sin embargo, se omite la demostración, ya que llevaría más allá del alcance de este texto. El siguiente teorema resume el análisis realizado hasta aquí:

**Teorema 6.** Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:

- $A$  es ortogonalmente diagonalizable.
- $A$  es simétrica.

### Ejemplo 12

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

es simétrica puesto que  $A = A^t$ .

Se verá ahora el problema de encontrar una matriz ortogonal  $P$  para diagonalizar una matriz simétrica. La clave es el teorema que se da a continuación, cuya demostración se encuentra al final de la sección.

**Teorema 7.** Si  $A$  es una matriz simétrica, entonces los *eigen*vectores de *eigen*espacios diferentes son ortogonales.

Como consecuencia de este teorema, se obtiene el procedimiento que se describe en seguida para diagonalizar ortogonalmente una matriz simétrica:

- Paso 1.** Hállese una base para cada *eigen*espacio de  $A$ .
- Paso 2.** Aplíquese el proceso de Gram-Schmidt a cada una de las bases a fin de obtener una base ortonormal para cada *eigen*espacio.
- Paso 3.** Formese la matriz  $P$  cuyas columnas sean los vectores base construidos en el paso 2; esta matriz diagonaliza ortogonalmente a  $A$ .

Se debe aclarar la justificación de este procedimiento. En el teorema 7 se afirma que los *eigen*vectores de *eigen*espacios *distintos* son ortogonales, en tanto que la aplicación del proceso de Gram-Schmidt asegura que los *eigen*vectores obtenidos dentro del *mismo* *eigen*espacio son ortonormales. Por consiguiente, el conjunto *completo* de *eigen*vectores obtenidos por este procedimiento es ortonormal.

### Ejemplo 13

Hállese una matriz ortogonal  $P$  que diagonalice a



$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

**Solución.** La ecuación característica de  $A$  es

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8) = 0$$

Así entonces, los eigenvalores de  $A$  son  $\lambda = 2$  y  $\lambda = 8$ . Por el método aplicado en el ejemplo 5, se puede demostrar que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forman una base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 2$ . Al aplicar el proceso de Gram-Schmidt a  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  se llega a los eigenvectores ortonormales (verifíquese)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

El eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 8$  tiene a

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

como base. Al aplicar el proceso de Gram-Schmidt a  $\{\mathbf{u}_3\}$  se obtiene

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Por último, al utilizar  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  como vectores columna, se tiene

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

la cual diagonaliza ortogonalmente a  $A$ . (Como comprobación, es posible que el lector desee verificar que  $P^tAP$  es una matriz diagonal.)

Se concluye esta sección enunciando dos propiedades importantes de las matrices simétricas. Se omiten las demostraciones.

#### Teorema 8.

- La ecuación característica de una matriz simétrica  $A$  sólo tiene raíces reales.
- Si un eigenvalor  $\lambda$  de una matriz simétrica  $A$  se repite  $k$  veces, como una raíz de la ecuación característica, entonces el eigenspacio correspondiente a  $\lambda$  tiene  $k$  dimensiones.

#### Ejemplo 14

La ecuación característica de la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

es

$$(\lambda - 4)^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

de modo que los eigenvalores son  $\lambda = 4$ ,  $\lambda = 1$  y  $\lambda = 2$ , en donde  $\lambda = 4$  y  $\lambda = 1$  están repetidos dos veces y  $\lambda = 2$  ocurre una vez. Por tanto, los eigenspacios correspondientes a  $\lambda = 4$  y  $\lambda = 1$  son bidimensionales y el eigenspacio que corresponde a  $\lambda = 2$  es unidimensional.

#### OPCIONAL

**Demostración del teorema 7.** Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  dos eigenvalores diferentes de la matriz simétrica  $A$  de  $n \times n$  y supóngase que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix}$$

son los eigenvectores correspondientes. Se desea demostrar que

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = v_1 v'_1 + v_2 v'_2 + \dots + v_n v'_n = 0$$

Dado que  $\mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2$  es una matriz de  $n \times n$  que tiene a  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$  como su único elemento, se puede completar la demostración al demostrar que  $\langle \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ .

Ya que  $\mathbf{v}_1^t A \mathbf{v}_2$  es una matriz de  $1 \times 1$  y, evidentemente, toda matriz de  $1 \times 1$  es simétrica,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^t A \mathbf{v}_2 &= (\mathbf{v}_1^t A \mathbf{v}_2)^t \\ &= \mathbf{v}_2^t A^t \mathbf{v}_1 \quad (\text{por una propiedad de la transpuesta; véase la sección 2.3}) \\ &= \mathbf{v}_2^t A \mathbf{v}_1 \quad (\text{supuesto que } A \text{ es simétrica}) \end{aligned}$$

También,

$$\mathbf{v}_1^t A \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^t \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2^t A \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2^t \lambda_1 \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_2^t \mathbf{v}_1 \\ &= \lambda_1 (\mathbf{v}_2^t \mathbf{v}_1)^t = \lambda_1 \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

De donde,

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2$$

o bien,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 = 0$$

Supuesto que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , se concluye que  $\mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 = 0$ .

### EJERCICIOS 6.3

1. Aplique el inciso (a) del teorema 8 para encontrar las dimensiones de los eigenespacios de las matrices simétricas siguientes:

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

$$c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 2-9, halle una matriz  $P$  que diagonalice ortogonalmente a  $A$  y determine  $P^{-1}AP$ .

$$2. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$4. A = \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$$

$$5. A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$8. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$9. A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Halle una matriz que diagonaliza ortogonalmente a

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

en donde  $b \neq 0$ .

11. Se dice que dos matrices de  $n \times n$ ,  $A$  y  $B$ , son *ortogonalmente semejantes* si existe una matriz ortogonal  $P$  tal que  $B = P^{-1}AP$ . Demuestre que si  $A$  es simétrica y  $A$  y  $B$  son ortogonalmente semejantes, entonces  $B$  es simétrica.

12. Pruebe el teorema 7 para matrices simétricas de  $2 \times 2$ .

13. Pruebe el teorema 8a para matrices simétricas de  $2 \times 2$ .

## EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

1. a) Demuestre que si  $0 < \theta < \pi$ , entonces



$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

no tiene eigenvalores y, como consecuencia, no tiene eigenvectores.

- b) Considerando la transformación lineal de la multiplicación por  $A$ , dé una explicación geométrica del resultado que se obtiene en (a).

2. Halle los eigenvalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k^3 & -3k^2 & 3k \end{bmatrix}$$

3. a) Demuestre que si  $D$  es una matriz diagonal con elementos no negativos en la diagonal principal, entonces existe una matriz  $S$  tal que  $S^2 = D$ .  
 b) Demuestre que si  $A$  es una matriz diagonalizable con eigenvalores no negativos, entonces existe una matriz  $S$  tal que  $S^2 = A$ .  
 c) Halle una matriz  $S$  tal que  $S^2 = A$ , si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

4. Pruebe: Si  $A$  es una matriz cuadrada, entonces  $A$  y  $A^t$  tienen los mismos eigenvalores.  
 5. Pruebe: Si  $A$  es una matriz cuadrada y  $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  es el polinomio característico de  $A$ , entonces el coeficiente de  $\lambda^{n-1}$  en  $p(\lambda)$  es el negativo de la traza de  $A$  (véase el ejercicio 15 de la sección 6.1 en relación con la terminología).  
 6. Pruebe: Si  $b \neq 0$ , entonces

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

no es diagonalizable.

7. En el álgebra lineal avanzada se prueba el **teorema de Cayley-Hamilton**, el cual afirma que una matriz cuadrada  $A$  satisface su ecuación característica; es decir, si

$$c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + c_n\lambda^n = 0$$

es la ecuación característica, entonces

$$c_0I + c_1A + c_2A^2 + \cdots + c_nA^n = 0$$

Verifique este resultado para:

(a)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$       (b)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 8 al 10 aplique el teorema de Cayley-Hamilton, enunciado en el ejercicio 7.

8. Use los resultados del ejercicio 15 de la sección 6.1 para probar el teorema de Cayley-Hamilton para las matrices de  $2 \times 2$ .
9. El teorema de Cayley-Hamilton proporciona un método para calcular potencias de una matriz. Por ejemplo, si  $A$  es una matriz de  $2 \times 2$ , con ecuación característica.

$$c_0 + c_1\lambda + \lambda^2 = 0$$

entonces  $c_0I + c_1A + A^2 = 0$ , de modo que

$$A^2 = -c_1A - c_0I$$

Al multiplicar todo por  $A$  da  $A^3 = -c_1A^2 - c_0A$ , lo cual expresa  $A^3$  en términos de  $A^2$  y  $A$ , y al multiplicar todo por  $A^2$  se obtiene  $A^4 = -c_1A^3 - c_0A^2$ , que expresa  $A^4$  en términos de  $A^3$  y  $A^2$ . Continuando de esta manera, se pueden calcular las potencias sucesivas de  $A$ , expresándolas simplemente en términos de potencias inferiores. Utilice este procedimiento para calcular

$$A^2, \quad A^3, \quad A^4, \quad \text{y} \quad A^5$$

para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Use el método del ejercicio precedente para calcular  $A^3$  y  $A^4$  si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Demuestre que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tiene

- a) dos eigenvalores distintos si  $(a-d)^2 + 4bc > 0$ ;
- b) un eigenvalor si  $(a-d)^2 + 4bc = 0$ ;
- c) ningún eigenvalor si  $(a-d)^2 + 4bc < 0$ .

12. a) Demuestre que si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces el coeficiente de  $\lambda^n$  en el polinomio característico de  $A$  es 1. (Un polinomio con esta propiedad se conoce como *mónico*.)
- b) Demuestre que la matriz

# 7 Aplicaciones

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

tiene el polinomio característico  $p(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + \dots + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n$ . Esto indica que todo polinomio mónico es el polinomio característico de alguna matriz. La matriz de este ejemplo se denomina *matriz acompañante* de  $p(\lambda)$ . (*Sugerencia.* Evalúe todos los determinantes del problema, sumando un múltiplo del segundo renglón al primero, para introducir un cero en el lugar superior de la primera columna y, a continuación, desarrollando en términos de cofactores a lo largo de la primera columna.)

- c) Halle una matriz con polinomio característico  $p(\lambda) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 3\lambda^3 + \lambda^4$ .

## 7.1 APLICACION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Muchas leyes de la física, química, biología y economía se expresan en términos de *ecuaciones diferenciales*, es decir, ecuaciones que comprenden funciones y sus derivadas. El propósito de esta sección es ilustrar una manera en la que es posible aplicar el álgebra lineal para resolver ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales. Esta sección no es amplia, pero debe servir para convencer al lector respecto a que el álgebra lineal tiene aplicaciones sólidas.

Una de las ecuaciones diferenciales más sencillas es

$$y' = ay \tag{7.1}$$

en donde  $y = f(x)$  es una función desconocida que se debe determinar,  $y' = dy/dx$  es su derivada y  $a$  es una constante. Como la mayoría de las ecuaciones diferenciales, (7.1) tiene una infinidad de soluciones, las cuales son funciones, en este caso, de la forma

$$y = ce^{ax} \tag{7.2}$$

en donde  $c$  es una constante arbitraria. Cada función de este tipo es una solución de  $y' = ay$  dado que

$$y' = cae^{ax} = ay$$

Inversamente, toda solución de  $y' = ay$  debe ser una función de la forma  $ce^{ax}$  (ejercicio 7), de modo que (7.2) describe todas las soluciones de  $y' = ay$ . A (7.2) se le da el nombre de *solución general* de  $y' = ay$ .

A veces el problema físico que genera una ecuación diferencial impone alguna condición agregada que permite hallar una *solución particular* a partir de la solución general. Por ejemplo, si se requiere que la solución de  $y' = ay$  satisfaga la condición agregada

$$y(0) = 3 \tag{7.3}$$

# 7

## Aplicaciones

### 7.1 APLICACION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Muchas leyes de la física, química, biología y economía se expresan en términos de *ecuaciones diferenciales*, es decir, ecuaciones que comprenden funciones y sus derivadas. El propósito de esta sección es ilustrar una manera en la que es posible aplicar el álgebra lineal para resolver ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales. Esta sección no es amplia, pero debe servir para convencer al lector respecto a que el álgebra lineal tiene aplicaciones sólidas.

Una de las ecuaciones diferenciales más sencillas es

$$y' = ay \tag{7.1}$$

en donde  $y = f(x)$  es una función desconocida que se debe determinar,  $y' = dy/dx$  es su derivada y  $a$  es una constante. Como la mayoría de las ecuaciones diferenciales, (7.1) tiene una infinidad de soluciones, las cuales son funciones, en este caso, de la forma

$$y = ce^{ax} \tag{7.2}$$

en donde  $c$  es una constante arbitraria. Cada función de este tipo es una solución de  $y' = ay$  dado que

$$y' = cae^{ax} = ay$$

Inversamente, toda solución de  $y' = ay$  debe ser una función de la forma  $ce^{ax}$  (ejercicio 7), de modo que (7.2) describe todas las soluciones de  $y' = ay$ . A (7.2) se le da el nombre de *solución general* de  $y' = ay$ .

A veces el problema físico que genera una ecuación diferencial impone alguna condición agregada que permite aislar una *solución particular* a partir de la solución general. Por ejemplo, si se requiere que la solución de  $y' = ay$  satisfaga la condición agregada

$$y(0) = 3 \tag{7.3}$$



es decir,  $y = 3$  cuando  $x = 0$ , entonces, al sustituir estos valores en la solución general  $y = ce^{ax}$ , se obtiene un valor para  $c$ , a saber

$$3 = ce^0 = c$$

Por tanto,

$$y = 3e^{ax}$$

es la única solución de  $y' = ay$  que satisface la condición agregada. Una condición, como la (7.3), que especifica el valor de la solución como la (7.3), que especifica el valor de la solución en un punto se conoce como **condición inicial**, y el problema de resolver una ecuación diferencial sujeta a una condición inicial se denomina **problema con valor inicial**.

En esta sección se considera la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales que tienen la forma

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned} \quad (7.4)$$

en donde  $y_1 = f_1(x)$ ,  $y_2 = f_2(x)$ , ...,  $y_n = f_n(x)$  son funciones que van a determinarse y las  $a_{ij}$  son constantes. En notación matricial, (7.4) se puede escribir

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

o, más brevemente,

$$Y' = AY$$

### Ejemplo 1

a) Escribese el sistema

$$y_1' = 3y_1$$

$$y_2' = -2y_2$$

$$y_3' = 5y_3$$

en notación matricial.

b) Resuélvase el sistema.

c) Hállese una solución del sistema que satisfaga las condiciones iniciales  $y_1(0) = 1$ ,  $y_2(0) = 4$  y  $y_3(0) = -2$ .

Solución a).

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

o bien,

$$Y' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} Y$$

b) Debido a que cada ecuación comprende sólo una función desconocida, se puede resolver cada una por separado. De (7.2) se obtiene

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3x} \\ c_2 e^{-2x} \\ c_3 e^{5x} \end{bmatrix}$$

o, en notación matricial,

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3x} \\ c_2 e^{-2x} \\ c_3 e^{5x} \end{bmatrix}$$

c) A partir de las condiciones iniciales dadas, se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= y_1(0) = c_1 e^0 = c_1 \\ 4 &= y_2(0) = c_2 e^0 = c_2 \\ -2 &= y_3(0) = c_3 e^0 = c_3 \end{aligned}$$

de modo que la solución que satisface las condiciones iniciales es

$$y_1 = e^{3x}, y_2 = 4e^{-2x}, y_3 = -2e^{5x}$$

o, en notación matricial,

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 4e^{-2x} \\ -2e^{5x} \end{bmatrix}$$

El sistema de este ejemplo fue fácil de resolver porque cada ecuación comprendía sólo una función desconocida, y éste fue el caso porque la matriz de coeficientes (7.5) para el sistema fue diagonal. ¿Pero cómo manejar un sistema

$$Y' = AY$$

en el cual la matriz  $A$  no sea diagonal? La idea es sencilla: Inténtese hacer una sustitución para  $Y$  que conduzca a un nuevo sistema con una matriz diagonal de los coeficientes; resuélvase este nuevo sistema más sencillo y, a continuación, úsese esta solución para determinar la del sistema original.

La clase de sustitución que se tiene en mente es

$$\begin{aligned} y_1 &= p_{11}u_1 + p_{12}u_2 + \cdots + p_{1n}u_n \\ y_2 &= p_{21}u_1 + p_{22}u_2 + \cdots + p_{2n}u_n \\ &\vdots \\ y_n &= p_{n1}u_1 + p_{n2}u_2 + \cdots + p_{nn}u_n \end{aligned} \quad (7.6)$$

o, en notación matricial,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

o, más brevemente,

$$Y = PU$$

En esta sustitución, las  $p_{ij}$  son constantes que deben determinarse de tal modo que el nuevo sistema que comprenda las funciones desconocidas  $u_1, u_2, \dots, u_n$  tenga una matriz diagonal de los coeficientes. Se deja como ejercicio para el estudiante derivar cada una de las ecuaciones en (7.6) y deducir que

$$Y' = PU'$$

Si se hacen las sustituciones  $Y = PU$  y  $Y' = PU'$  en el sistema original

$$Y' = AY$$

y si se supone que  $P$  es inversible, se obtiene

$$PU' = A(PU)$$

o bien,

$$U' = (P^{-1}AP)U$$

o bien,

$$U' = DU$$

en donde  $D = P^{-1}AP$ . Ahora queda claro cómo elegir  $P$ ; si se desea que la nueva matriz de los coeficientes  $D$  sea diagonal, se debe elegir  $P$  como una matriz que diagonalice a  $A$ .

Esto sugiere el procedimiento que sigue para resolver un sistema

$$Y' = AY$$

con una matriz  $A$  de los coeficientes que sea diagonalizable:

- Paso 1.** Se halla una matriz  $P$  que diagonalice a  $A$ .
- Paso 2.** Se hacen las sustituciones  $Y = PU$  y  $Y' = PU'$  para obtener un nuevo "sistema diagonal"  $U' = DU$ , en donde  $D = P^{-1}AP$ .
- Paso 3.** Se resuelve  $U' = DU$ .
- Paso 4.** Se determina  $Y$  a partir de la ecuación  $Y = PU$ .

**Ejemplo 2**

a) Resuélvase

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

b) Hállese la solución que satisfaga las condiciones iniciales  $y_1(0) = 1, y_2(0) = 6$ .

*Solución a).* La matriz de los coeficientes para el sistema es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Como se analizó en la sección 6.2,  $A$  será diagonalizada por cualquier matriz  $P$  cuyas columnas sean eigenvectores linealmente independientes de  $A$ . Dado que

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

los eigenvalores de  $A$  son  $\lambda = 2, \lambda = -3$ . Por definición,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es un eigenvector de  $A$  correspondiente a  $\lambda$  si y sólo si  $x$  es una solución no trivial de  $(\lambda I - A)x = 0$ , es decir, de

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Si  $\lambda = 2$ , este sistema se convierte en

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolverlo, da

$$x_1 = t, \quad x_2 = t$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es una base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 2$ . De manera análoga, el lector puede demostrar que

$$p_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

es una base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = -3$ . Por tanto,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliza a  $A$  y

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la sustitución

$$Y = PU \quad y \quad Y' = PU'$$

conduce al nuevo "sistema diagonal"

$$U' = DU = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} U \quad \text{ó} \quad \begin{cases} u_1' = 2u_1 \\ u_2' = -3u_2 \end{cases}$$

Con base en (7.2), la solución de este sistema es

$$\begin{cases} u_1 = c_1 e^{2x} \\ u_2 = c_2 e^{-3x} \end{cases} \quad \text{ó} \quad U = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix}$$

de modo que la ecuación  $Y = PY$  proporciona como la solución para  $Y$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\ c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{2x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\ y_2 &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{aligned} \tag{7.7}$$

b) Si se sustituyen las condiciones iniciales dadas en (7.7), se obtiene

$$\begin{aligned} c_1 - \frac{1}{4} c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= 6 \end{aligned}$$

Al resolver este sistema se obtiene

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 4$$

de modo que, por (7.7), la solución que satisface las condiciones iniciales es

$$\begin{aligned} y_1 &= 2e^{2x} - e^{-3x} \\ y_2 &= 2e^{2x} + 4e^{-3x} \end{aligned}$$

En esta sección se ha supuesto que la matriz de los coeficientes de  $Y' = AY$  es diagonalizable. Si este no es el caso, es necesario aplicar otros métodos para resolver el sistema. Los métodos de este tipo se estudian en textos más avanzados.

### EJERCICIOS 7.1

1. a) Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

b) Halle la solución que satisfaga las condiciones iniciales  $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$ .

2. a) Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= 4y_1 + 5y_2 \end{aligned}$$

b) Halle la solución que satisfaga las condiciones  $y_1(0) = 2, y_2'(0) = 1$

3. a) Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_3 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 \\ y_3' &= -2y_1 + y_3 \end{aligned}$$

- b) Halle la solución que satisfaga las condiciones iniciales  $y_1(0) = -1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$ .

4. Resuelva el sistema

$$y_1' = 4y_1 + 2y_2 + 2y_3$$

$$y_2' = 2y_1 + 4y_2 + 2y_3$$

$$y_3' = 2y_1 + 2y_2 + 4y_3$$

5. Resuelva la ecuación diferencial  $y'' - y' - 6y = 0$ . (*Sugerencia.*) Haga  $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y''$ , a continuación, demuestre que

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3 = y' + 6y = y_1' + 6y_1 = 6y_1 + y_2$$

6. Resuelva la ecuación diferencial  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ . (*Sugerencia.* Haga  $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y''$ , a continuación, demuestre que

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$y_3' = 6y_1 - 11y_2 + 6y_3$$

7. Pruebe que toda solución de  $y' = ay$  tiene la forma  $y = ce^{ax}$ . (*Sugerencia.* Sea  $y = f(x)e^{-ax}$  una solución y demuestre que  $f(x)e^{-ax}$  es constante.)

8. Pruebe que si  $A$  es diagonalizable y

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

satisface  $Y' = AY$ , entonces cada  $y_i$  es una combinación lineal de  $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ , en donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son eigenvalores de  $A$ .

## 7.2 APLICACION A PROBLEMAS DE APROXIMACION; SERIES DE FOURIER

En muchas aplicaciones se tiene interés en encontrar la mejor aproximación posible sobre un intervalo, para una función  $f$ , por medio de otra función que pertenece a alguna clase especificada; por ejemplo:

- Halle la mejor aproximación posible para  $e^x$  sobre  $[0, 1]$ , por medio de un polinomio de la forma  $a_0 + a_1x + a_2x^2$ .
- Halle la mejor aproximación posible para  $\sin \pi x$  sobre  $[-1, 1]$ , por medio de una función de la forma  $a_0 + a_1e^x + a_2e^{2x} + a_3e^{3x}$ .
- Halle la mejor aproximación posible para  $|x|$  sobre  $[0, 2\pi]$ , por medio de una función de la forma  $a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x$ .

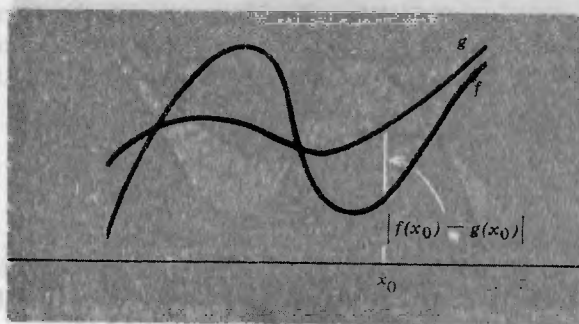


Figura 7.1

Observe que en cada uno de estos ejemplos, las funciones de aproximación se extrajeron de algún subespacio del espacio vectorial  $C[a, b]$  (funciones continuas sobre  $[a, b]$ ). En el primer ejemplo, fue el subespacio de  $C[0, 1]$  generado por  $1, x$  y  $x^2$ ; en el segundo ejemplo, fue el subespacio de  $C[-1, 1]$  generado por  $1, e^x, e^{2x}$  y  $e^{3x}$ ; y, en el tercer ejemplo, fue el subespacio de  $C[0, 2\pi]$  generado por  $1, \text{sen } x, \text{sen } 2x, \text{cos } x$  y  $\text{cos } 2x$ . Por tanto, cada uno de estos ejemplos enuncia un problema de la forma siguiente:

**Problema de aproximación.** Hállese la mejor aproximación posible sobre  $[a, b]$  para una función dada  $f$ , utilizando únicamente aproximaciones tomadas de un subespacio especificado  $W$  de  $C[a, b]$ .

Para resolver este problema es necesario tomar el término “la mejor aproximación posible sobre  $[a, b]$ ” de manera más precisa. Intuitivamente, la mejor aproximación posible sobre  $[a, b]$  es aquella que produzca el menor error. ¿Pero qué se entiende por “error”? Si sólo se tuviese interés en la aproximación de  $f(x)$  en un sólo punto  $x_0$ , entonces el error en  $x_0$  por una aproximación  $g(x)$  sería simplemente

$$\text{error} = |f(x_0) - g(x_0)|$$

a lo que a veces se denomina *desviación* entre  $f$  y  $g$  en  $x_0$  (figura 7.1.). Sin embargo, se tiene interés en la aproximación sobre un intervalo completo  $[a, b]$ , no en un solo punto.

Como consecuencia, es posible que en una parte del intervalo, una aproximación  $g_1(x)$  tenga desviaciones menores respecto de  $f$  que una aproximación  $g_2(x)$ , y en otra parte del intervalo podría suceder lo contrario. ¿Cómo se decide cuál es la mejor aproximación global? Lo que se necesita es alguna manera de medir el error global en una aproximación  $g(x)$ . Una medida posible del error global se obtiene integrando la desviación  $|f(x) - g(x)|$  sobre todo el intervalo; es decir,

$$\text{error} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (7.8)$$

Geoméricamente, (7.8) es el área entre las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$  sobre el intervalo  $[a, b]$  (figura 7.2); entre mayor sea el área, mayor será el error global.

Aun cuando (7.8) es natural y geoméricamente atractiva, la presencia de un signo de valor absoluto es lo suficientemente incómoda en los cálculos, que la mayoría de los matemáticos y científicos por lo general se inclinan por la siguiente medida alternativa del error, conocida como *error cuadrático medio*,



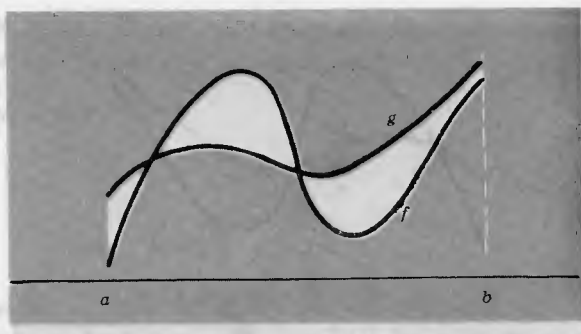


Figura 7.2

$$\text{error cuadrático medio} = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

El error cuadrático medio tiene la ventaja adicional de que permite trasladar la teoría de los espacios de productos interiores hacia los problemas de aproximación. Para ver en qué forma sucede esto, considérese el producto interior

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (7.9)$$

sobre el espacio vectorial  $C[a, b]$ . Con este producto interior,

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 = \langle \mathbf{f} - \mathbf{g}, \mathbf{f} - \mathbf{g} \rangle = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

en el que se afirma que el error cuadrático medio, que resulta de aproximar  $\mathbf{f}$  por  $\mathbf{g}$  sobre  $[a, b]$ , es el cuadrado de la distancia entre  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$ , cuando estas funciones se conciben como vectores en  $C[a, b]$ , con el producto interior (7.9). Así entonces, una aproximación  $\mathbf{g}$ , tomada de un subespacio  $W$  de  $C[a, b]$ , minimiza el error cuadrático medio si y sólo si minimiza  $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2$ , o bien, de modo equivalente, si y sólo si minimiza  $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|$ . En pocas palabras, la aproximación  $\mathbf{g}$  en  $W$  que minimiza el error cuadrático medio es el vector  $\mathbf{g}$  en  $W$  más próximo a  $\mathbf{f}$ , utilizando el producto interior (7.9). Pero ya se sabe qué es vector  $\mathbf{g}$ ; es la proyección ortogonal de  $\mathbf{f}$  sobre el subespacio  $W$  (teorema 23, sección 4.9). Véase la figura 7.3. En resumen, se tiene el siguiente resultado:

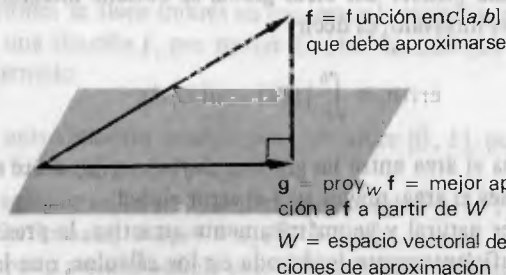


Figura 7.3

**Solución del problema de mínimos cuadrados.** Si  $f$  es una función continua sobre  $[a, b]$  y  $W$  es un espacio con dimensión finita de  $C[a, b]$ , entonces la función  $g$  en  $W$  que minimiza el error cuadrático medio

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

es  $g = \text{proy}_W f$ , la proyección ortogonal de  $f$  sobre  $W$ , en relación con el producto interior (7.9). La función  $g = \text{proy}_W f$  se conoce como *aproximación de los mínimos cuadrados* para  $f$  tomada de  $W$ .

**Series de Fourier**

Una función de la forma

$$t(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \dots + c_n \cos nx + d_1 \sin x + d_2 \sin 2x + \dots + d_n \sin nx \tag{7.10}$$

se conoce como *polinomio trigonométrico*; si  $c_n$  y  $d_n$  no son ambos cero, entonces se dice que  $t(x)$  tiene *orden*  $n$ .

**Ejemplo 3**

$$t(x) = 2 + \cos x - 3 \cos 2x + 7 \sin 4x$$

es un polinomio trigonométrico con

$$c_0 = 2, c_1 = 1, c_2 = -3, d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 0, d_4 = 7$$

El orden de  $t(x)$  es 4.

Resulta evidente, por lo expresado en (7.10), que los polinomios trigonométricos de orden  $n$  o menos son las diversas combinaciones lineales posibles de

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx \tag{7.11}$$

Por tanto, los polinomios trigonométricos de orden  $n$  o menos forman un subespacio  $W$  del espacio vectorial de funciones continuas; a saber, el subespacio generado por las  $2n + 1$  funciones enumeradas en (7.11). Se puede demostrar que estas funciones son linealmente independientes y, como consecuencia, forman una base para  $W$ .

Considérese el problema de encontrar una aproximación para una función continua  $f(x)$  sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$ , por medio de un polinomio trigonométrico de orden  $n$  o menor. Como se hizo notar antes, la aproximación de mínimos cuadrados para  $f$ , tomada de  $W$ , es la proyección ortogonal de  $f$  sobre  $W$ . Para hallar esta proyección ortogonal, es necesario encontrar una base ortonormal  $g_0, g_1, \dots, g_{2n}$  para  $W$ , después de lo cual es posible calcular la proyección ortogonal sobre  $W$ , a partir de la fórmula

$$\text{Proy}_W f = \langle f, g_0 \rangle g_0 + \langle f, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle f, g_{2n} \rangle g_{2n} \tag{7.12}$$

(véase el teorema 20 de la sección 4.9). Se puede obtener una base ortonormal para  $W$ , aplicando el proceso de Gram-Schmidt a la base 7.11), utilizando el producto interior

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_0^{2\pi} u(x)v(x) dx$$

Esto conduce (ejercicio 6) a la base ortonormal

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathbf{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \dots, \mathbf{g}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \\ \mathbf{g}_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x, \dots, \mathbf{g}_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx \end{aligned} \quad (7.13)$$

Si se introduce la notación

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle, a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle, \dots, a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n \rangle \\ b_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{n+1} \rangle, \dots, b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle \end{aligned}$$

entonces, al sustituir (7.13) en (7.12), se obtiene

$$\operatorname{Proy}_W \mathbf{f} = \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx] + [b_1 \operatorname{sen} x + \dots + b_n \operatorname{sen} nx]$$

en donde

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$$

⋮

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{n+1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} x dx$$

⋮

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx$$

En pocas palabras,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

Los números  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  se denominan *coeficientes de Fourier\** de  $f$ .

**Ejemplo 4**

Hállese la aproximación de mínimos cuadrados de  $f(x) = x$  sobre  $[0, 2\pi]$ , por medio de

- a) un polinomio trigonométrico de orden 2 o menor
- b) un polinomio trigonométrico de orden  $n$  o menor.

*Solución.*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \, dx = 2\pi$$

Para  $k = 1, 2, \dots$ , la integración por partes conduce a (verifíquese):

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx \, dx = 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx \, dx = -\frac{2}{k} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Por tanto, la aproximación de mínimos cuadrados para  $x$  sobre  $[0, 2\pi]$ , por medio de un polinomio trigonométrico de orden 2 o menor es

$$x \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x$$

o bien, con base en (7.14),

$$x \approx \pi - 2 \sin x - \sin 2x$$

- b) La aproximación de mínimos cuadrados para  $x$  sobre  $[0, 2\pi]$ , por medio de un polinomio trigonométrico de orden  $n$  o menor es

$$x \approx \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx] + [b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx]$$

\*Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) – matemático y físico francés. Fourier descubrió las series que llevan su nombre y las ideas relacionadas al trabajar con problemas de difusión del calor. Este descubrimiento es uno de los más trascendentales en la historia de las Matemáticas; es la piedra angular de muchos campos de investigación matemática y una herramienta básica en muchas ramas de la ingeniería.

Fourier, político activista durante la Revolución Francesa, pasó mucho tiempo en la cárcel por defender a muchas víctimas durante la Epoca del Terror. Finalmente se convirtió en un amigo predilecto de Napoleón, quien lo nombró tanto Barón como Conde.



o, por (7.14),

$$x \simeq \pi - 2 \left( \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \right)$$

Resulta obvio esperar que el error cuadrático medio disminuya a medida que se aumenta el número de términos en la aproximación de mínimos cuadrados

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

Se puede probar que el error cuadrático medio tiende a cero conforme  $n \rightarrow +\infty$ ; esto se denota escribiendo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

El segundo miembro de esta ecuación se denomina *serie de Fourier* para  $f$ . Las series de este tipo tienen importancia primordial en ingeniería, ciencias y matemáticas.

## EJERCICIOS 7.2

- Halle la aproximación de mínimos cuadrados de  $f(x) = 1 + x$  sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$  por medio de
  - un polinomio trigonométrico de orden 2 o menor;
  - un polinomio trigonométrico de orden  $n$  o menor.
- Encuentre la aproximación de mínimos cuadrados de  $f(x) = x^2$  sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$  por medio de
  - un polinomio trigonométrico de orden 3 o menor;
  - un polinomio trigonométrico de orden  $n$  o menor.
- Halle la aproximación de mínimos cuadrados de  $x$  sobre el intervalo  $[0, 1]$ , por medio de una función de la forma  $a + be^x$ .
  - Encuentre el error cuadrático medio de la aproximación.
- Determine la aproximación de mínimos cuadrados de  $e^x$  sobre el intervalo  $[0, 1]$ , por medio de un polinomio de la forma  $a_0 + a_1 x$ .
  - Halle el error cuadrático medio de la aproximación.
- Encuentre la aproximación de mínimos cuadrados de  $\operatorname{sen} \pi x$  sobre el intervalo  $[-1, 1]$ , por medio de un polinomio de la forma  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ .
  - Halle el error cuadrático medio de la aproximación.
- Aplice el proceso de Gram-Schmidt para obtener la base ortonormal (7.13), a partir de la base (7.11).

7. Lleve a cabo las integraciones que se dan en (7.14).

8. Halle la serie de Fourier de  $f(x) = \pi - x$ .

### 7.3 FORMAS CUADRATICAS; APLICACION A LAS SECCIONES CONICAS

En esta sección se aplican los resultados obtenidos acerca de las transformaciones ortogonales de coordenadas, para el estudio de las ecuaciones cuadráticas, las formas cuadráticas y las secciones cónicas. Las formas cuadráticas surgen en una diversidad de problemas importantes referentes a áreas tan diversas como las vibraciones, la relatividad, la geometría y la estadística.

Una ecuación de la forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{7.15}$$

en donde  $a, b, \dots, f$  son números reales, y al menos uno de los números  $a, b, c$  no es cero, se denomina **ecuación cuadrática en  $x$  y  $y$** ; la expresión

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

se llama **forma cuadrática asociada**.

#### Ejemplo 5

En la ecuación cuadrática

$$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7 = 0$$

las constantes que se mencionan en (7.15) son

$$a = 3 \quad b = \frac{5}{2} \quad c = -7 \quad d = 2 \quad e = 0 \quad f = 7$$

#### Ejemplo 6

**Ecuación cuadrática**

**Forma cuadrática asociada**

$$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7 = 0 \quad 3x^2 + 5xy - 7y^2$$

$$4x^2 - 5y^2 + 8y + 9 = 0 \quad 4x^2 - 5y^2$$

$$xy + y = 0 \quad xy$$

Las gráficas de las ecuaciones cuadráticas en  $x$  y  $y$  se llaman **cónicas** o **secciones cónicas**. Las cónicas más importantes son las elipses, los círculos, las hipérbolas y las parábolas; se dice que éstas son cónicas **no degeneradas**. Las cónicas restantes se califican como **degeneradas** e incluyen puntos aislados y parejas de rectas (véase ejercicio 13).

Se dice que una cónica no degenerada se encuentra en **posición estándar**, con relación a los ejes de coordenadas, si su ecuación se puede expresar en una de las formas dadas en la figura 7.4.

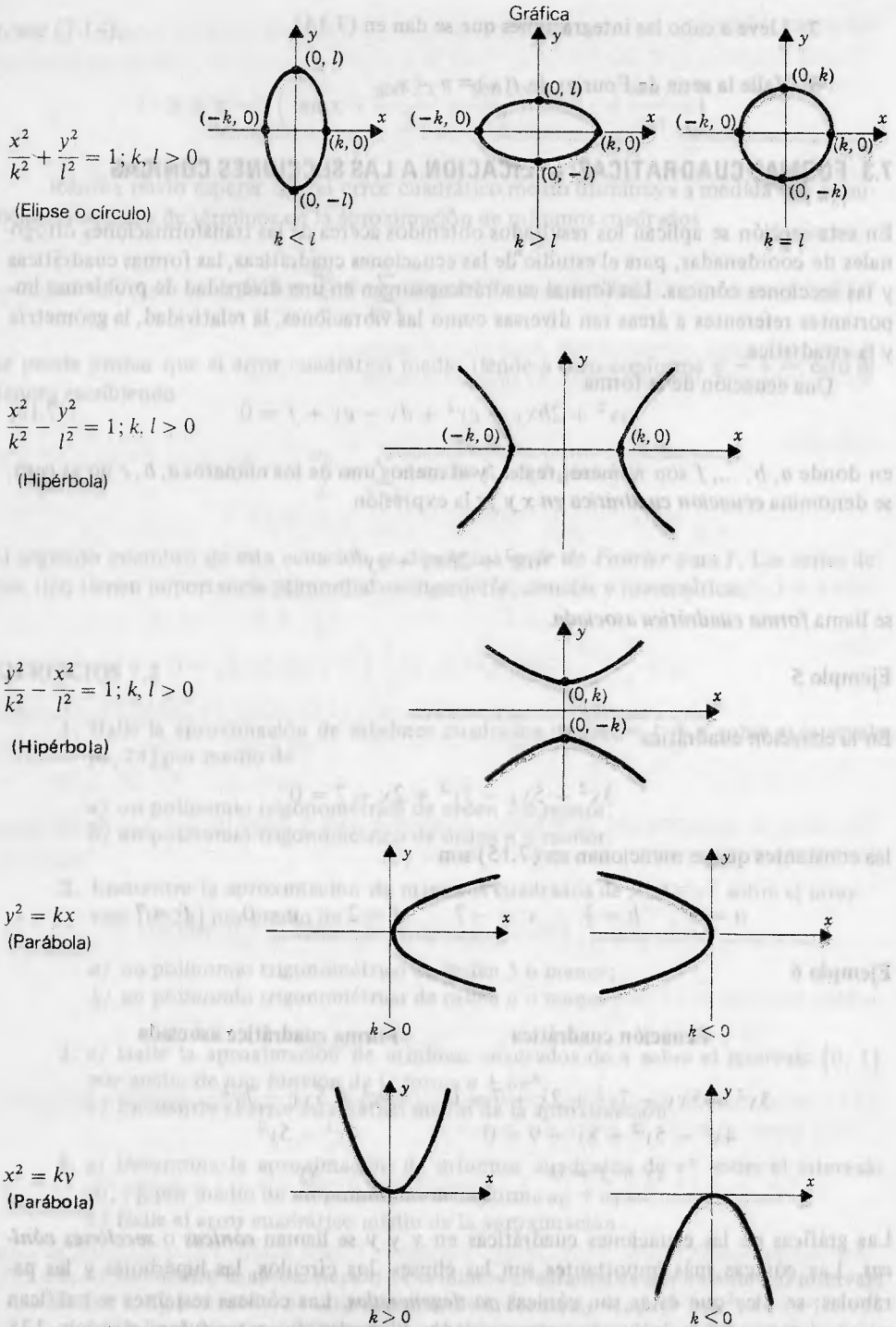


Figura 7.4

**Ejemplo 7**

La ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ es de la forma } \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1 \text{ con } k = 2, l = 3$$

Por tanto, su gráfica es una elipse en la posición estándar, la cual se interseca con el eje  $x$  en  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$ , y se interseca con el eje  $y$  en  $(0, -3)$  y  $(0, 3)$ .

La ecuación  $x^2 - 8y^2 = -16$  se puede reescribir como  $y^2/2 - x^2/16 = 1$ , la cual es de la forma  $y^2/k^2 - x^2/l^2 = 1$  con  $k = \sqrt{2}, l = 4$ . Así entonces, su gráfica es una hipérbola en posición estándar que se interseca con el eje  $y$  en  $(0, -\sqrt{2})$  y  $(0, \sqrt{2})$ .

La ecuación  $5x^2 + 2y = 0$  se puede volver a escribir como  $x^2 = -\frac{2}{5}y$ , la cual es de la forma  $x^2 = ky$  con  $k = -\frac{2}{5}$ . Dado que  $k < 0$ , su gráfica es una parábola en posición estándar que se abre hacia abajo.

Obsérvese que ninguna cónica en posición estándar tiene término en  $xy$  (conocido como *término de producto cruzado*) en su ecuación; la presencia de un término  $xy$ , en la ecuación de una cónica degenerada, indica que tal cónica está girada respecto a su posición estándar (figura 7.5a). También, ninguna cónica en posición estándar tiene tanto un término en  $x^2$  como en  $x$ , o bien, uno en  $y^2$  y en  $y$ . Si no existe término de producto cruzado, la presencia de cualquiera de estos dos pares de términos en la ecuación de una cónica no degenerada indica que tal cónica está trasladada respecto a su posición estándar (figura 7.5b).

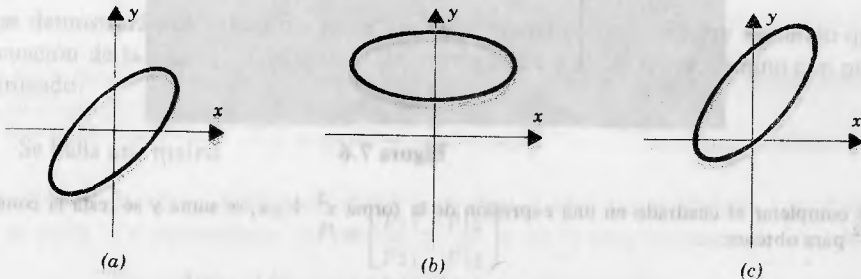
Una técnica para identificar la gráfica de una cónica no degenerada, que no se encuentra en la posición estándar, consiste en hacer girar y trasladar los ejes de coordenadas  $xy$ , para obtener un sistema de coordenadas  $x'y'$ , con relación al cual la cónica esté en la posición estándar. Una vez que se hace lo anterior, la ecuación de la cónica en el sistema  $x'y'$  tendrá una de las formas dadas en la figura 7.4 y, por consiguiente, es posible identificarla con facilidad.

**Ejemplo 8**

Dado que la ecuación cuadrática

$$2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$$

contiene términos en  $x^2, x, y^2$  y  $y$ , pero ningún término con producto cruzado, su gráfica es una cónica que está trasladada respecto de la posición estándar, pero no está girada.



**Figura 7.5** (a) Girada. (b) Trasladada. (c) Girada y trasladada.



Esta cónica se puede llevar a la posición estándar, trasladando apropiadamente los ejes de coordenadas. Para hacerlo, agrúpense primero los términos en  $x$  y  $y$ . Esto conduce a

$$(2x^2 - 12x) + (y^2 - 4y) + 18 = 0$$

o bien,

$$2(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = -18$$

Al completar los cuadrados\* en las dos expresiones que están entre paréntesis, se obtiene

$$2(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -18 + 18 + 4$$

o bien,

$$2(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad (7.16)$$

Si se trasladan los ejes de coordenadas por medio de las ecuaciones de traslación

$$x' = x - 3 \quad y' = y - 2$$

(ejemplo 3 de la sección 3.1), entonces (7.16) queda

$$2x'^2 + y'^2 = 4$$

o bien,

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que es la ecuación de una elipse en posición estándar, en el sistema  $x'y'$ . En la figura 7.6 se tiene un esquema de esta elipse.

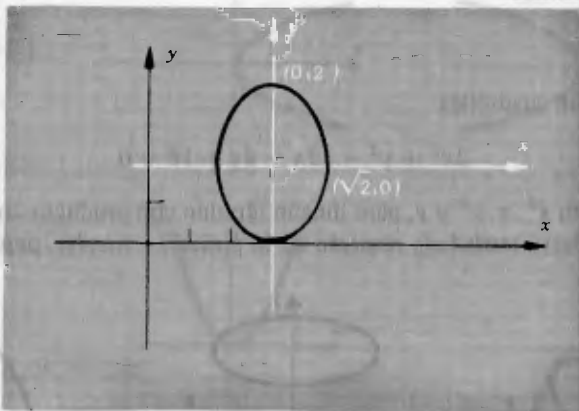


Figura 7.6

\*Para completar el cuadrado en una expresión de la forma  $x^2 + px$ , se suma y se resta la constante  $(p/2)^2$  para obtener

$$x^2 + px = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Ahora se considera la identificación de las cónicas que están giradas respecto a la posición estándar. En el resto de este texto se sigue una convención estándar de omitir los corchetes en todas las matrices de  $1 \times 1$ . Por tanto, el símbolo 8 puede denotar el número 8, o bien, la matriz de  $1 \times 1$  cuyo elemento es el número 8. Siempre será posible entender, por el contexto, cuál es el significado. Con esta convención, (7.15) se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

o bien,

$$\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{x} + f = 0 \tag{7.17}$$

en donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$$

En esta notación, la forma cuadrática asociada con (7.17) es

$$\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x}$$

La matriz simétrica  $A$  se denomina *matriz de la forma cuadrática*  $\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x}$ .

**Ejemplo 9**

Las matrices de las formas cuadráticas

$$3x^2 + 5xy + 7y^2 \quad \text{y} \quad 8x^2 - 4y^2$$

son

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Considérese una cónica  $C$  con la ecuación

$$\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{x} + f = 0 \tag{7.18}$$

Ahora se demostrará que es posible hacer girar los ejes de coordenadas  $xy$  de modo que en la ecuación de la cónica, en el sistema de coordenadas  $x'y'$ , no tenga término con producto cruzado.

**Paso 1.** Se halla una matriz

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

que diagonaliza ortogonalmente a  $A$ .

**Paso 2.** Se intercambian las columnas de  $P$ , si es necesario, para hacer que  $\det(P) = 1$ . Esto asegura que la transformación ortogonal de coordenadas

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}', \text{ es decir, } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

es una rotación (véase el análisis que precede al ejemplo 68 en la sección 4.10).

**Paso 3.** A fin de obtener la ecuación para  $C$  en el sistema  $x'y'$ , se sustituye (7.19) en (7.18). Esto conduce a

$$(P\mathbf{x}')^T A (P\mathbf{x}') + K(P\mathbf{x}') + f = 0$$

o bien,

$$\mathbf{x}'^T (P^T A P) \mathbf{x}' + (KP) \mathbf{x}' + f = 0 \quad (7.20)$$

Puesto que  $P$  diagonaliza ortogonalmente a  $A$ ,

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

en donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son eigenvalores de  $A$ . Por tanto, (7.20) se puede volver a escribir como

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

o bien,

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

(en donde  $d' = dp_{11} + ep_{21}$  y  $e' = dp_{12} + ep_{22}$ ). Esta ecuación no tiene término de producto cruzado.

En el siguiente teorema se resume este análisis.

**Teorema 9. (Teorema de los ejes principales para  $R^2$ ).** Sea

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

la ecuación de una cónica  $C$ , y supóngase que

$$\mathbf{x}'^T A \mathbf{x}' = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

es la forma cuadrática asociada. Entonces se puede hacer girar los ejes de coordenadas de modo que la ecuación para  $C$  en el nuevo sistema de coordenadas  $x'y'$  tenga la forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

en donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los eigenvalores de  $A$ . Se puede llevar a cabo la rotación por medio de la sustitución

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

en donde  $P$  diagonaliza ortogonalmente a  $A$  y  $\det(P) = 1$

**Ejemplo 10**

Describáse la cónica  $C$  cuya ecuación es  $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ .

**Solución.** La forma matricial de esta ecuación es

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} - 36 = 0 \tag{7.21}$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de  $A$  es

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$$

Por tanto, los eigenvalores de  $A$  son  $\lambda = 4$  y  $\lambda = 9$ .

Los eigenvectores correspondientes a  $\lambda = 4$  son las soluciones diferentes de cero de

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver este sistema se obtiene

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es una base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 4$ . Al normalizar este vector con el fin de obtener una base ortonormal para este eigenspacio, se obtiene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$



De modo análogo,

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

es una base ortonormal para el eigenespacio correspondiente a  $\lambda = 9$ .

Por tanto,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

diagonaliza ortogonalmente a  $A$ . Es más,  $\det(P) = 1$  de modo que la transformación ortogonal de coordenadas

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}' \quad (7.22)$$

es una rotación. Al sustituir (7.22) en (7.21) se obtiene

$$(P\mathbf{x}')^T A (P\mathbf{x}') - 36 = 0$$

o bien,

$$(\mathbf{x}')^T (P^T A P) \mathbf{x}' - 36 = 0$$

Ya que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

es posible escribir esta ecuación como

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 36 = 0$$

o bien,

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

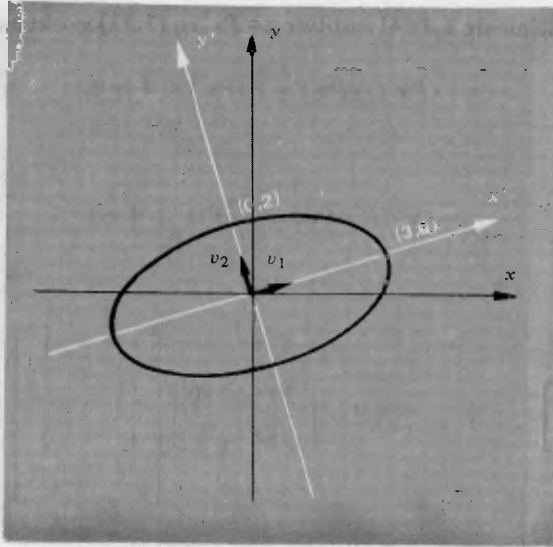


Figura 7.7

Se puede reescribir esta ecuación como

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que es la ecuación de la elipse cuyo esquema se da en la figura 7.7.

**Ejemplo 11**

Describese la cónica  $C$  cuya ecuación es

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0$$

*Solución.* La forma matricial de esta ecuación es

$$\mathbf{x}'Ax + K\mathbf{x} + 4 = 0 \tag{7.23}$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad K = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Como se muestra en el ejemplo 10,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

diagonaliza ortogonalmente a  $A$ . Al sustituir  $x = Px'$  en (7.23) se obtiene

$$(Px')^t A (Px') + K(Px') + 4 = 0$$

o bien,

$$(x')^t (P^t A P) x' + (K P) x' + 4 = 0 \quad (7.24)$$

Dado que

$$P^t A P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad K P = \begin{bmatrix} 20 & -80 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -36 \end{bmatrix}$$

es posible escribir (7.24) como

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0 \quad (7.25)$$

Para llevar la cónica a la posición estándar, se deben trasladar los ejes  $x'y'$ . Procediendo como en el ejemplo 8, se reescribe (7.25) como

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') = -4$$

Al completar los cuadrados se obtiene

$$4(x'^2 - 2x' + 1) + 9(y'^2 - 4y' + 4) = -4 + 4 + 36$$

o bien,

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 = 36 \quad (7.26)$$

Si se trasladan los ejes de coordenadas por medio de las ecuaciones

$$x'' = x' - 1 \quad y'' = y' - 2$$

entonces (7.26) queda

$$4x''^2 + 9y''^2 = 36$$

ó

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

que es la ecuación de la elipse cuyo esquema aparece en la figura 7.8.

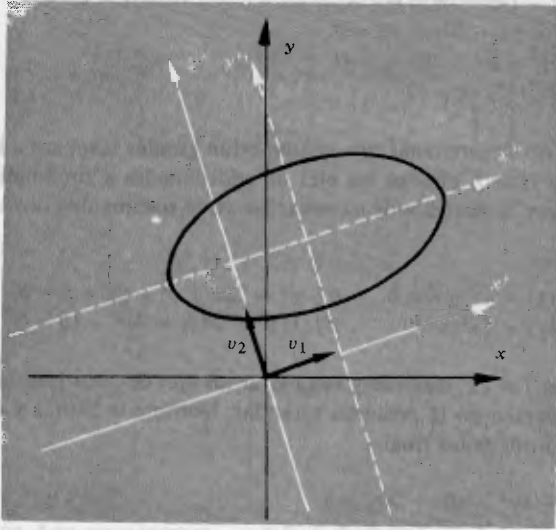


Figura 7.8

**EJERCICIOS 7.3**

1. Halle las formas cuadráticas asociadas con las ecuaciones cuadráticas que siguen.

- a)  $2x^2 - 3xy + 4y^2 - 7x + 2y + 7 = 0$
- b)  $x^2 - xy + 5x + 8y - 3 = 0$
- c)  $5xy = 8$
- d)  $4x^2 - 2y^2 = 7$
- e)  $y^2 + 7x - 8y - 5 = 0$

2. Encuentre las matrices de las formas cuadráticas que se dan en el ejercicio 1.

3. Exprese cada una de las ecuaciones cuadráticas del ejercicio 1 en la forma matricial  $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} + K \mathbf{x} + f = 0$ .

4. Nombre las cónicas siguientes.

- a)  $2x^2 + 5y^2 = 20$
- b)  $4x^2 + 9y^2 = 1$
- c)  $x^2 - y^2 - 8 = 0$
- d)  $4y^2 - 5x^2 = 20$
- e)  $x^2 + y^2 - 25 = 0$
- f)  $7y^2 - 2x = 0$
- g)  $-x^2 = 2y$
- h)  $3x - 11y^2 = 0$
- i)  $y - x^2 = 0$
- j)  $x^2 - 3 = -y^2$

5. En cada inciso, una traslación lleva la cónica a la posición estándar. Nombre la cónica y dé su ecuación en el sistema de coordenadas trasladado.

- a)  $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$
- b)  $x^2 - 16y^2 + 8x + 128y = 256$



$$\begin{aligned} c) & y^2 - 8x - 14y + 49 = 0 \\ d) & x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0 \\ e) & 2x^2 - 3y^2 + 6x + 20y = -41 \\ f) & x^2 + 10x + 7y = -32 \end{aligned}$$

6. Las cónicas no degeneradas que siguen están giradas respecto a la posición estándar. En cada inciso, gírense los ejes de coordenadas a fin de eliminar el término en  $xy$ . Nombre la cónica y dé su ecuación en el sistema de coordenadas girado.

$$\begin{aligned} a) & 2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0 & b) & x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0 \\ c) & 5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9 & d) & 11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 7 al 12, traslade y haga girar los ejes de coordenadas, si es necesario, para poner la cónica en la posición estándar. Nombre la cónica y dé su ecuación en el sistema de coordenadas final.

$$\begin{aligned} 7. & 9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y = 5 \\ 8. & 3x^2 - 8xy - 12y^2 - 30x - 64y = 0 \\ 9. & 2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y = -14 \\ 10. & 21x^2 + 6xy + 13y^2 - 114x + 34y + 73 = 0 \\ 11. & x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0 \\ 12. & 4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0 \end{aligned}$$

13. En ciertos casos, la gráfica de una ecuación cuadrática en  $x$  y  $y$  puede ser un punto, una recta o un par de rectas; éstas se conocen como *degeneradas*. También es posible que la ecuación no sea satisfecha por valor real alguno de  $x$  y  $y$ . En estos últimos casos, la ecuación no tiene gráfica; se dice que representa una *cónica imaginaria*. Cada una de las ecuaciones que siguen representan una cónica degenerada o una imaginaria. Cuando sea posible, trace la gráfica.

$$\begin{aligned} a) & x^2 - y^2 = 0 & b) & x^2 + 3y^2 + 7 = 0 \\ c) & 8x^2 + 7y^2 = 0 & d) & x^2 - 2xy + y^2 = 0 \\ e) & 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 52 = 0 & f) & x^2 + y^2 - 2x - 4y = -5 \end{aligned}$$

## 7.4 FORMAS CUADRÁTICAS; APLICACION A LAS SUPERFICIES CUADRICAS

En esta sección, las técnicas de la sección anterior se extienden hacia las ecuaciones cuadráticas en tres variables.

Una ecuación de la forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad (7.27)$$

en donde  $a, b, \dots, f$  no son todos cero, se denomina *ecuación cuadrática en  $x, y$  y  $z$* ; la expresión

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

es la *forma cuadrática asociada*.

La ecuación (7.27) se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + j = 0$$

o bien,

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} + K \mathbf{x} + j = 0$$

en donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}$$

La matriz simétrica  $A$  se conoce como *matriz de la forma cuadrática*

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

**Ejemplo 12**

La forma cuadrática asociada con la ecuación cuadrática

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz + 7x + 2y + 3z - 7 = 0$$

es

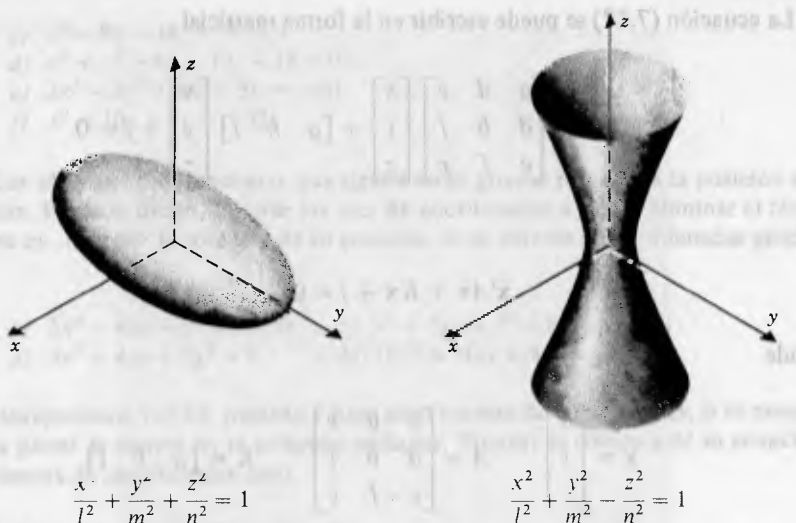
$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz$$

La matriz de esta forma cuadrática es

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 & -4 \\ \frac{3}{2} & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Las gráficas de las ecuaciones cuadráticas en  $x, y$  y  $z$  se llaman *cuádricas* o *superficies cuádricas*. A continuación se dan algunos ejemplos de cuádricas y sus ecuaciones.

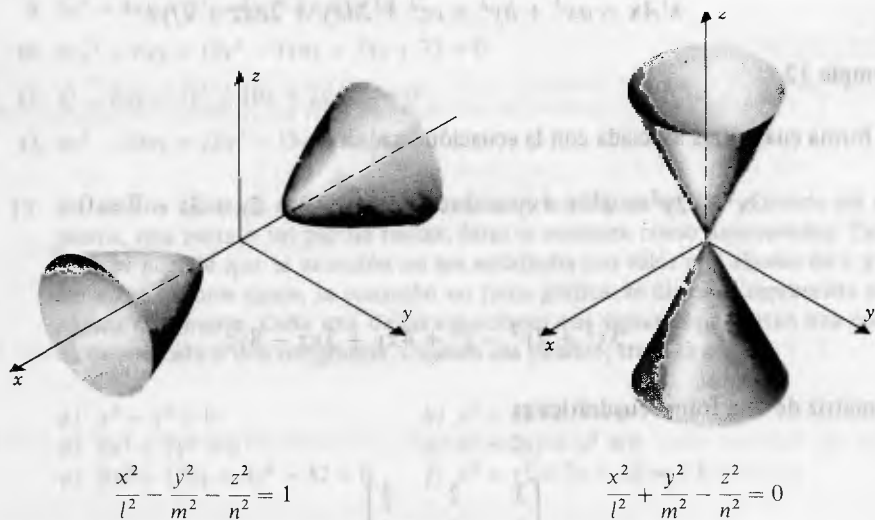
Cuando la ecuación de una cuádrlica tiene una de las formas que se muestran en la figura 7.9, se dice que se encuentra en la *posición estándar*, con relación a los ejes de coordenadas. La presencia de uno o más de los términos de productos cruzados  $xy, xz$  y  $yz$  en la ecuación de una cuádrlica no degenerada indica que ésta se encuentra girada respecto a la posición estándar; la presencia de los términos en  $x^2$  y  $x, y^2$  y  $y$  o  $z^2$  y  $z$ , al mismo tiempo, en una cuádrlica sin término con producto cruzado indica que la misma está trasladada respecto a la posición estándar.



Elipsoide

Hiperboloide de un manto

Figura 7.9a



Hiperboloide de dos mantos

Cono elíptico

Figura 7.9 b

**Ejemplo 13**

Describese la superficie cuádrica cuya ecuación es

$$4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$$

**Solución.** Al reacomodar los términos da

$$4(x^2 - 4x) + 36(y^2 - 6y) - 9z^2 = -304$$

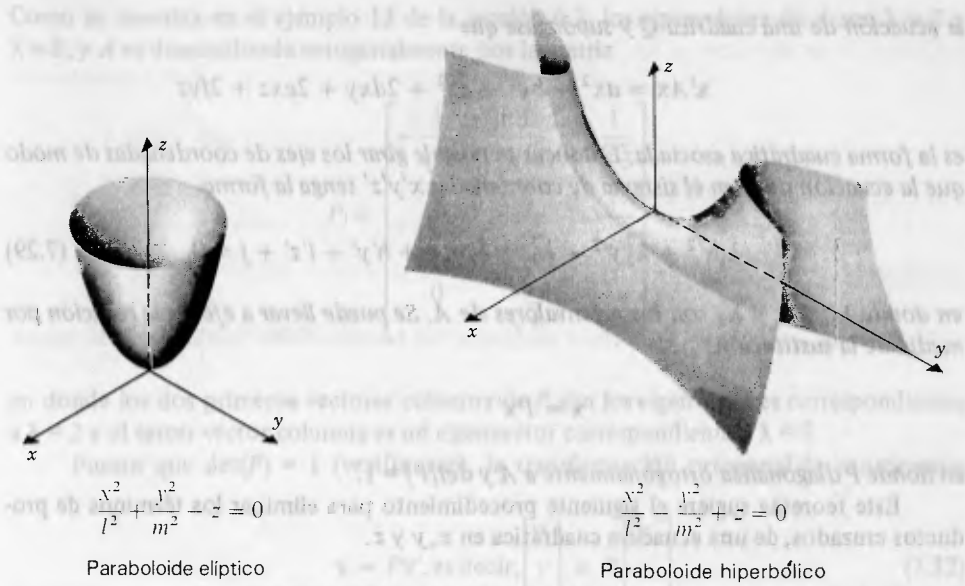


Figura 7.9c

Completando los cuadrados se obtiene

$$4(x^2 - 4x + 4) + 36(y^2 - 6y + 9) - 9z^2 = -304 + 16 + 324$$

$$4(x - 2)^2 + 36(y - 3)^2 - 9z^2 = 36$$

o bien,

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + (y - 3)^2 - \frac{z^2}{4} = 1$$

Al trasladar los ejes por medio de las ecuaciones

$$x' = x - 2 \quad y' = y - 3 \quad z' = z$$

se llega a

$$\frac{x'^2}{9} + y'^2 - \frac{z'^2}{4} = 1$$

que es la ecuación de un hiperboloide de un manto.

El resultado que sigue indica que siempre es posible eliminar los términos de productos cruzados, de la ecuación de una cuádrica, girando los ejes de coordenadas.

**Teorema 10. (Teorema de los ejes principales para  $R^3$ .)** Sea

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad (7.28)$$



la ecuación de una cuádrica  $Q$  y supóngase que

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

es la forma cuadrática asociada. Entonces es posible girar los ejes de coordenadas de modo que la ecuación de  $Q$  en el sistema de coordenadas  $x'y'z'$  tenga la forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0 \quad (7.29)$$

en donde  $\lambda_1, \lambda_2, y \lambda_3$  son los eigenvalores de  $A$ . Se puede llevar a efecto la rotación por medio de la sustitución

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

en donde  $P$  diagonaliza ortogonalmente a  $A$  y  $\det(P) = 1$ .

Este teorema sugiere el siguiente procedimiento para eliminar los términos de productos cruzados, de una ecuación cuadrática en  $x, y$  y  $z$ .

**Paso 1.** Se encuentra una matriz  $P$  que diagonalice ortogonalmente a  $A$ .

**Paso 2.** Si es necesario, se intercambian dos de las columnas de  $P$  para hacer que  $\det(P) = 1$ . Esto asegura que la transformación ortogonal de coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

es una rotación.

**Paso 3.** Se sustituye (7.30) en (7.29).

La demostración de que la nueva ecuación tiene la forma dada en (7.29) es semejante a la que se dio en la sección anterior; se deja como ejercicio.

#### Ejemplo 14

Describese la superficie cuádrica cuya ecuación es

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$$

**Solución.** La forma matricial de la ecuación cuadrática anterior es

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} - 3 = 0 \quad (7.31)$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Como se muestra en el ejemplo 13 de la sección 6.3, los eigenvalores de  $A$  son  $\lambda = 2$  y  $\lambda = 8$ , y  $A$  es diagonalizada ortogonalmente por la matriz

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

en donde los dos primeros vectores columna de  $P$  son los eigenvectores correspondientes a  $\lambda = 2$  y el tercer vector columna es un eigenvector correspondiente a  $\lambda = 8$ .

Puesto que  $\det(P) = 1$  (verifíquese), la transformación ortogonal de coordenadas

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}', \text{ es decir, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \tag{7.32}$$

es una rotación.

Al sustituir (7.32) en (7.31) se obtiene

$$(P\mathbf{x}')^T A (P\mathbf{x}') - 3 = 0$$

o, de manera equivalente,

$$(\mathbf{x}')^T (P^T A P) \mathbf{x}' - 3 = 0 \tag{7.33}$$

Ya que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

(7.33) queda

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 3 = 0$$

o bien,

$$2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 = 3$$

Esto se puede reescribir como

$$\frac{x'^2}{3/2} + \frac{y'^2}{3/2} + \frac{z'^2}{3/8} = 1$$

que es la ecuación de un elipsoide.

## EJERCICIOS 7.4

1. Halle las formas cuadráticas asociadas con las ecuaciones cuadráticas que siguen.

- $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz + 7x + 2z = 3$
- $3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz - 3x = 4$
- $xy + xz + yz = 1$
- $x^2 + y^2 - z^2 = 7$
- $3z^2 + 3xz - 14y + 9 = 0$
- $2z^2 + 2xz + y^2 + 2x - y + 3z = 0$

2. Encuentre las matrices de las formas cuadráticas que se dan en el ejercicio 1.

3. Expresé cada una de las ecuaciones cuadráticas dadas en el ejercicio 1, en la forma matricial  $\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{x} + f = 0$ .

4. Nombre las cuádricas siguientes.

- $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 36 = 0$
- $2x^2 + 6y^2 - 3z^2 = 18$
- $6x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 6 = 0$
- $9x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$
- $16x^2 + y^2 = 16z$
- $7x^2 - 3y^2 + z = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

5. En cada inciso, determine las ecuaciones de traslación que llevarán a la cuádrica a la posición estándar. Nombre la cuádrica.

- $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z + 153 = 0$
- $6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 12x - 18y - 8z = -7$
- $3x^2 - 3y^2 - z^2 + 42x + 144 = 0$
- $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 54y - 50z = 544$
- $x^2 + 16y^2 + 2x - 32y - 16z - 15 = 0$
- $7x^2 - 3y^2 + 126x + 72y + z + 135 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$

6. En cada inciso, halle una rotación  $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}'$  que elimine los términos de productos cruzados. Nombre la cuádrica y dé su ecuación en el sistema  $x'y'z'$ .

- $2x^2 + 3y^2 + 23z^2 + 72xz + 150 = 0$
- $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 5 = 0$
- $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$
- $2xy + z = 0$

En los ejercicios 7 al 10 traslade y haga girar los ejes de coordenadas para llevar la cuádrica a la posición estándar. Nombre la cuádrica y dé su ecuación en el sistema de coordenadas final.

8

7.  $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = -9$

8.  $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$

9.  $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$

10.  $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z = 0$

11. Pruebe el teorema 10.

6.1 ELIMINACION GAUSSIANA CON CONDENSACION PIVOTAL

En esta sección se analizan algunos aspectos prácticos de la resolución de sistemas de n ecuaciones lineales en n incógnitas. En la práctica, los sistemas de ecuaciones lineales a menudo se resuelven en computadoras digitales. Dado que las computadoras tienen un límite en el número de cifras decimales que pueden llevar, redondean, o truncan, la mayoría de las cantidades numéricas. Por ejemplo, una computadora diseñada para almacenar ocho cifras decimales podría registrar 2/3 como .66666667 (redondeado), o bien, 66666666 (truncado). En cualquiera de los dos casos, se introduce un error al que se denominará error por redondeo.

Las consideraciones prácticas principales al resolver sistemas de ecuaciones lineales en computadoras digitales son:

- 1. Minimizar las pérdidas de exactitud debidas a los errores por redondeo.
- 2. Minimizar el tiempo de computación (y, por tanto, el costo) necesario para obtener la solución.

Excepto cuando la matriz de coeficientes tiene una estructura especializada (por ejemplo, un número grande de zeros), la eliminación gaussiana por lo general es el mejor método para resolver el sistema. En esta sección se presenta una variación de la eliminación gaussiana, desarrollada con el fin de minimizar el efecto del error por redondeo.

La mayor parte de la aritmética para computadoras se lleva a cabo utilizando números normalizados de punto flotante. Esto significa que los números se expresan en la forma\*

$\pm M \times 10^k$  (R.1)

en donde k es un entero y M es una fracción que satisfice

$|M| \leq 1$

La fracción M se llama mantisa.

\*La mayoría de las computadoras convierten números decimales (base 10) a números binarios (base 2). Sin embargo, a fin de simplificar sólo se presenta en términos de decimales.



# 8

## Introducción a los métodos numéricos del álgebra lineal

### 8.1 ELIMINACION GAUSSIANA CON CONDENSACION PIVOTAL

En esta sección se analizan algunos aspectos prácticos de la resolución de sistemas de  $n$  ecuaciones lineales en  $n$  incógnitas. En la práctica, los sistemas de ecuaciones lineales a menudo se resuelven en computadoras digitales. Dado que las computadoras tienen un límite en el número de cifras decimales que pueden llevar, redondean, o truncan, la mayoría de las cantidades numéricas. Por ejemplo, una computadora diseñada para almacenar ocho cifras decimales podría registrar  $2/3$  como .66666667 (redondeado), o bien, 66666666 (truncado). En cualquiera de los dos casos, se introduce un error al que se denominará *error por redondeo*.

Las consideraciones prácticas principales al resolver sistemas de ecuaciones lineales en computadoras digitales son:

1. Minimizar las faltas de exactitud debidas a los errores por redondeo.
2. Minimizar el tiempo de computadora (y, por tanto, el costo) necesario para obtener la solución.

Excepto cuando la matriz de coeficientes tiene una estructura especializada (por ejemplo, un número grande de ceros), la eliminación gaussiana por lo general es el mejor método para resolver el sistema. En esta sección se presenta una variación de la eliminación gaussiana, desarrollada con el fin de minimizar el efecto del error por redondeo.

La mayor parte de la aritmética para computadoras se lleva a cabo utilizando *números normalizados de punto flotante*. Esto significa que los números se expresan en la forma\*

$$\pm M \times 10^k \quad (8.1)$$

en donde  $k$  es un entero y  $M$  es una fracción que satisface

$$.1 \leq M < 1$$

La fracción  $M$  se llama *mantisa*.

\*La mayoría de las computadoras convierten números decimales (base 10) a números binarios (base 2). Sin embargo, a fin de simplificar sólo se pensará en términos de decimales.

## Ejemplo 1

Los números que siguen están expresados en la forma normalizada de punto flotante.

$$73 = .73 \times 10^2$$

$$-.000152 = -.152 \times 10^{-3}$$

$$1,579 = .1579 \times 10^4$$

$$-1/4 = -.25 \times 10^0$$

El número de cifras decimales que se tengan en la mantisa y el tamaño admisible del exponente  $k$  que se tiene en (8.1) dependen de la computadora que se esté utilizando. Por ejemplo, la IBM 360 almacena el equivalente de siete dígitos decimales en la mantisa y permite variar  $10^k$  desde  $10^{-75}$  hasta  $10^{75}$ . Una computadora que utiliza  $n$  cifras decimales en la mantisa se dice que redondea los números hasta  $n$  *dígitos significativos*.

## Ejemplo 2

Los números que siguen están redondeados hasta tres dígitos significativos.

Número	Forma normalizada de punto flotante	Valor redondeado
7/3	$.233 \times 10^1$	2.33
1,758	$.176 \times 10^4$	1,760
.0000092143	$.921 \times 10^{-5}$	.00000921
-.12	$-.120 \times 10^0$	-.12
13.850	$.138 \times 10^2$	13.8
-.08495	$-.850 \times 10^{-1}$	-.085

(Si, como en los dos últimos casos, la porción de decimal que se va a descartar en el proceso de redondeo es exactamente la mitad de una unidad, se adoptará la convención de redondear de modo que el último dígito conservado sea par. En la práctica, el tratamiento de esta situación varía de computadora a computadora.)

Ahora se introducirá una variación de la eliminación gaussiana denominada *condensación pivotal* o *eliminación gaussiana con pivote*; este método está proyectado con el fin de minimizar el efecto acumulativo del error por redondeo al resolver  $n$  ecuaciones lineales en  $n$  incógnitas. Se supone que el sistema tiene una solución única. A medida que se describa cada paso, se ilustrará la idea utilizando la matriz aumentada para el sistema

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

$$6x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11$$

**Paso 1.** En la columna de la extrema izquierda, se encuentra un elemento que tenga el valor absoluto más grande. Este se conoce como *elemento pivote*.

Para llevar el elemento al primero y el segundo renglón

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ \textcircled{6} & 6 & 2 & 12 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Elemento pivote  $\nearrow$   
 $\nwarrow$  Columna de la extrema izquierda

**Paso 2.** Si es necesario, se efectúa un intercambio de renglones, para llevar el elemento pivote a la parte superior de la columna.

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Se intercambiaron el primero y segundo renglones de la matriz anterior.

**Paso 3.** Si el elemento pivote es  $a$ , se multiplica el renglón superior por  $1/a$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

El primer renglón de la matriz anterior se multiplicó por  $1/6$ .

**Paso 4.** Se suman múltiplos apropiados del renglón superior a los renglones de abajo, de modo que, en la columna localizada en el paso 1, todos los elementos que están por debajo del que se encuentra más arriba se conviertan en ceros.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Se sumó  $-3$  veces el primer renglón de la matriz anterior al segundo y tercer renglones.

**Paso 5.** Se cubre el renglón superior de la matriz y se empieza nuevamente con el paso 1, aplicado a la submatriz que se deje. Se continúa de esta manera hasta que la matriz *completa* quede en la forma escalonada en los renglones.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & \textcircled{-5} & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Elemento pivote  $\nearrow$   
 $\nwarrow$  Columna diferente de cero más a la izquierda en la submatriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Se intercambiaron el primero y segundo renglones de la submatriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

El primer renglón de la submatriz se multiplicó por  $-1/5$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

El primer renglón de la submatriz se sumó al segundo renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Se cubrió el primer renglón de la submatriz y se regresó una vez más al paso 1.

Elemento pivote

Columna de la extrema izquierda en la nueva submatriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El primer renglón de la nueva submatriz se multiplicó por  $-1/2$ .

Ahora la matriz completa se encuentra en la forma escalonada en los renglones.

**Paso 6.** Se resuelve el sistema de ecuaciones correspondiente por medio de sustitución regresiva.

El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= 2 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Por medio de una sustitución regresiva se llega a

$$x_3 = 3 \quad x_2 = -1 \quad x_1 = 2$$

Puesto que los cálculos anteriores son exactos, este ejemplo no ilustra la efectividad de la condensación pivotal en la reducción del error por redondeo; el ejemplo que se da a continuación sí lo hace.

### Ejemplo 3

Resuélvase el sistema siguiente por eliminación gaussiana con pivote. Después de cada cálculo, redondéese el resultado hasta tres dígitos significativos.

$$\begin{aligned} .00044x_1 + .0003x_2 - .0001x_3 &= .00046 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 1.5 \\ 3x_1 - 9.2x_2 - .5x_3 &= -8.2 \end{aligned} \quad (8.2)$$

*Solución* (con pivote). La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} .00044 & .0003 & -.0001 & .00046 \\ 4 & 1 & 1 & 1.5 \\ 3 & -9.2 & -.5 & -8.2 \end{bmatrix}$$



Para llevar el elemento pivote a la parte superior de la primera columna, se intercambian el primero y el segundo renglones; esto da

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1.5 \\ .00044 & .0003 & -.0001 & .00046 \\ 3 & -9.2 & -.5 & -8.2 \end{bmatrix}$$

Al dividir cada elemento del primer renglón entre 4 da

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ .00044 & .0003 & -.0001 & .00046 \\ 3 & -9.2 & -.5 & -8.2 \end{bmatrix}$$

Sumando  $-.00044$  veces el primer renglón al segundo y  $-3$  veces el primero al tercero se obtiene (después de redondear hasta tres dígitos significativos),

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & .000190 & -.00021 & .000295 \\ 0 & -9.95 & -1.25 & -9.32 \end{bmatrix}$$

Intercambiando el segundo y tercer renglones se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & -9.95 & -1.25 & -9.32 \\ 0 & .000190 & -.00021 & .000295 \end{bmatrix}$$

Dividiendo cada elemento del segundo renglón entre  $-9.95$  se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & 1 & .126 & .937 \\ 0 & .000190 & -.00021 & .000295 \end{bmatrix}$$

Al sumar  $-.000190$  veces el segundo renglón al tercero da

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & 1 & .126 & .937 \\ 0 & 0 & -.000234 & .000117 \end{bmatrix}$$

Al dividir cada elemento del tercer renglón entre  $-.000234$  se llega a la forma escalonada en los renglones

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & 1 & .126 & .937 \\ 0 & 0 & 1 & -.5 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned}x_1 + .25x_2 + .25x_3 &= .375 \\x_2 + .126x_3 &= .937 \\x_3 &= -.5\end{aligned}$$

Resolviendo por sustitución regresiva se obtiene (hasta tres dígitos significativos)

$$x_1 = .250 \quad x_2 = 1.00 \quad x_3 = -.500 \quad (8.3)$$

Si (8.2) se resuelve por eliminación gaussiana *sin* pivote, y cada cálculo se redondea hasta tres dígitos significativos, se obtiene (se omiten los detalles)

$$x_1 = .245 \quad x_2 = 1.01 \quad x_3 = -.492 \quad (8.4)$$

Al comparar (8.3) y (8.4) con la solución exacta

$$x_1 = \frac{1}{4} \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -\frac{1}{2}$$

se ve que el uso del pivote proporciona resultados más exactos.

A pesar del hecho de que la condensación pivotal puede reducir el efecto acumulado del error por redondeo, existen ciertos sistemas de ecuaciones, denominados sistemas *mal condicionados*, que son tan extremadamente sensibles que incluso los errores más ligeros en los coeficientes pueden conducir a inexactitudes importantes en la solución. Por ejemplo, considérese el sistema

$$\begin{aligned}x_1 + \quad x_2 &= -3 \\x_1 + 1.016x_2 &= 5\end{aligned} \quad (8.5)$$

Si se supone que se va a resolver este sistema en una computadora que redondea hasta tres dígitos significativos la computadora almacena este sistema como

$$\begin{aligned}x_1 + \quad x_2 &= -3 \\x_1 + 1.02x_2 &= 5\end{aligned} \quad (8.6)$$

La solución exacta para (8.5) es  $x_1 = -503$ ,  $x_2 = 500$ , y la solución exacta para (8.6) es  $x_1 = -403$ ,  $x_2 = 400$ . Por tanto, un error por redondeo de sólo .004 en uno de los coeficientes de (8.5) conduce a un error importante en la solución.

Muy poco se puede hacer, desde el punto de vista de la computación, para evitar los errores grandes en las soluciones de los sistemas lineales mal condicionados. Sin embargo, en los problemas físicos, en donde se presentan los sistemas mal condicionados, a veces es posible volver a plantear el problema que da lugar al sistema, a fin de evitar la situación de mal condicionado. En algunos de los textos que se mencionan al final de este capítulo se explica cómo reconocer los sistemas mal condicionados.

## EJERCICIOS 8.1

1. Expresé lo siguiente en la forma normalizada con punto flotante.



Se supondrá que los elementos de la diagonal  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , son diferentes de cero y que el sistema tiene exactamente una solución.

El primer método que se analiza se conoce como *iteración de Jacobi* o *método de los desplazamientos simultáneos*. Para empezar, escríbase nuevamente el sistema (8.7), despejando  $x_1$  en la primera ecuación, en términos de las incógnitas restantes; despejando  $x_2$  en la segunda ecuación, en términos de las incógnitas restantes; despejando  $x_3$  en la tercera ecuación, en términos de las incógnitas restantes, etc. Esto conduce a

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} 20x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - 10x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 &= 18 \end{aligned} \quad (8.9)$$

se reescribiría

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{17}{20} - \frac{1}{20}x_2 + \frac{1}{20}x_3 \\ x_2 &= -\frac{13}{10} + \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{10}x_3 \\ x_3 &= \frac{18}{10} + \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}x_2 \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} x_1 &= .850 - .05x_2 + .05x_3 \\ x_2 &= -1.3 + .1x_1 + .1x_3 \\ x_3 &= 1.8 + .1x_1 - .1x_2 \end{aligned} \quad (8.10)$$

Si se conoce una aproximación para la solución de (8.7) y se sustituyen estos valores aproximados en el segundo miembro de (8.8), a menudo resulta que los valores de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que se obtienen en el primer miembro forman incluso una mejor aproximación para la solución. Esta observación es la clave para el método de Jacobi.

Para resolver el sistema (8.7) por el método de iteración de Jacobi, se hace una aproximación inicial para la solución. Cuando no se disponga de una mejor elección, se usa  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, \dots$ .

Se sustituye esta aproximación inicial en el segundo miembro de (8.8) y se utilizan los valores de  $x_1, x_2, \dots$  que se obtienen en el primer miembro, como nueva aproximación para la solución.



	Aproximación inicial	Primera aproximación	Segunda aproximación	Tercera aproximación	Cuarta aproximación	Quinta aproximación	Sexta aproximación
$x_1$	0	.850	1.005	1.0025	1.0001	.99997	1.0000
$x_2$	0	-1.3	-1.035	- .9980	- .99935	- .99999	-1.0000
$x_3$	0	1.8	2.015	2.004	2.0000	1.9999	2.0000

Figura 8.1

Por ejemplo, para resolver (8.9) por el método de Jacobi, se sustituiría la aproximación inicial  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$  en el segundo miembro de (8.10) y se calcularía la nueva aproximación

$$x_1 = .850 \quad x_2 = -1.3 \quad x_3 = 1.8 \tag{8.11}$$

A fin de mejorar la aproximación, se repetiría el proceso de sustitución. Por ejemplo, en la resolución de (8.9), se sustituiría la aproximación (8.11) en el segundo miembro de (8.10), para obtener la siguiente aproximación

$$\begin{aligned} x_1 &= .850 - .05(-1.3) + .05(1.8) = 1.005 \\ x_2 &= -1.3 + .1(.850) + .1(1.8) = -1.035 \\ x_3 &= 1.8 + .1(.850) - .1(-1.3) = 2.015 \end{aligned}$$

De esta manera, se puede generar una sucesión de aproximaciones la cual, en ciertas condiciones, se aproximará más y más a la solución exacta del sistema. En la figura 8.1 se han resumido los resultados obtenidos al resolver el sistema (8.9), por medio de la iteración de Jacobi. Todos los cálculos se redondearon hasta cinco dígitos significativos. Al final de seis sustituciones (denominadas *iteraciones*), se conoce con exactitud la solución exacta  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$ , hasta cinco dígitos significativos.

A continuación se analiza una pequeña modificación del método de Jacobi, que con frecuencia reduce el número de iteraciones necesarias para obtener un grado de exactitud dado. La técnica se llama *iteración de Gauss-Seidel*, o bien, método de los *desplazamientos sucesivos*.

En cada iteración del método de Jacobi, la nueva aproximación se obtiene al sustituir la aproximación anterior en el segundo miembro de (8.8) y despejar los nuevos valores de  $x_1, x_2, \dots$ . No todos estos nuevos valores de las  $x$  se calculan simultáneamente; primero se tiene  $x_1$  a partir de la ecuación superior, entonces se obtiene  $x_2$  a partir de la segunda ecuación, a continuación  $x_3$ , etc. Puesto que en general los nuevos valores de las  $x$  están más próximos a la solución exacta, esto sugiere que se podría obtener una mejor exactitud utilizando los nuevos valores de las  $x$  tan pronto como se conozcan. Como ilustración, considérese el sistema (8.9). En la primera iteración del método de Jacobi, la aproximación inicial  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$  se sustituyó en cada ecuación del segundo miembro de (8.10), para obtener la nueva aproximación

$$x_1 = .850 \quad x_2 = -1.3 \quad x_3 = 1.8 \tag{8.12}$$

En la primera iteración del método de Gauss-Seidel, la nueva aproximación se calcularía como sigue. Se sustituye la aproximación inicial  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  en el segundo miembro de la primera ecuación dada en (8.10). Esto conduce a la nueva estimación  $x_1 = .850$

Se utiliza este nuevo valor de  $x_1$  inmediatamente, realizando la sustitución

$$x_1 = .850 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0$$

en el segundo miembro de la segunda ecuación dada en (8.10). Esto conduce a la nueva estimación  $x_2 = -1.215$ .

Se usa este nuevo valor de  $x_2$  inmediatamente, sustituyendo

$$x_1 = .850 \quad x_2 = -1.215 \quad x_3 = 0$$

en el miembro de la tercera ecuación dada en (8.10). Esto produce la nueva estimación  $x_3 = 2.0065$ .

Por tanto, al final de la primera iteración del método de Gauss-Seidel, la nueva aproximación es

$$x_1 = .850 \quad x_2 = -1.215 \quad x_3 = 2.0065 \quad (8.13)$$

Los cálculos para la segunda iteración se llevarían a cabo como sigue.

Sustituyendo (8.13) en el segundo miembro de la primera ecuación dada en (8.10), y redondeando hasta cinco dígitos significativos, da

$$x_1 = .850 - .05(-1.215) + .05(2.0065) = 1.0111$$

Al sustituir

$$x_1 = 1.0111 \quad x_2 = -1.215 \quad x_3 = 2.0065$$

en el segundo miembro de la ecuación dada en (8.10), y redondeando hasta cinco dígitos significativos, se obtiene

$$x_2 = -1.3 + .1(1.0111) + .1(2.0065) = -.99824$$

Sustituyendo

$$x_1 = 1.0111 \quad x_2 = -.99824 \quad x_3 = 2.0065$$

en el segundo miembro de la tercera ecuación dada en (8.10), y redondeando hasta cinco dígitos significativos, se llega a

$$x_3 = 1.8 + .1(1.0111) - .1(-.99824) = 2.0009$$

Así entonces, al final de la segunda iteración del método de Gauss-Seidel, la nueva aproximación es

$$x_1 = 1.0111 \quad x_2 = -.99824 \quad x_3 = 2.0009$$

	Aproximación inicial	Primera aproximación	Segunda aproximación	Tercera aproximación	Cuarta aproximación
$x_1$	0	.850	1.0111	.99995	1.0000
$x_2$	0	-1.215	-.99824	-.99992	-1.0000
$x_3$	0	2.0065	2.0009	2.0000	2.0000

Figura 8.2

En la figura 8.2 se han resumido los resultados que se obtuvieron al aplicar cuatro iteraciones del método de Gauss-Seidel para resolver (8.9). Todos los números se redondearon hasta cinco dígitos significativos.

Si se comparan las tablas de las figuras 8.1 y 8.2, se ve que el método de Gauss-Seidel produce la solución de (8.9) (exacta hasta cinco dígitos significativos) en cuatro iteraciones, en tanto que se necesitaron seis iteraciones para alcanzar la misma exactitud con el método de Jacobi. Sin embargo, no debe concluirse, por los resultados de este ejemplo que el método de Gauss-Seidel es siempre mejor que el de Jacobi. Aun cuando puede parecer sorprendente, hay ejemplos en los que el método de Jacobi es mejor que el de Gauss-Seidel.

Los métodos de Gauss-Seidel y de Jacobi no siempre funcionan. En algunos casos, uno, o los dos métodos, pueden ser ineficaces para producir una buena aproximación para la solución, sin importar el número de iteraciones que se efectúen. En tales casos, se dice que las aproximaciones *divergen*. Si al llevar a cabo un número suficiente de iteraciones, se puede obtener la solución hasta cualquier grado de exactitud que se desee, se dice que las aproximaciones *convergen*.

Se concluye esta sección con el análisis de una condición, la cual asegurará que las aproximaciones generadas por los dos métodos convergen.

Se dice que una matriz cuadrada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es *estrictamente dominante en la diagonal*, si el valor absoluto de cada elemento en la diagonal es mayor que la suma de los valores absolutos de los elementos restantes en el mismo renglón; es decir,

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|$$

$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + |a_{2n}|$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$|a_{nn}| > |a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{n-1}|$$

## Ejemplo 4

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -6 \\ 5 & 12 & -4 \end{bmatrix}$$

no es estrictamente dominante en la diagonal ya que, en el segundo renglón,  $|1|$  no es mayor que  $|4| + |-6|$ , y en el tercer renglón,  $|-4|$  no es mayor que  $|5| + |12|$ .

Sin embargo, si se intercambian el segundo y tercer renglones, la matriz resultante

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 5 & 12 & -4 \\ 4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

es estrictamente dominante en la diagonal, puesto que

$$|7| > |-2| + |3|$$

$$|12| > |5| + |-4|$$

$$|-6| > |4| + |1|$$

Se puede demostrar que si  $A$  es estrictamente dominante en la diagonal, entonces tanto la aproximación de Gauss-Seidel como la de Jacobi, para las soluciones de  $Ax = b$ , convergen.

## EJERCICIOS 8.2

En los ejercicios 1 al 4, resuelva los sistemas por la iteración de Jacobi. Inicie con  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ . Use cuatro iteraciones y redondee los cálculos hasta tres dígitos significativos. Compare los resultados con las soluciones exactas.

1.  $2x_1 + x_2 = 7$

$x_1 - 2x_2 = 1$

2.  $3x_1 - x_2 = 5$

$2x_1 + 3x_2 = -4$

3.  $5x_1 - 2x_2 = -13$

$x_1 + 7x_2 = -10$

4.  $4x_1 + .1x_2 = .2$

$.3x_1 + .7x_2 = 1.4$

En los ejercicios 5 al 8, resuelva los sistemas por medio de la iteración de Gauss-Seidel. Inicie con  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ . Use tres iteraciones y redondee los cálculos hasta tres dígitos significativos. Compare los resultados con las soluciones exactas.

5. Resuelva el sistema del ejercicio 1.

6. Resuelva el sistema del ejercicio 2.

7. Resuelva el sistema del ejercicio 3.

8. Resuelva el sistema del ejercicio 4.



En los ejercicios 9 al 10, resuelva los sistemas por medio de la iteración de Jacobi. Inicie con  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ . Use tres iteraciones y redondee los cálculos hasta tres dígitos significativos. Compare los resultados con las soluciones exactas.

9.  $10x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$       10.  $20x_1 - x_2 + x_3 = 20$   
 $x_1 + 10x_2 - x_3 = \frac{3}{2}$        $2x_1 + 10x_2 - x_3 = 11$   
 $2x_1 + x_2 + 10x_3 = -9$        $x_1 + x_2 - 20x_3 = -18$

En los ejercicios 11 al 12, resuelva los sistemas por medio de la iteración de Jacobi. Inicie con  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ . Use tres iteraciones y redondee los cálculos hasta tres dígitos significativos. Compare los resultados con las soluciones exactas.

11. Resuelva el sistema del ejercicio 9.
12. Resuelva el sistema del ejercicio 10.
13. ¿Cuáles de las siguientes matrices son estrictamente dominantes en la diagonal?

(a)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$       (b)  $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$       (d)  $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -7 \end{bmatrix}$       (e)  $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

14. Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

- a) Demuestre que las aproximaciones obtenidas por medio de la iteración de Jacobi divergen.
- b) ¿Es la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

estrictamente dominante en la diagonal?

15. Demuestre que si uno o más de los elementos en la diagonal  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  que se dan en (8.7) es cero, entonces es posible intercambiar las ecuaciones y volver a nombrar las incógnitas, de modo que los elementos en la diagonal del sistema resultante no sean todos ceros.

### 8.3 APROXIMACION DE LOS EIGENVALORES POR EL METODO DE LAS POTENCIAS

Se pueden encontrar los eigenvalores de una matriz al resolver su ecuación característica. En los problemas prácticos, este método no es eficaz. Es más, en muchos problemas físicos sólo se necesita el eigenvalor con el valor absoluto máximo. En esta sección se analiza

un método para obtener una aproximación de este eigenvalor y un eigenvector correspondiente. En la sección que sigue, se analiza la aproximación de los eigenvalores y eigenvectores restantes.

**Definición.** Se dice que un eigenvalor de una matriz  $A$  es el *eigenvalor dominante* de  $A$ , si su valor absoluto es mayor que los valores absolutos de los eigenvalores restantes. Un eigenvector que corresponda al eigenvalor dominante se denomina *eigenvector dominante* de  $A$ .

### Ejemplo 5

Si una matriz  $A$  de  $4 \times 4$  tiene los eigenvalores

$$\lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = -2 \quad \lambda_4 = 2$$

entonces  $\lambda_1 = -4$  es el eigenvalor dominante puesto que

$$|-4| > |3| \quad |-4| > |-2| \quad \text{y} \quad |-4| > |2|$$

### Ejemplo 6

Una matriz  $A$  de  $3 \times 3$  con los eigenvalores

$$\lambda_1 = 7 \quad \lambda_2 = -7 \quad \lambda_3 = 2$$

no tiene eigenvalor dominante.

Sea  $A$  una matriz diagonalizable de  $n \times n$ , con un eigenvalor dominante. Al final de esta sección se demuestra que si  $\mathbf{x}_0$  es un vector arbitrario diferente de cero en  $R^n$ , entonces el vector

$$A^p \mathbf{x}_0 \quad (8.14)$$

por lo común es una buena aproximación para un eigenvector dominante de  $A$ , cuando el exponente  $p$  es grande. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

### Ejemplo 7

Como se mostró en el ejemplo 2 del capítulo 6, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene los eigenvalores  $\lambda_1 = 2$  y  $\lambda_2 = 1$ .

El eigenespacio correspondiente al eigenvalor dominante  $\lambda_1 = 2$  es el espacio de soluciones del sistema

$$(2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver este sistema se obtiene  $x_1 = -2t$ ,  $x_2 = t$ . Por tanto, los eigenvectores correspondientes a  $\lambda_1 = 2$  son los vectores diferentes de cero de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

A continuación se ilustra un procedimiento para utilizar (8.14) a fin de estimar un eigenvector dominante de  $A$ . Para empezar, se selecciona arbitrariamente

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar repetidamente  $\mathbf{x}_0$  por  $A$  se obtiene

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2\mathbf{x}_0 = A(A\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 2.6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3\mathbf{x}_0 = A(A^2\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -13 \end{bmatrix} \approx 13 \begin{bmatrix} 2.23 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4\mathbf{x}_0 = A(A^3\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ -29 \end{bmatrix} \approx 29 \begin{bmatrix} 2.10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^5\mathbf{x}_0 = A(A^4\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61 \\ -29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ -61 \end{bmatrix} \approx 61 \begin{bmatrix} 2.05 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^6\mathbf{x}_0 = A(A^5\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 125 \\ -61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 253 \\ -125 \end{bmatrix} \approx 125 \begin{bmatrix} 2.02 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^7\mathbf{x}_0 = A(A^6\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 253 \\ -125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 509 \\ -253 \end{bmatrix} \approx 253 \begin{bmatrix} 2.01 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A partir de estos cálculos es evidente que los productos se están aproximando cada vez más a múltiplos escalares de

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

que es el eigenvector dominante de  $A$  obtenido al hacer  $t = -1$  en (8.15). Dado que un múltiplo escalar de un eigenvector dominante también es un eigenvector dominante, los

cálculos anteriores están produciendo aproximaciones cada vez mejores para un eigenvector dominante de  $A$ .

En seguida se muestra en qué forma obtener una aproximación del eigenvector dominante, una vez que se conoce una aproximación de un eigenvector dominante. Sea  $\lambda$  un eigenvalor de  $A$  y  $\mathbf{x}$  un eigenvector correspondiente. Si  $\langle, \rangle$  denota el producto euclidiano interior, entonces

$$\frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \lambda$$

Por tanto, si  $\tilde{\mathbf{x}}$  es una aproximación para un eigenvector dominante, se puede obtener una aproximación del eigenvalor dominante por medio de

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}, A\tilde{\mathbf{x}} \rangle}{\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle} \quad (8.16)$$

La razón que se da en (8.16) se conoce como *cociente de Rayleigh*.\*

### Ejemplo 8

En el ejemplo 7 se obtuvo

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 509 \\ -253 \end{bmatrix}$$

como aproximación para un eigenvector dominante. Por tanto,

$$A\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 509 \\ -253 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1021 \\ -509 \end{bmatrix}$$

Al sustituir en (8.16), se obtiene

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}, A\tilde{\mathbf{x}} \rangle}{\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle} = \frac{(509)(1021) + (-253)(-509)}{(509)(509) + (-253)(-253)} \approx 2.007$$

la cual es una aproximación relativamente buena para el eigenvalor dominante  $\lambda_1 = 2$ .

La técnica que se ilustró en los ejemplos 7 y 8 para obtener aproximaciones de los eigenvectores y eigenvalores dominantes con frecuencia se denomina *método de las potencias* o *método de las iteraciones*.

Como se ilustró en el ejemplo 7, a menudo el método de las potencias genera vectores que tienen componentes inconvenientemente grandes. Para remediar este problema, se acostumbra "reducir" el eigenvector aproximado, en cada paso, de modo que sus com-

\*John William Strutt Rayleigh (1842–1919) – Físico británico. Rayleigh recibió el Premio Nobel en Física en el año de 1904 por su participación en el descubrimiento del argón, en 1894. Su investigación abarcó casi todo el campo de la Física, incluyendo sonido, teoría ondulatoria, óptica, visión del color, electrodinámica, electromagnetismo, dispersión de la luz, viscosidad y fotografía.



ponentes se encuentren entre +1 y -1. Es posible lograr esto, multiplicando el eigenvector aproximado por el recíproco de la componente que tenga el valor absoluto más grande. Como ilustración, en el primer paso del ejemplo 7, la aproximación al eigenvector dominante es

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La componente con el mayor valor absoluto es 5; por tanto el eigenvector reducido es

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -.2 \end{bmatrix}$$

A continuación se resumen los pasos del *método de las potencias con reducción a escala*.

**Paso 0.** Se selecciona un vector arbitrario diferente de cero,  $\mathbf{x}_0$ .

**Paso 1.** Se calcula  $A\mathbf{x}_0$  y reduce a fin de obtener la primera aproximación para un eigenvector dominante. Se nombra como  $\mathbf{x}_1$ .

**Paso 2.** Se calcula  $A\mathbf{x}_1$  y se reduce para obtener la segunda aproximación,  $\mathbf{x}_2$ .

**Paso 3.** Se calcula  $A\mathbf{x}_2$  y se reduce para obtener la tercera aproximación,  $\mathbf{x}_3$ .

Continuando de esta manera, se obtiene una sucesión,  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ , de aproximaciones cada vez mejores para un eigenvector dominante.

### Ejemplo 9

Use el método de las potencias con reducción a escala para obtener una aproximación de un eigenvector dominante y el eigenvalor dominante de la matriz  $A$  que se da en el ejemplo 7.

*Solución.* Selecciónese arbitrariamente

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

como una aproximación inicial. Multiplicando  $\mathbf{x}_0$  por  $A$  y reduciendo a escala se obtiene

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -.2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando  $\mathbf{x}_1$  por  $A$  y reduciendo a escala da

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{2.6} \begin{bmatrix} 2.6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -.385 \end{bmatrix}$$

Por el cociente de Rayleigh, la primera estimación del eigenvalor dominante es

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_1 \rangle}{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle} = \frac{(1)(2.6) + (-.2)(-1)}{(1)(1) + (-.2)(-1)} = 2.692$$

Al multiplicar  $\mathbf{x}_2$  por  $A$  y reducir se obtiene

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -.385 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.23 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{2.23} \begin{bmatrix} 2.23 \\ -1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -.448 \end{bmatrix}$$

Por el cociente de Rayleigh, la segunda estimación del eigenvalor dominante es

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \mathbf{x}_2, A\mathbf{x}_2 \rangle}{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle} = \frac{(1)(2.23) + (-.385)(-1)}{(1)(1) + (-.385)(-1)} = 2.278$$

Si se multiplica  $\mathbf{x}_3$  por  $A$  y se reduce da

$$A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -.448 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.104 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = \frac{1}{2.104} \begin{bmatrix} 2.104 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -.475 \end{bmatrix}$$

La tercera estimación del eigenvalor dominante es

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \mathbf{x}_3, A\mathbf{x}_3 \rangle}{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 \rangle} = \frac{(1)(2.104) + (-.448)(-1)}{(1)(1) + (-.448)(-1)} = 2.125$$

Si se continúa de esta manera, se genera una sucesión de aproximaciones para un eigenvector dominante y el eigenvalor dominante.

Los valores que se calcularon anteriormente, junto con otros resultados de estimaciones posteriores se encuentran tabulados en la figura 8.3.

Paso /	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{x}_i$ = la aproximación reducida a escala hacia un eigenvalor dominante	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -.385 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -.488 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -.475 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -.488 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -.494 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -.497 \end{bmatrix}$
$A\mathbf{x}_i$	$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.6 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.23 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.104 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.050 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.024 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.012 \\ -1 \end{bmatrix}$	—
Aproximación a $\lambda_1$	—	2.692	2.278	2.125	2.060	2.029	2.014	—

Figura 8.3

No hay reglas eficaces y rápidas para determinar cuántos pasos deben usarse en el método de las potencias. Sólo se considerará un procedimiento posible que se usa con amplitud.

Si  $\tilde{q}$  denota una aproximación para una cantidad  $q$ , entonces el *error relativo* en la aproximación se define como

$$\left| \frac{q - \tilde{q}}{q} \right| \tag{8.17}$$

y el *error en porcentaje* en la aproximación se define como

$$\left| \frac{q - \tilde{q}}{q} \right| \times 100\%$$

**Ejemplo 10**

Si el valor exacto de cierto eigenvalor es  $\lambda = 5$ , y si  $\lambda = 5.1$  es una aproximación para  $\lambda$ , entonces el error relativo es

$$\left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{\lambda} \right| = \left| \frac{5 - 5.1}{5} \right| = |-.02| = .02$$

y el error en porcentaje es

$$(.02) \times 100\% = 2\%$$

En el método de las potencias, sería ideal poder decidir con anterioridad el error relativo  $E$  que se puede tolerar en el eigenvalor, y, entonces, detener los cálculos una vez que el error relativo sea menor que  $E$ . Por tanto, si  $\tilde{\lambda}(i)$  denota la aproximación para el eigenvalor dominante  $\lambda_1$ , en el  $i$ -ésimo paso, los cálculos se suspenderían una vez que se satisfaga la condición

$$\left| \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}(i)}{\lambda_1} \right| < E$$

Desafortunadamente, no es posible llevar a la práctica esta idea, ya que se desconoce el valor exacto  $\lambda_1$ . Para remediarlo, es usual estimar  $\lambda_1$  por medio de  $\tilde{\lambda}(i)$  y detener los cálculos en el  $i$ -ésimo paso, si

$$\left| \frac{\tilde{\lambda}(i) - \tilde{\lambda}(i-1)}{\tilde{\lambda}(i)} \right| < E \tag{8.18}$$

La cantidad que se encuentra en el primer miembro de (8.18) se conoce como *error relativo estimado*. Si se multiplica por 100%, se le denomina *error en porcentaje estimado*.

**Ejemplo 11**

En el ejemplo 9, ¿cuántos pasos se deben utilizar para estar seguros de que el error en porcentaje estimado, en el eigenvalor dominante, es menor que el 2% ?

*Solución.* Denótese por  $\tilde{\lambda}(i)$  la aproximación para el eigenvalor dominante en el  $i$ -ésimo paso. Por tanto, por lo que se expresa en la figura 8.3,

$$\tilde{\lambda}(1) = 2.692, \quad \tilde{\lambda}(2) = 2.278, \quad \tilde{\lambda}(3) = 2.125, \text{ etc.}$$

Por lo que se expresa en (8.18), el error relativo estimado después de dos pasos es

$$(7.18) \quad \left| \frac{\tilde{\lambda}(2) - \tilde{\lambda}(1)}{\tilde{\lambda}(2)} \right| = \left| \frac{2.278 - 2.692}{2.278} \right| \approx |-.182| = .182$$

Por consiguiente, el error en porcentaje estimado, después de dos pasos, es 18.2%. El error relativo estimado después de tres pasos es

$$\left| \frac{\tilde{\lambda}(3) - \tilde{\lambda}(2)}{\tilde{\lambda}(3)} \right| = \left| \frac{2.125 - 2.278}{2.125} \right| \approx |-.072| = .072$$

y el error en porcentaje estimado es 7.2%. En la tabla de la figura 8.4 se listan los errores en porcentajes restantes. En esta tabla se ve que el error en porcentaje estimado es menor que el 2% al final del quinto paso.

## OPCIONAL

Esta sección concluye con una demostración de que el método de las potencias funciona, cuando  $A$  es una matriz diagonalizable, con un eigenvalor dominante.

Sea  $A$  una matriz diagonalizable de  $n \times n$ . Por el teorema 2 de la sección 6.2,  $A$  tiene  $n$  eigenvectores linealmente independientes,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ . Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  los eigenvalores correspondientes, y supóngase que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (8.19)$$

$i$ = número del paso	2	3	4	5	6
$\tilde{\lambda}(i)$	2.278	2.125	2.060	2.029	2.014
Error relativo estimado después de $i$ pasos	.182	.072	.032	.015	.007
Error porcentual estimado después de $i$ pasos	18.2%	7.2%	3.2%	1.5%	.7%

Figura 8.4



Por el teorema 9(a) de la sección 4.5, los eigenvectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  forman una base para  $R^n$ ; por tanto, se puede expresar un vector arbitrario  $\mathbf{x}_0$  en  $R^n$ , en la forma:

$$\mathbf{x}_0 = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n \tag{8.20}$$

Al multiplicar, desde la izquierda, los dos miembros por  $A$  da

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_0 &= A(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n) \\ &= k_1(A\mathbf{v}_1) + k_2(A\mathbf{v}_2) + \dots + k_n(A\mathbf{v}_n) \\ &= k_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\lambda_n\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Si se multiplica una vez más por  $A$  da

$$\begin{aligned} A^2\mathbf{x}_0 &= A(k_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\lambda_n\mathbf{v}_n) \\ &= k_1\lambda_1(A\mathbf{v}_1) + k_2\lambda_2(A\mathbf{v}_2) + \dots + k_n\lambda_n(A\mathbf{v}_n) \\ &= k_1\lambda_1^2\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2^2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\lambda_n^2\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Continuando, después de  $p$  multiplicaciones por  $A$ , se obtendría

$$A^p\mathbf{x}_0 = k_1\lambda_1^p\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2^p\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\lambda_n^p\mathbf{v}_n \tag{8.21}$$

Puesto que  $\lambda_1 \neq 0$  (véase 8.19), (8.21) se puede reescribir como

$$A^p\mathbf{x}_0 = \lambda_1^p \left( k_1\mathbf{v}_1 + k_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p \mathbf{v}_2 + \dots + k_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p \mathbf{v}_n \right) \tag{8.22}$$

De (8.19) se deduce que

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

son todos menores que uno en valor absoluto; por tanto,  $(\lambda_2/\lambda_1)^p, \dots, (\lambda_n/\lambda_1)^p$  se aproximan paulatinamente a cero, a medida que  $p$  crece y, por (8.22), la aproximación

$$A^p\mathbf{x}_0 \approx \lambda_1^p k_1 \mathbf{v}_1 \tag{8.23}$$

se hace cada vez mejor.

Si  $k_1 \neq 0$ ,\* entonces  $\lambda_1^p k_1 \mathbf{v}_1$  es un múltiplo escalar diferente de cero del eigenvector dominante  $\mathbf{v}_1$ ; por tanto,  $\lambda_1^p k_1 \mathbf{v}_1$  también es un eigenvector dominante. Por tanto, por (8.23),  $A^p\mathbf{x}_0$  se convierte cada vez en una estimación mejor de un eigenvector dominante, conforme  $p$  crece.

\*Por lo común no es posible decir por la simple observación de  $\mathbf{x}_0$  si  $k_1 \neq 0$ . Si, por accidente,  $k_1 = 0$ , el método de las potencias todavía funciona en los problemas prácticos, ya que generalmente los errores por redondeo en las computadoras tienden a hacer que  $k_1$  sea pequeño, pero diferente de cero. Curiosamente, este es uno de los casos en el que los errores ayudan a obtener resultados correctos.

## EJERCICIOS 8.3

1. Halle el eigenvalor dominante (si existe).

(a)  $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 1 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Use el método de las potencias con reducción a escala para obtener una aproximación del eigenvalor dominante de  $A$ . Parta de

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Redondee todos los cálculos hasta tres dígitos significativos y suspenda después de tres iteraciones (es decir, tres multiplicaciones por  $A$ ).

b) Use el resultado del inciso (a) y el cociente de Rayleigh para obtener una aproximación del eigenvalor dominante de  $A$ .

c) Encuentre los valores exactos del eigenvalor y eigenvalor dominantes.

d) Halle el error en porcentaje en la aproximación del eigenvalor dominante.

En los ejercicios 3 al 4 siga las instrucciones que se dieron en el ejercicio 2.

3.  $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

4.  $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

5. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 17 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Aplique el método de las potencias con reducción a escala a fin de obtener una aproximación del eigenvalor dominante y un eigenvalor dominante de  $A$ . Parta de

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Redondee todos los cálculos hasta tres dígitos significativos y suspenda cuando el error en porcentaje estimado, en el eigenvalor dominante, sea menor del 2%.

b) Encuentre los valores exactos del eigenvalor y eigenvalor dominantes.

6. Repita las instrucciones del ejercicio 5 con

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

7. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

a) Aplique el método de las potencias con reducción a escala para obtener una aproximación de un eigenvector de  $A$ . Parta de

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Redondee todos los cálculos hasta tres dígitos significativos y suspenda después de tres iteraciones.

b) Use el resultado del inciso (a) y el cociente de Rayleigh a fin de obtener una aproximación del eigenvalor dominante de  $A$ .

c) Encuentre los valores exactos para el eigenvalor y eigenvector dominantes.

d) Halle el error en porcentaje en la aproximación del eigenvalor dominante.

### 8.4 APROXIMACION DE LOS EIGENVALORES NO DOMINANTES POR DEFLACION

En esta sección se bosqueja con brevedad un método para obtener los eigenvectores y eigenvalores no dominantes de una matriz *simétrica*.

Se necesita el teorema siguiente, el cual se enuncia sin demostración.\*

**Teorema 1.** *Sea  $A$  una matriz simétrica de  $n \times n$ , con eigenvalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Si  $v_1$  es un eigenvector correspondiente a  $\lambda_1$  y  $\|v_1\| = 1$ , entonces:*

a) *La matriz  $B = A - \lambda_1 v_1 v_1^T$  tiene los eigenvalores  $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .*

b) *Si  $v$  es un eigenvector de  $B$  correspondiente a uno de los eigenvalores  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ , entonces  $v$  también es un eigenvector de  $A$  correspondiente a este eigenvalor.*

(En el teorema 1 se está suponiendo que  $v_1$  se expresa como una matriz de  $n \times 1$ ; así entonces,  $v_1 v_1^T$  es una matriz de  $n \times n$ .)

#### Ejemplo 12

En el ejemplo 5 de la sección 6.1 se demostró que

\*Los lectores interesados en la demostración de este teorema pueden consultar la bibliografía que aparece al final de esta sección.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

tiene los eigenvalores  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $\lambda_3 = 1$  y que

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es un eigenvector correspondiente a  $\lambda_1 = 5$ . Al normalizar  $\mathbf{v}$  se obtiene

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es un eigenvector de norma 1, correspondiente a  $\lambda_1 = 5$ .

Por el teorema 1, la matriz

$$\begin{aligned} B &= A - \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

debe tener los eigenvalores  $\lambda = 0, 5$  y  $1$ . Como comprobación, la ecuación característica de  $B$  es

$$\det(\lambda I - B) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0$$

De donde, los eigenvalores de  $B$  son  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 5$ ,  $\lambda = 1$ , como lo predice el teorema 1.

El eigensubespacio de  $B$  correspondiente a  $\lambda = 5$  es el espacio de soluciones del sistema

$$(5I - B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$



es decir,

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver este sistema da  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = t$ . Por tanto, los eigenvectores de  $B$  correspondientes a  $\lambda = 5$  son los vectores diferentes de cero de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

Como lo predice el inciso (b) del teorema 1, éstos también son eigenvectores de  $A$  correspondientes a  $\lambda = 5$ , ya que

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5t \end{bmatrix}$$

es decir,

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

De modo análogo, los eigenvectores de  $B$  correspondientes a  $\lambda = 1$  también son eigenvectores de  $A$  correspondientes a  $\lambda = 1$ .

El teorema 1, hasta cierto punto, hace posible determinar los eigenvalores y eigenvectores no dominantes de una matriz *simétrica*  $A$  de  $n \times n$ . Para ver cómo, supóngase que se pueden ordenar los eigenvalores de  $A$ , de acuerdo con la magnitud de sus valores absolutos, como sigue:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \tag{8.24}$$

Además supóngase que se han obtenido el eigenvalor dominante y el eigenvector dominante de  $A$ , por el método de las potencias. Al normalizar el eigenvector dominante, se puede obtener un eigenvector dominante  $\mathbf{v}_1$  que tenga norma uno. Por el teorema 1, los eigenvalores de  $B = A - \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^t$  serán  $0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ . Por (8.24), estos eigenvalores quedan ordenados según sus valores absolutos, como sigue:

$$|\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0$$

Por tanto,  $\lambda_2$  es el eigenvalor dominante de  $B$ . Ahora, aplicando el método de las potencias a  $B$ , se puede encontrar una aproximación para el eigenvalor  $\lambda_2$  y un eigenvector correspondiente. Esta técnica para obtener aproximaciones para el eigenvalor con el segundo valor absoluto más grande se conoce como *deflación*.

Por desgracia, existen limitaciones prácticas del método de deflación. Puesto que  $\lambda_1$  y  $\mathbf{v}_1$  sólo se obtienen en forma aproximada por el método de las potencias, se introduce un error en  $B$  al aplicar la deflación. Si se aplica una vez más el proceso de deflación, la matriz siguiente tiene errores adicionales introducidos a través de la aproximación de  $\lambda_2$  y  $\mathbf{v}_2$ . Conforme se continúa el proceso, esta composición de los errores finalmente destruye la exactitud de los resultados. En la práctica, en general se debe evitar encontrar más de dos o tres eigenvalores por deflación.

Cuando la razón  $|\lambda_2/\lambda_1|$  está cercana a uno, el método de las potencias converge con lentitud; es decir, se necesitan muchos pasos para obtener un grado razonable de exactitud. Los lectores interesados en estudiar técnicas para "acelerar" esta rapidez de convergencia y aprender más acerca de los métodos numéricos del álgebra lineal, quizás deseen consultar los siguientes textos:

*Analysis of Numerical Methods*, E. Isaacson y H. B. Keller, John Wiley and Sons, Nueva York, 1966.

*Applied Linear Algebra*, B. Noble, Prentice-Hall, Inc., 1969.

*Computational Methods of Linear Algebra*, V. N. Faddeeva, Dover, 1959.

En las bibliografías adicionales de estos textos se encuentran más referencias.

#### EJERCICIOS 8.4

1. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- a) Aplique el método de las potencias con reducción a escala para obtener una aproximación de un eigenvector dominante. Parta de

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Redondee todos los cálculos hasta tres dígitos significativos y suspenda después de tres iteraciones (es decir, tres multiplicaciones por  $A$ ).

- b) Use el resultado del inciso (a) y el cociente de Rayleigh para obtener una aproximación del eigenvalor dominante de  $A$ .
- c) Aplique la deflación para obtener una aproximación del eigenvalor restante y el eigenvector correspondiente; esto es, aplique el método de las potencias a

$$B = A - \tilde{\lambda}_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 \tilde{\mathbf{v}}_1'$$

en donde  $\tilde{\mathbf{v}}_1$  y  $\tilde{\lambda}_1$  son las aproximaciones obtenidas en los incisos (a) y (b). Parta de

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Redondee todos los cálculos hasta tres dígitos significativos y suspéndase después de tres iteraciones.

d) Halle los valores exactos de los eigenvalores y eigenvectores.

2. Siga las instrucciones dadas en el ejercicio 1 con

*Respuestas a los ejercicios*

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS 1.1 (página 26)

1. b, c, f

2. a)  $x = ct + \frac{1}{2}t^2 = t$

b)  $x_1 = -2t + \frac{1}{2}t^2 + 4, x_2 = 4, x_3 = t$

c)  $x_1 = 3t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}, x_2 = t, x_3 = 3, x_4 = t$

d)  $t = 3q - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}s + 2r, u = q, x = r, z = 6, w = t$

3. a)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. a)  $\begin{matrix} x_1 & = & x_1 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_2 + 2x_3 & = & 4 \end{matrix}$

b)  $\begin{matrix} x_3 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_1 - x_2 & = & 1 \end{matrix}$

c)  $\begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 1 \end{matrix}$

d)  $\begin{matrix} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 3 \\ x_4 & = & 0 \end{matrix}$

5.  $k = 6$ , una infinidad de soluciones

$k \neq 6$ , ninguna solución

6. a) Las rectas no tienen punto común de intersección.

b) Las rectas se intersecan exactamente en un punto.

c) Las tres rectas coinciden.

Apéndice

# Respuestas a los ejercicios

## EJERCICIOS 1.1 (página 25)

1. b, d, f

2. a)  $x = \frac{7}{6}t + \frac{1}{2}, y = t$

b)  $x_1 = -2s + \frac{7}{3}t + 4, x_2 = s, x_3 = t$

c)  $x_1 = \frac{4}{3}r - \frac{7}{3}s + \frac{8}{3}t - \frac{5}{3}, x_2 = r, x_3 = s, x_4 = t$

d)  $v = \frac{1}{2}q - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}s + 2t, w = q, x = r, y = s, z = t$

3. a) 
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

c) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

d) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. a) 
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

b) 
$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

c) 
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

d) 
$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 4 \end{aligned}$$

5.  $k = 6$ , una infinidad de soluciones  
 $k \neq 6$ , ninguna solución

6. a) Las rectas no tienen punto común de intersección.  
 b) Las rectas se intersecan exactamente en un punto.  
 c) Las tres rectas coinciden.



## EJERCICIOS 1.2 (página 35)

1. *d, f*    2. *b, c, f*
3. *a)*  $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 2$     *b)*  $x_1 = 2 - 3t, x_2 = 4 + t, x_3 = 2 - t, x_4 = t$   
*c)*  $x_1 = -1 - 5s - 5t, x_2 = s, x_3 = 1 - 3t, x_4 = 2 - 4t, x_5 = t$     *d)* Inconsistente
4. *a)*  $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 2$     *b)*  $x_1 = 2 - 3t, x_2 = 4 + t, x_3 = 2 - t, x_4 = t$   
*c)*  $x_1 = -1 - 5s - 5t, x_2 = s, x_3 = 1 - 3t, x_4 = 2 - 4t, x_5 = t$     *d)* Inconsistente
5. *a)*  $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$     *b)*  $x_1 = -3t, x_2 = -4t, x_3 = 7t$   
*c)*  $x = s - 1, y = 2r, z = r, w = s$
7. *a)* Inconsistente    *b)*  $x_1 = -4, x_2 = 2, x_3 = 7$     *c)*  $x_1 = 3 + 2t, x_2 = t$
9. *a)*  $x_1 = 0, x_2 = -3t, x_3 = t$     *b)* Inconsistente
11. *a)*  $x_1 = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b, x_2 = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$   
*b)*  $x_1 = a - \frac{1}{3}c, x_2 = a - \frac{1}{2}b, x_3 = -a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$
12.  $a = 4$ , una infinidad;  $a = -4$ , ninguna;  $a \neq \pm 4$ , exactamente una.
14.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  son respuestas posibles.
15.  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \pi, \gamma = 0$ .

## EJERCICIOS 1.3 (página 41)

1. *a, c, d*    2.  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
3.  $x_1 - \frac{1}{4}s, x_2 = -\frac{1}{4}s - t, x_3 = s, x_4 = t$     4.  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$
5.  $x = \frac{t}{8}, y = \frac{5t}{16}, z = t$     6.  $\lambda = 4, \lambda = 2$
11. Una respuesta posible es  $x + y + z = 0$   
 $x + y + z = 1$

## EJERCICIOS 1.4 (página 48)

1. *a)* indefinida    *b)*  $4 \times 2$     *c)* indefinida  
*d)* indefinida    *e)*  $5 \times 5$     *f)*  $5 \times 2$
3.  $a = 5, b = -3, c = 4, d = 1$
4. *a)*  $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$     *b)*  $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$     *c)*  $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- d)*  $\begin{bmatrix} 9 & 8 & 19 \\ -2 & 0 & 0 \\ 32 & 9 & 25 \end{bmatrix}$     *e)*  $\begin{bmatrix} 14 & 36 & 25 \\ 4 & -1 & 7 \\ 12 & 26 & 21 \end{bmatrix}$     *f)*  $\begin{bmatrix} -28 & 7 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS 1.7 (página 73)

5. a) Indefinida    b)  $\begin{bmatrix} 42 & 108 & 75 \\ 12 & -3 & 21 \\ 36 & 78 & 63 \end{bmatrix}$     c)  $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$     e) Indefinida    f)  $\begin{bmatrix} 48 & 15 & 31 \\ 0 & 2 & 6 \\ 38 & 10 & 27 \end{bmatrix}$

6. a)  $[67 \ 41 \ 41]$     b)  $[63 \ 67 \ 57]$     c)  $\begin{bmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{bmatrix}$     e)  $[24 \ 56 \ 97]$     f)  $\begin{bmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{bmatrix}$

7. 182

EJERCICIOS 1.5 (página 57)

3.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$      $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$      $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

5. No    6.  $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$     7.  $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

8.  $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 26 & 27 \end{bmatrix}$      $A^{-3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{26}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$      $A^2 - 2A + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

9.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$     10.  $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

11. c)  $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$     12.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$

EJERCICIOS 2.7 (página 68)

17. OA y AO pueden no tener el mismo tamaño.    18.  $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS 1.6 (página 66)

1. a, b, d, f, g
2. a) Súmese  $-5$  veces el primer renglón al segundo.  
 b) Intercámbiense el primero y tercer renglones.  
 c) Multiplíquese el segundo renglón por  $\frac{1}{8}$ .

$$3. a) E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b) E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c) E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d) E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. No, puesto que no se puede obtener  $C$  efectuando sobre  $B$  una sola operación sobre los renglones.

$$5. a) \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad c) \text{ No inversible}$$

$$6. a) \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad b) \text{ No inversible} \quad c) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$7. a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad c) \text{ No inversible}$$

$$8. A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$9. a) E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad b) A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$11. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$13. a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ k^3 & -k^2 & k & 0 \\ -\frac{1}{k^4} & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$$

**EJERCICIOS 1.7 (página 73)**

1.  $x_1 = 41, x_2 = -17$     2.  $x_1 = \frac{46}{27}, x_2 = -\frac{13}{27}$     3.  $x_1 = -7, x_2 = 4, x_3 = -1$

4.  $x_1 = 1, x_2 = -11, x_3 = 16$     5.  $x = 1, y = 5, z = -1$

6.  $w = 1, x = -6, y = 10, z = -7$     7. a)  $x_1 = \frac{16}{3}, x_2 = -\frac{4}{3}, x_3 = -\frac{11}{3}$

b)  $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{10}{3}$

c)  $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -4$

d)  $x_1 = \frac{41}{42}, x_2 = -\frac{5}{6}, x_3 = \frac{25}{21}$

8. a)  $b_2 = 3b_1, b_3 = -2b_1$

b)  $b_3 = b_2 - b_1, b_4 = 2b_1 - b_2$

9. a)  $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$     b)  $X = \begin{bmatrix} 4t \\ 5t \\ 2 \\ t \end{bmatrix}$

**EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (Página 75)**

1.  $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$

2.  $x' = x \cos \theta + y \sin \theta, y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$

3. 3 monedas de un centavo, 4 de cinco centavos, 6 de diez centavos.

4.  $x = 4, y = z, z = 3$     5. Una infinidad si  $a = 2$  ó  $a = -\frac{3}{2}$ ; ninguna en caso contrario.

6. a)  $a \neq 0, b \neq 2$     b)  $a \neq 0, b = 2$     7.  $K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c)  $a = 0, b = 2$     d)  $a = 0, b \neq 2$

8.  $mpn$  multiplicaciones y  $mp(n-1)$  adiciones

10.  $a = 1, b = -2, c = 3$     11.  $a = 1, b = -4, c = -5$

**EJERCICIOS 2.1 (página 83)**

1. a) 5    b) 7    c) 10    d) 0    e) 4    f) 5

2. a) Par    b) Par    c) Impar    d) Impar    e) Impar    f) Par

3. 5    4. 0    5. 59    6.  $k^2 - 4k - 5$     7. 0    8. 425    9. 104

10.  $-k^4 - k^3 + 18k^2 + 9k - 21$     11. a)  $\lambda = 3, \lambda = 2$     b)  $\lambda = 2, \lambda = 6$

14. 275    15. a) 120    b) -120

**EJERCICIOS 2.2 (página 88)**

1. a) 6    b) -16    c) 0    d) 0    2. -21    3. -5    4. -7    5. 18

6. -21    7. 6    8.  $\frac{1}{6}$     9. -2    10. a) 5    b) 10    c) 5    d) 10

**EJERCICIOS 2.3 (página 96)**

1. a)  $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$     b)  $\begin{bmatrix} 6 & -8 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$     d)  $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$     c)  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$



4. a) Inversible      b) No inversible      5. a) 135      b)  $\frac{8}{5}$       c)  $\frac{1}{40}$       d) -5  
 c) No inversible      d) No inversible
6. Si  $x = 0$ , el primero y tercer renglones son proporcionales.  
 Si  $x = 2$ , el primero y segundo renglones son proporcionales.
8. a)  $k = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{17})$ ,  $k = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{17})$       (b)  $k = -1$

### EJERCICIOS 2.4 (página 107)

1. a)  $M_{11} = 29$ ,  $M_{12} = -11$ ,  $M_{13} = -19$ ,  $M_{21} = 21$ ,  $M_{22} = 13$ ,  $M_{23} = -19$   
 $M_{31} = 27$ ,  $M_{32} = -5$ ,  $M_{33} = 19$   
 b)  $C_{11} = 29$ ,  $C_{12} = 11$ ,  $C_{13} = -19$ ,  $C_{21} = -21$ ,  $C_{22} = 13$   
 $C_{23} = 19$ ,  $C_{31} = 27$ ,  $C_{32} = 5$ ,  $C_{33} = 19$
2. a)  $M_{13} = 36$ ,  $C_{13} = 36$       b)  $M_{23} = 24$ ,  $C_{23} = -24$   
 c)  $M_{22} = -48$ ,  $C_{22} = -48$       d)  $M_{21} = -108$ ,  $C_{21} = 108$
3. 152      4. a)  $\begin{bmatrix} 29 & -21 & 27 \\ 11 & 13 & 5 \\ -19 & 19 & 19 \end{bmatrix}$       b)  $(\frac{1}{152}) \begin{bmatrix} 29 & -21 & 27 \\ 11 & 13 & 5 \\ -19 & 19 & 19 \end{bmatrix}$
5. 48      6. -66      7. 0      8.  $k^3 - 8k^2 - 10k + 95$       9. -120      10. 0
11.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$       12.  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$
13.  $x = \frac{3}{11}$ ,  $y = \frac{2}{11}$ ,  $z = -\frac{1}{11}$       14.  $x = \frac{26}{21}$ ,  $y = \frac{25}{21}$ ,  $z = \frac{5}{7}$
15.  $x_1 = -\frac{30}{11}$ ,  $x_2 = -\frac{38}{11}$ ,  $x_3 = -\frac{40}{11}$       16.  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = -1$ ,  $x_4 = 8$
17. No se puede aplicar la regla de Cramer.      18.  $z = 2$

### EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (página 109)

1.  $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$ ,  $y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$       2.  $x' = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta$ ,  $y' = -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta$
5.  $\cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$ ,  $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$       10. b)  $\frac{19}{2}$

### EJERCICIOS 3.1 (página 121)

3. a)  $\overline{P_1P_2} = (-1, 3)$       b)  $\overline{P_1P_2} = (-7, 2)$   
 c)  $\overline{P_1P_2} = (2, -12, -11)$       d)  $\overline{P_1P_2} = (-8, 7, 4)$
4.  $\overline{PQ}$ , en donde  $Q = (9, 5, 1)$  es una respuesta posible.
5.  $\overline{PQ}$ , en donde  $P = (0, 4, -8)$  es una respuesta posible.
6. a)  $(-2, 0, 4)$       b)  $(23, -15, 4)$       7.  $x = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1)$   
 c)  $(-1, -5, 2)$       d)  $(-39, 69, -12)$   
 e)  $(-30, -7, 5)$       f)  $(0, -10, 0)$

8.  $c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = 3$     10.  $c_1 = -t, c_2 = -t, c_3 = t$  (en donde  $t$  es arbitraria)  
 11. a)  $(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$     b)  $(\frac{23}{4}, -\frac{9}{4}, \frac{1}{4})$     12. a)  $x' = 5, y' = 8$     b)  $x = -1, y = 3$

**EJERCICIOS 3.2 (página 125)**

1. a) 5    b)  $5\sqrt{2}$     c) 3    d)  $\sqrt{3}$     e)  $\sqrt{129}$     f) 9  
 2. a)  $\sqrt{13}$     b)  $2\sqrt{26}$     c)  $\sqrt{209}$     d)  $\sqrt{93}$   
 3. a)  $2\sqrt{3}$     b)  $\sqrt{14 + \sqrt{2}}$     c)  $4\sqrt{14}$     d)  $2\sqrt{37}$   
 e)  $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$     f) 1  
 4.  $k = \pm \frac{3}{\sqrt{21}}$     7.  $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$   
 8. Una esfera de radio 1 con centro en  $(x_0, y_0, z_0)$

**EJERCICIOS 3.3 (página 132)**

1. a) -10    b) -3    c) 0    d) -20  
 2. a)  $-\frac{1}{\sqrt{5}}$     b)  $-\frac{3}{\sqrt{58}}$     c) 0    d)  $-\frac{20}{3\sqrt{70}}$   
 3. a) obtuso    b) agudo    c) obtuso    d) ortogonales  
 4. a)  $(\frac{12}{13}, -\frac{8}{13})$     b) (0, 0)    c)  $(-\frac{80}{13}, 0, -\frac{16}{13})$     d)  $(\frac{32}{89}, \frac{12}{89}, \frac{16}{89})$   
 5. a)  $(\frac{14}{13}, \frac{21}{13})$     b) (2, 6)    c)  $(-\frac{11}{13}, 1, \frac{23}{13})$     d)  $(-\frac{32}{89}, -\frac{12}{89}, \frac{73}{89})$   
 7.  $\pm (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$     8. a) 6    b) 36    c)  $24\sqrt{5}$     d)  $24\sqrt{5}$   
 10.  $\cos \theta_1 = 0, \cos \theta_2 = \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}$     13.  $\theta = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{6}}$

14.  $\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

**EJERCICIOS 3.4 (página 141)**

1. a) -23, 7, -1    b) (-20, -67, -9)    c) (-78, -52, -26)  
 d) 0, -56, -392    e) (24, 0, -16)    f) (-12, -22, -8)  
 2. a) (12, 30, -6)    b) (-2, 0, 2)    3. a)  $\frac{1}{2}\sqrt{374}$     b)  $9\sqrt{13}$   
 7.  $x = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t, t)$ , en donde  $t$  es arbitraria.  
 9. 227    10. a)  $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$  y  $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$   
 (b) (-1, 0, 0)  
 c) (0, 0, -1)

## EJERCICIOS 3.5 (página 148)

1. a)  $(x - 2) + 4(y - 6) + 2(z - 1) = 0$   
 b)  $-(x + 1) + 7(y + 1) + 6(z - 2) = 0$   
 c)  $z = 0$   
 d)  $2x + 3y + 4z = 0$
2. a)  $x + 4y + 2z - 28 = 0$       b)  $-x + 7y + 6z - 6 = 0$   
 c)  $z = 0$       d)  $2x + 3y + 4z = 0$
3. a)  $(5, 0, 0)$  es un punto en el plano y  $\mathbf{n} = (2, -3, 7)$  es un vector normal, de modo que  $2(x - 5) - 3y + 7z = 0$  es una forma punto-normal; otros puntos y otras normales proporcionan otras respuestas correctas.  
 b)  $x + 3z = 0$  son respuestas posibles.
4. a)  $2y - z - 1 = 0$       b)  $x + 9y - 5z - 16 = 0$
5. a)  $x = 2 + t, y = 4 + 2t, z = 6 + 5t$   
 b)  $x = -3 + 5t, y = 2 - 7t, z = -4 - 3t$   
 c)  $x = 1, y = 1, z = 5 + t$   
 d)  $x = t, y = t, z = t$
6. a)  $x - 2 = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 6}{5}$       b)  $\frac{x + 3}{5} = \frac{y - 2}{-7} = \frac{z + 4}{-3}$
7. a)  $x = 6 + t, y = -1 + 3t, z = 5 - 9t$  or  $x = 7 + t, y = 2 + 3t, z = -4 - 9t$  son respuestas posibles.  
 b)  $x = -t, y = -t, z = -t$  or  $x = -1 - t, y = -1 - t, z = -1 - t$  es una respuesta posible.
8. a)  $x = -\frac{11}{7} + \frac{23}{7}t, y = -\frac{12}{7} - \frac{1}{7}t, z = t$       b)  $x = \frac{5}{3}t, y = t, z = 0$
9. a)  $x - 2y - 17 = 0, y + 2z - 5 = 0$       b)  $3x - 5y = 0, 2y - z = 0$
10. plano  $xy: z = 0$ ; plano  $xz: y = 0$ ; plano  $yz: x = 0$     12.  $(-\frac{222}{7}, -\frac{64}{7}, \frac{78}{7})$
13.  $5x - 2y + z - 30 = 0$     15.  $(-17, -1, 1)$     16.  $x - 4y + 4z + 9 = 0$

## EJERCICIOS 4.1 (página 156)

1. a)  $(-3, -4, -8, 4)$       b)  $(53, 34, 49, 20)$       c)  $(-1, 2, 7, -10)$   
 d)  $(-99, -84, -150, 30)$       e)  $(-63, -28, -21, -69)$       f)  $(2, 6, 15, -14)$
2.  $(-\frac{7}{6}, -1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{3})$     3.  $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 1$
5. a) 5      b)  $\sqrt{11}$       c)  $\sqrt{14}$       d)  $\sqrt{48}$
6. a)  $\sqrt{73}$       b)  $\sqrt{14} + 3\sqrt{7}$       c)  $4\sqrt{14}$       d)  $\sqrt{1801}$   
 e)  $(\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$       f) 1
8.  $k = \pm \frac{3}{\sqrt{14}}$
9. a) -1      b) -1      c) 0      d) 27

10. a)  $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$  y  $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$     11. a)  $\sqrt{10}$     b)  $3\sqrt{3}$     c)  $\sqrt{59}$     d) 10

**EJERCICIOS 4.2 (página 161)**

1. No es un espacio vectorial. No se cumple el axioma 8.
2. No es un espacio vectorial. No se cumple el axioma 10.
3. No es un espacio vectorial. No se cumplen los axiomas 9 y 10.
4. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.
5. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.
6. No es un espacio vectorial. No se cumplen los axiomas 5 y 6.
7. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.
8. No es un espacio vectorial. No se cumplen los axiomas 7 y 8.
9. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.
10. No es un espacio vectorial. No se cumplen los axiomas 1, 4, 5 y 6.
11. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.
12. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.
13. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.
14. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.

**EJERCICIOS 4.3 (página 170)**

1. a, c    2. b, c    3. a, b, d    4. b, d, e    5. a, b, d
6. a)  $(5, 9, 5) = 3\mathbf{u} - 4\mathbf{v} + \mathbf{w}$     b)  $(2, 0, 6) = 4\mathbf{u} - 2\mathbf{w}$   
c)  $(0, 0, 0) = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w}$     d)  $(2, 2, 3) = \frac{1}{2}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w}$
7. a)  $5 + 9x + 5x^2 = 3\mathbf{p}_1 - 4\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$   
(b)  $2 + 6x^2 = 4\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_3$   
c)  $0 = 0\mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2 + 0\mathbf{p}_3$   
d)  $2 + 2x + 3x^2 = \frac{1}{2}\mathbf{p}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{p}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{p}_3$
8. a, c, d    9. a) Los vectores lo generan    b) Los vectores no lo generan    10. a, c  
c) Los vectores no lo generan    d) Los vectores lo generan
11. Los polinomios no generan a  $P_2$     12. a, b, d    13.  $8x - 7y + z = 0$
14.  $x = 2t, y = 7t, z = -t$ , en donde  $-\infty < t < +\infty$



## EJERCICIOS 4.4 (página 176)

1. a)  $u_2$  es un múltiplo escalar de  $u_1$ .  
 b) Por el teorema 6, los vectores son linealmente dependientes.  
 c)  $p_2$  es un múltiplo escalar de  $p_1$ .  
 d)  $B$  es un múltiplo escalar de  $A$ .
2. a) independiente    b) independiente    c) independiente    d) dependiente
3. a) independiente    b) independiente    c) independiente    d) independiente
4. a) independiente    b) independiente    c) independiente    d) dependiente
5. a) dependiente    b) independiente    c) independiente    d) dependiente  
 e) dependiente    f) dependiente
6. a) No se encuentran en un plano.  
 b) Se encuentran en un plano.
7. a) No se encuentran en la misma recta.  
 b) No se encuentran en la misma recta.  
 c) Se encuentran sobre la misma recta.
8.  $\lambda = -\frac{1}{2}, \lambda = 1$

## EJERCICIOS 4.5 (página 184)

1. a) Una base para  $R^2$  tiene dos vectores.  
 b) Una base para  $R^3$  tiene tres vectores.  
 c) Una base para  $P_2$  tiene tres vectores.  
 d) Una base para  $M_{22}$  tiene cuatro vectores.
2. a, b    3. a, b    4. c, d
6. Dos cualesquiera de los vectores  $v_1, v_2, v_3$     7. Base:  $(1, 0, 1)$ ; dimensión = 1
8. Base:  $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$ ; dimensión = 2
9. Base:  $(4, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$ ; dimensión = 3
10. Base:  $(3, 1, 0), (-1, 0, 1)$ ; dimensión = 2    11. Ninguna base; dimensión = 0
12. Base:  $(4, -5, 1)$ ; dimensión = 1
13. a)  $(\frac{2}{3}, 1, 0), (-\frac{5}{3}, 0, 1)$     b)  $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$     c)  $(2, -1, 4)$     d)  $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$
14. a) 3-Tridimensional    b) 2-Bidimensional    c) 1-Unidimensional
15. 3-Tridimensional

## EJERCICIOS 4.6 (página 195)

1.  $r_1 = (2, -1, 0, 1)$   
 $r_2 = (3, 5, 7, -1)$   
 $r_3 = (1, 4, 2, 7)$

EJERCICIOS 4.10

$$c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad 2. \ a) (1, -3) \quad b) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c) 1$$

$$c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3. a)  $(1, 2, 0), (0, 0, 1)$  b)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  c) 2

4. a)  $(1, 0, 1, 2), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$  b)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  c) 3

5. a)  $(1, 0, 5, 2, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, -3, 0, 1)$  b)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  c) 3

6. a)  $(1, 1, -4, -3), (0, 1, -5, -2), (0, 0, 1, -\frac{1}{2})$   
 b)  $(1, -1, 2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -\frac{1}{6})$   
 c)  $(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)$

8. a)  $\{v_1, v_2, v_4\}$  b)  $v_3 = 2v_1 - v_2, v_5 = -v_1 + 3v_2 + 2v_4$

9. a)  $\{v_1, v_2\}$  b)  $v_3 = 2v_1 + v_2, v_4 = -2v_1 + v_2$

10. a) Primero y tercer renglones, o segundo y tercer renglones; cualquier par de columnas, excepto el par que consta de la primera y cuarta columnas.  
 b) Dos cualesquiera de los tres primeros renglones, junto con el último renglón; tres columnas cualesquiera.

11. a) 3 b) el mínimo de  $m$  y  $n$

12. a)  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

b)  $b$  no está en el espacio de columnas de  $A$  c)  $b = c_1 - c_2$

EJERCICIOS 4.7 (página 201)

1. a) -12 b) 0 c) 0 d) 120

2. a) -5 b) 0 c) 3 d) 52

3. a) 16 b) 56 4. a) -6

b) 0

6. a) No es un producto interior, no se cumple el axioma 4.

7. No. No se cumple el axioma 4.

b) No es un producto interior, no se cumplen los axiomas 2,3.

c)  $\langle u, v \rangle$  es un producto interior.

d) No es un producto interior, no se cumple el axioma 4.

$$16. a) -\frac{28}{15} \quad b) 0 \quad 17. a) 0 \quad b) 1 \quad c) -\frac{4}{\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$$

### EJERCICIOS 4.8 (página 208)

$$1. a) \sqrt{21} \quad b) \sqrt{206} \quad c) \sqrt{2} \quad d) 0$$

$$2. a) \sqrt{10} \quad b) \sqrt{85} \quad c) 1 \quad d) 0$$

$$3. a) \sqrt{6} \quad b) 5 \quad 4. a) \sqrt{90} \quad b) 0 \quad 5. a) \sqrt{45} \quad b) 0$$

$$6. a) \sqrt{18} \quad b) 0 \quad 7. \sqrt{18} \quad 8. a) \sqrt{98} \quad b) 0$$

$$9. a) \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad b) \frac{-3}{\sqrt{73}} \quad c) 0 \quad d) \frac{-20}{9\sqrt{10}} \quad e) \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad f) \frac{2}{\sqrt{55}}$$

$$10. a) 0 \quad b) 0 \quad 11. a) \frac{19}{10\sqrt{7}} \quad b) 0 \quad 12. a) k = -3 \quad b) k = -2, k = -3$$

$$14. a, b, c \quad 15. \pm \frac{1}{\sqrt{3249}} (-34, 44, -6, 11)$$

### EJERCICIOS 4.9 (página 220)

$$1. b \quad 2. b, d \quad 3. a \quad 4. a$$

$$7. a) \left( \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right), \left( \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \quad b) (1, 0), (0, -1)$$

$$8. a) \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$b) (1, 0, 0), \left( 0, \frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}} \right), \left( 0, \frac{30}{\sqrt{11925}}, \frac{105}{\sqrt{11925}} \right)$$

$$9. \left( 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right), \left( \frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, 0 \right),$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}} \right)$$

$$10. \left( 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \left( -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}} \right)$$

$$11. \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left( \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0 \right) \quad 12. \mathbf{w}_1 = \left( -\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5} \right), \mathbf{w}_2 = \left( \frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5} \right)$$

$$13. \mathbf{w}_1 = \left( \frac{39}{42}, \frac{93}{42}, \frac{120}{42} \right), \mathbf{w}_2 = \left( \frac{3}{42}, -\frac{9}{42}, \frac{6}{42} \right) \quad 14. \mathbf{w}_1 = \left( -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4} \right), \mathbf{w}_2 = \left( \frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{19}{4}, -\frac{9}{4} \right)$$

$$22. Q \left( -\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{25}{7} \right); \frac{3}{7}\sqrt{35} \quad 23. Q \left( -\frac{8}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{16}{7} \right)$$

**EJERCICIOS 4.10 (página 239)**

1. a)  $(\mathbf{w})_S = (3, -7)$ ,  $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$       b)  $(\mathbf{w})_S = (\frac{5}{28}, \frac{3}{14})$ ,  $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} \frac{5}{28} \\ \frac{3}{14} \end{bmatrix}$

c)  $(\mathbf{w})_S = (a, \frac{b-a}{2})$ ,  $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} a \\ \frac{b-a}{2} \end{bmatrix}$

2. a)  $(\mathbf{v})_S = (3, -2, 1)$ ,  $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$       b)  $(\mathbf{v})_S = (-2, 0, 1)$ ,  $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. a)  $(\mathbf{p})_S = (4, -3, 1)$ ,  $[\mathbf{p}]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$       b)  $(\mathbf{p})_S = (0, 2, -1)$ ,  $[\mathbf{p}]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

4.  $(A)_S = (-1, 1, -1, 3)$ ,  $[A]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

5. a)  $(\mathbf{w})_S = (-2\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ ,  $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$       b)  $(\mathbf{w})_S = (0, -2, 1)$ ,  $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. a)  $\mathbf{w} = (16, 10, 12)$       b)  $q = 3 + 4x^2$       c)  $B = \begin{bmatrix} 15 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

7. a)  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}$ ,  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{13}$ ,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3$

8. a)  $\begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$       b)  $\begin{bmatrix} -\frac{3}{11} \\ -\frac{13}{11} \end{bmatrix}$       d)  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

9. a)  $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$       b)  $\begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$       d)  $\begin{bmatrix} \frac{13}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$

10. a)  $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$       b)  $\begin{bmatrix} \frac{19}{12} \\ -\frac{43}{12} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$       11. a)  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{2} \\ -2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$       b)  $\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{23}{2} \\ 6 \end{bmatrix}$

12. a)  $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$       b)  $\begin{bmatrix} -\frac{11}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$       d)  $\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

13. b)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$       c)  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$       e)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

14. a)  $(4\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$       b)  $(-3.5\sqrt{2}, 1.5\sqrt{2})$

15. a)  $(-1 + 3\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$       b)  $(2.5 - \sqrt{3}, 2.5\sqrt{3} + 1)$

16. a)  $(5\sqrt{2}, 1.5\sqrt{2}, 5)$       b)  $(-2.5\sqrt{2}, 3.5\sqrt{2}, -3)$

17. a)  $(-.5 - 2.5\sqrt{3}, 2, 2.5 - .5\sqrt{3})$       b)  $(.5 - 1.5\sqrt{3}, 6, -1.5 - .5\sqrt{3})$

18. a)  $(-1, 1.5\sqrt{2}, -3.5\sqrt{2})$       b)  $(1, -1.5\sqrt{2}, 4.5\sqrt{2})$       19. a, b, d, e





**EJERCICIOS 5.1 (página 254)**

- |              |               |               |               |
|--------------|---------------|---------------|---------------|
| 1. Lineal    | 2. No lineal  | 3. Lineal     | 4. Lineal     |
| 5. No lineal | 6. Lineal     | 7. Lineal     | 8. No lineal  |
| 9. Lineal    | 10. Lineal    | 11. No lineal | 12. Lineal    |
| 13. Lineal   | 14. No lineal | 15. Lineal    | 16. No lineal |
| 17. Lineal   | 18. Lineal    | 19. Lineal    | 20. No lineal |

21.  $F(x, y) = (-x, y)$     23. a)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$     b)  $\begin{bmatrix} 42 \\ -55 \end{bmatrix}$     c)  $\begin{bmatrix} x + 3y + 4z \\ x - 7z \end{bmatrix}$

24. a)  $(2, 0, -1)$     b)  $T(x, y, z) = (x, 0, z)$

25. a)  $T(3, 8, 4) = (-2, 3, -1)$     b)  $T(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$

26. a)  $T(-1, 2) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ;  $T(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)$

b)  $T(-1, 2) = (1, -2)$ ;  $T(x, y) = (-x, -y)$

c)  $T(-1, 2) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$ ;

$$T(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$$

d)  $T(-1, 2) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$ ;

$$T(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$$

**EJERCICIOS 5.2 (página 262)**

1. a, c    2. a    3. a, b, c    4. a    5. b    6. a    7.  $\ker(T) = \{0\}$ ;  $R(T) = V$

8. Rango  $(T) = 1$ , nulidad  $(T) = 1$     9. Rango  $(T) = 3$ , nulidad  $(T) = 0$

10. a) Rango  $(T) = n$ , nulidad  $(T) = 0$     b) Rango  $(T) = 0$ , nulidad  $(T) = n$   
c) Rango  $(T) = n$ , nulidad  $(T) = 0$

11.  $T(x, y, z) = (30x - 10y - 3z, -9x + 3y + z)$ ,  $T(1, 1, 1) = (17, -5)$

12.  $T(2 - 2x + 3x^2) = 8 + 8x - 7x^2$

13. a) Nulidad  $(T) = 2$     b) Nulidad  $(T) = 4$     c) Nulidad  $(T) = 3$     d) Nulidad  $(T) = 1$

14. Nulidad  $(T) = 0$ , rango  $(T) = 6$

a) Dimensión = nulidad  $(T) = 3$

b) No. Para que  $Ax = b$  sea consistente para todo  $b$  en  $R^5$ , se debe tener  $R(T) = R^5$ . Pero  $R(T) \neq R^5$  puesto que rango  $(T) + \dim R(T) = 4$ .

16. a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$     b)  $\begin{bmatrix} -\frac{14}{11} \\ \frac{19}{11} \\ 1 \end{bmatrix}$     c) Rango  $(T) = 2$ , nulidad  $(T) = 1$

17. a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  c) Rango  $(T) = 1$ , nulidad  $(T) = 2$ .

18. a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  c) Rango  $(T) = 2$ , nulidad  $(T) = 2$ .

19. a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  c) Rango  $(T) = 3$ , nulidad  $(T) = 2$

22. a)  $14x - 8y - 5z = 0$  b)  $x = -t, y = -t, z = t, -\infty < t < +\infty$

26.  $\ker(D)$  consta de todos los polinomios constantes.

27.  $\ker(J)$  consta de todos los polinomios de la forma  $kx$ .

### EJERCICIOS 5.3 (página 280)

1. a)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  c)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  d)  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

2. a)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. a)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  d)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. a)  $(-1, -2)$  b)  $(-2, -1)$  c)  $(2, 0)$  d)  $(0, 1)$

8. a) Rectángulo con vértices en  $(0, 0), (1, 0), (1, -2), (0, -2)$

b) Rectángulo con vértices en  $(0, 0), (-1, 0), (-1, 2), (0, 2)$

c) Rectángulo con vértices en  $(0, 0), (-1, 0), (-1, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2})$

d) Cuadrado con vértices en  $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$

e) Paralelogramo con vértices en  $(0, 0), (1, 0), (7, 2), (6, 2)$

f) Paralelogramo con vértices en  $(0, 0), (1, -2), (0, 1), (1, -1)$

9. Rectángulo con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(-3, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-3, 1)$

10. a)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$     b)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$     c)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$     e)  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

11. a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$     b)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$     12. a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$     b)  $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. a) Dilatación en un factor de 3 en la dirección  $x$ .  
 b) Dilatación en un factor de  $-5$  en la dirección  $y$ .  
 c) Deslizamiento cortante en un factor de 4 en la dirección  $x$ .

14. a)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; dilatación en la dirección  $y$  en un factor de 3, a continuación una dilatación en la dirección  $x$  en un factor de 2.

b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; deslizamiento cortante en la dirección  $x$  en un factor de 4 y, a continuación, deslizamiento cortante en la dirección  $y$  en un factor de 2.

c)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ; dilatación en la dirección  $y$  en un factor de  $-2$ ,

en seguida una dilatación en la dirección  $x$  en un factor de 4 y, por último, una reflexión respecto a  $y = x$ .

d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; deslizamiento cortante en la dirección  $x$  con un factor de  $-3$ ; en seguida, dilatación en la dirección  $y$  con un factor de 18 y, por último deslizamiento cortante en la dirección  $y$  con un factor de 4.

15. a)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$     b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$     c)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

16. a)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$     b)  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -6\sqrt{3} + 3 & 6 + 3\sqrt{3} \end{bmatrix}$     18. a)  $16y - 11x - 3 = 0$

19. a)  $y = \frac{2}{3}x$     b)  $y = x$     c)  $y = \frac{1}{2}x$     d)  $y = -2x$

21.  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$     22. b) No;  $A$  no es inversible.



## EJERCICIOS 5.4 (página 289)

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad 2. a) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 14 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3. a) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad 4. a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad b) -3x^2 + 5x^3 - 2x^4$$

$$5. a) [T(\mathbf{v}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$b) T(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 29 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} \frac{19}{7} \\ -\frac{83}{7} \end{bmatrix}$$

$$6. a) [T(\mathbf{v}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_3)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_4)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b) T(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 22 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} -42 \\ 32 \\ -10 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} -56 \\ 87 \\ 17 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}_4) = \begin{bmatrix} -13 \\ 17 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} -31 \\ 37 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$7. a) [T(\mathbf{v}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_3)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$b) T(\mathbf{v}_1) = 16 + 51x + 19x^2, T(\mathbf{v}_2) = -6 - 5x + 5x^2, T(\mathbf{v}_3) = 7 + 40x + 15x^2$$

$$c) T(1 + x^2) = 22 + 56x + 14x^2$$

$$11. a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{23}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c) -6 + 48x$$

$$12. a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## EJERCICIOS 5.5 (página 296)

$$1. [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} & -\frac{56}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

$$2. [T]_B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{61}{10} \\ \frac{18}{5} & -\frac{19}{5} \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{155}{10} & \frac{9}{2} \\ -\frac{375}{10} & \frac{25}{2} \end{bmatrix}$$

$$3. [T]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 13 & -25 \\ 11\sqrt{2} & 11\sqrt{2} \\ 5 & 9 \\ 11\sqrt{2} & 11\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$4. [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$5. [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6. [T]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad 7. [T]_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (página 298)**

1. No;  $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + B \neq (A\mathbf{x}_1 + B) + (A\mathbf{x}_2 + B) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$  y, si  $c \neq 1$ , entonces  $T(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x} + B \neq c(A\mathbf{x} + B) = cT(\mathbf{x})$ .

2. b)  $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\operatorname{sen} n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

5. a)  $T(\mathbf{e}_3)$  y dos cualesquiera de  $T(\mathbf{e}_1)$ ,  $T(\mathbf{e}_2)$  y  $T(\mathbf{e}_3)$  forman bases para el recorrido;  $(-1, 1, 0, 1)$  es una base para el kernel.

b) Rango = 3, nulidad = 1

6. a) 2      b) 0      7. b)  $\left(\frac{3 + 5\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3} + 5}{4}\right)$

**EJERCICIOS 6.1 (página 307)**

1. a)  $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$       b)  $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$       c)  $\lambda^2 - 12 = 0$   
 d)  $\lambda^2 + 3 = 0$       e)  $\lambda^2 = 0$       f)  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

2. a)  $\lambda = 3, \lambda = -1$       b)  $\lambda = 4$       c)  $\lambda = \sqrt{12}, \lambda = -\sqrt{12}$   
 d) Ningún eigenvalor real      e)  $\lambda = 0$       f)  $\lambda = 1$

3. a) Base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 3$ :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = -1$ :  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 4$ :  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) Base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = \sqrt{12}$ :  $\begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{12} \\ 1 \end{bmatrix}$

base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = -\sqrt{12}$ :  $\begin{bmatrix} 3 \\ -\sqrt{12} \\ 1 \end{bmatrix}$

d) No hay eigenspacios.

e) Base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 0$ :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

f) Base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 1$ :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. a)  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

b)  $\lambda^3 - 2\lambda = 0$

c)  $\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 8 = 0$

d)  $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

e)  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$

f)  $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda + 36 = 0$

6. a)  $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$

b)  $\lambda = 0, \lambda = \sqrt{2}, \lambda = -\sqrt{2}$

c)  $\lambda = -8$

d)  $\lambda = 2$

e)  $\lambda = 2$

f)  $\lambda = -4, \lambda = 3$

7. a)  $\lambda = 1$ : base  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda = 2$ : base  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda = 3$ : base  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b)  $\lambda = 0$ : base  $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda = \sqrt{2}$ : base  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(15 + 5\sqrt{2}) \\ \frac{1}{2}(-1 + 2\sqrt{2}) \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -\sqrt{2}$ : base  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(15 - 5\sqrt{2}) \\ \frac{1}{2}(-1 - 2\sqrt{2}) \\ 1 \end{bmatrix}$

c)  $\lambda = -8$ : base  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$

(d)  $\lambda = 2$ : base  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

e)  $\lambda = 2$ : base  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

(f)  $\lambda = -4$ : base  $\begin{bmatrix} -2 \\ \frac{8}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda = 3$ : base  $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

8. a)  $(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$

b)  $(\lambda - 4)^2(\lambda^2 + 3) = 0$

9. a)  $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -1$

b)  $\lambda = 4$

10. a)  $\lambda = 1$ : base  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda = -2$ : base  $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda = -1$ : base  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- b)  $\lambda = 4$ : base  $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
11. a)  $\lambda = -4, \lambda = 3$   
 b) Base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = -4$ :  $-2 + \frac{8}{3}x + x^2$   
 base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 3$ :  $5 - 2x + x^2$
12. a)  $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -1$   
 b) Base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = 1$ :  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ; base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = -2$ :  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ; base para el eigenspacio correspondiente a  $\lambda = -1$ :  $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
18.  $1, -1, -2^9, 2^9$ .

**EJERCICIOS 6.2 (página 317)**

5.  $P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$      $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$     6.  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$      $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
7.  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$      $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
8.  $P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$      $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
9. No diagonalizable    10.  $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$      $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
11. No diagonalizable    12.  $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$      $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
13. No diagonalizable    14.  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$      $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
15.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$     16.  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$



$$17. \mathbf{p}_1 = \frac{1}{3} + x, \mathbf{p}_2 = x \quad 19. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{bmatrix}$$

### EJERCICIOS 6.3 (página 323)

1. a)  $\lambda = 0$ : unidimensional,  $\lambda = 2$ : unidimensional
- b)  $\lambda = 6$ : unidimensional,  $\lambda = -3$ : bidimensional
- c)  $\lambda = 3$ : unidimensional,  $\lambda = 0$ : bidimensional
- d)  $\lambda = 0$ : unidimensional,  $\lambda = 6$ : bidimensional
- e)  $\lambda = 0$ : tridimensional,  $\lambda = 8$ : unidimensional
- f)  $\lambda = -2$ : tridimensional,  $\lambda = 4$ : unidimensional

$$2. P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3. P = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$4. P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$$

$$5. P = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$$

$$6. \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$7. \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad 8. \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

**EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (página 324)**

1. b) La transformación hace girar los vectores hasta describir el ángulo  $\theta$ ; por lo tanto, si  $0 < \theta < \pi$ , entonces ningún vector diferente de cero se transforma en un vector con la misma dirección o la opuesta.

2.  $\lambda = k$  con multiplicidad 3. 3. c) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9.  $A^2 = \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ ,  $A^3 = \begin{bmatrix} 75 & 150 \\ 25 & 50 \end{bmatrix}$ ,  $A^4 = \begin{bmatrix} 375 & 750 \\ 125 & 250 \end{bmatrix}$ ,  $A^5 = \begin{bmatrix} 1875 & 3750 \\ 625 & 1250 \end{bmatrix}$

10.  $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \\ 6 & -15 & 10 \end{bmatrix}$ ,  $A^4 = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 6 \\ 6 & -15 & 10 \\ 10 & -24 & 15 \end{bmatrix}$  11. c) 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

**EJERCICIOS 7.1 (página 335)**

1. a)  $y_1 = c_1 e^{5x} - 2c_2 e^{-x}$       b)  $y_1 = 0$   
 $y_2 = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x}$        $y_2 = 0$

2. a)  $y_1 = c_1 e^{7x} - 3c_2 e^{-x}$       b)  $y_1 = -\frac{1}{40}e^{7x} + \frac{81}{40}e^{-x}$   
 $y_2 = 2c_1 e^{7x} + 2c_2 e^{-x}$        $y_2 = -\frac{1}{20}e^{7x} - \frac{27}{20}e^{-x}$

3. a)  $y_1 = -c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$       b)  $y_1 = e^{2x} - 2e^{3x}$   
 $y_2 = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - c_3 e^{3x}$        $y_2 = e^x - 2e^{2x} + 2e^{3x}$   
 $y_3 = 2c_2 e^{2x} - c_3 e^{3x}$        $y_3 = -2e^{2x} + 2e^{3x}$

4.  $y_1 = (c_1 + c_2)e^{2x} + c_3 e^t$   
 $y_2 = -c_2 e^{2x} + c_3 e^{8x}$   
 $y_3 = -c_1 e^{2x} + c_3 e^{8x}$

5.  $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$       6.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

**EJERCICIOS 7.2 (página 342)**

1. a)  $(1 + \pi) - 2 \sin x - \sin 2x$

b)  $(1 + \pi) - 2 \left[ \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin nx}{n} \right]$

2. a)  $\frac{4}{3}\pi^2 + 4 \cos x + \cos 2x + \frac{4}{3} \cos 3x - 4\pi \sin x - 2\pi \sin 2x - \frac{4\pi}{3} \sin 3x$

b)  $\frac{4}{3}\pi^2 + 4 \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{k^2} - 4\pi \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$

3. a)  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{e-1} e^x$       b)  $\frac{1}{12} - \frac{3-e}{2e-2}$

4. a)  $(4e - 10) + (18 - 6e)x$       b)  $\frac{(3 - e)(7e - 19)}{2}$       5. a)  $\frac{3}{\pi}x$       b)  $1 - \frac{6}{\pi^2}$

8.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \text{sen}(kx)$

### EJERCICIOS 7.3 (página 353)

1. a)  $2x^2 - 3xy + 4y^2$       b)  $x^2 - xy$       c)  $5xy$       d)  $4x^2 - 2y^2$       e)  $y^2$

2. a)  $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}$       b)  $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$       c)  $\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$       d)  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$       e)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. a)  $[x \ y] \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-7 \ 2] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 7 = 0$

b)  $[x \ y] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [5 \ 8] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 3 = 0$

c)  $[x \ y] \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 8 = 0$       d)  $[x \ y] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 7 = 0$

e)  $[x \ y] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [7 \ -8] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 5 = 0$

4. a) elipse      b) elipse      c) hipérbola      d) hipérbola  
e) círculo      f) parábola      g) parábola      h) parábola  
i) parábola      j) círculo

5. a)  $9x'^2 + 4y'^2 = 36$ , elipse      b)  $x'^2 - 16y'^2 = 16$ , hipérbola  
c)  $y'^2 = 8x'$ , parábola      d)  $x'^2 + y'^2 = 16$ , círculo  
e)  $18y'^2 - 12x'^2 = 419$ , hipérbola      f)  $y' = -\frac{1}{7}x'^2$ , parábola

6. a)  $3x'^2 - 2y'^2 + 8 = 0$ , hipérbola      b)  $2\sqrt{2}x'^2 - 7x' + 9y' = 0$ , parábola  
c)  $7x'^2 + 3y'^2 = 9$ , elipse      d)  $4x'^2 - y'^2 = 3$ , hipérbola

7.  $2x''^2 + y''^2 = 6$ , elipse

8.  $13y''^2 - 4x''^2 = 81$ , hipérbola

9.  $2x''^2 - 3y''^2 = 24$ , hipérbola

10.  $6x''^2 + 11y''^2 = 66$ , elipse

11.  $4y''^2 - x''^2 = 0$ , hipérbola

12.  $\sqrt{29}y''^2 - 3x'' = 0$ , parábola

13. a) Dos rectas que se intersecan,  $y = x$  y  $y = -x$

b) No existe gráfica

c) La gráfica es el punto único  $(0, 0)$

d) La gráfica es la recta  $y = x$

e) La gráfica consta de dos rectas paralelas  $\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y = \pm 2$

f) La gráfica es el punto único  $(1, 2)$

**EJERCICIOS 7.4 (página 360)**

1. a)  $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz$       b)  $3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz$   
 c)  $xy + xz + yz$       d)  $x^2 + y^2 - z^2$   
 e)  $3z^2 + 3xz$       f)  $2z^2 + 2xz + y^2$

2. a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}$       b)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 7 \end{bmatrix}$       c)  $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$       d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

e)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix}$       f)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. a)  $[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [7 \ 0 \ 2] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 3 = 0$

b)  $[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [-3 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 4 = 0$

c)  $[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 1 = 0$

d)  $[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 7 = 0$

e)  $[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [0 \ -14 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 9 = 0$

f)  $[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [2 \ -1 \ 3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

4. a) Elipsoide.      b) Hiperboloide de un manto.  
 c) Hiperboloide de dos mantos.      d) Cono elíptico.      e) Paraboloide elíptico.  
 f) Paraboloide hiperbólico.      g) Esfera.

5. a)  $9x'^2 + 36y'^2 + 4z'^2 = 36$ , elipsoide  
 b)  $6x'^2 + 3y'^2 - 2z'^2 = 18$ , hiperboloide un manto  
 c)  $3x'^2 - 3y'^2 - z'^2 = 3$ , hiperboloide de dos mantos  
 d)  $4x'^2 + 9y'^2 - z'^2 = 0$ , cono elíptico  
 e)  $x'^2 + 16y'^2 - 16z'^2 = 32$ , hiperboloide de un manto  
 f)  $7x'^2 - 3y'^2 + z'^2 = 0$ , paraboloide hiperbólico  
 g)  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 25$ , esfera

6. a)  $25x' - 3y' - 50z' - 150 = 0$ , hiperboloide de dos mantos  
 b)  $2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 - 5 = 0$ , elipsoide  
 c)  $9x'^2 + 4y'^2 - 36z' = 0$ , paraboloide elíptico  
 d)  $x'^2 - y'^2 + z' = 0$ , paraboloide hiperbólico





**EJERCICIOS 8.3 (página 384)**

1. a)  $\lambda = 3$     b) No hay eigenvalor dominante    c)  $\lambda = 6$     d)  $\lambda = 3$

2. a)  $\begin{bmatrix} 1.00 \\ .503 \end{bmatrix}$     b) 5.02

c) El eigenvector dominante es  $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ; el eigenvalor dominante es 5

d) El error en porcentaje es .4%

3. a)  $\begin{bmatrix} 1.00 \\ .750 \end{bmatrix}$     b) 8.01

c) El eigenvector dominante es  $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ; el eigenvalor dominante es 8

d) El error en porcentaje es .125%

4. a)  $\begin{bmatrix} 1.00 \\ -.560 \end{bmatrix}$     b)  $-4.00$

c) El eigenvector dominante es  $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ; el eigenvalor dominante es  $-4$

d) El error en porcentaje es 0%

5. a) Al final de dos iteraciones, el eigenvalor y eigenvector dominantes son aproximadamente  $\lambda_1 \approx 20.1$  y  $\mathbf{x} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ .119 \end{bmatrix}$

b) Los valores exactos del eigenvalor y eigenvector dominantes son  $\lambda_1 = 20$  y  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{17} \end{bmatrix}$

6. a) Al final de tres iteraciones, el eigenvalor y eigenvector dominantes son aproximadamente  $\lambda_1 \approx -9.95$  y  $\mathbf{x} \approx \begin{bmatrix} -.978 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Los valores exactos del eigenvalor y eigenvector dominantes son  $\lambda_1 = -10$ ,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. a)  $\begin{bmatrix} .027 \\ .027 \\ 1 \end{bmatrix}$     b) 10.0

c) El eigenvector dominante es  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ; el eigenvalor dominante es 10

**EJERCICIOS 8.4 (página 388)**

1. a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ .509 \end{bmatrix}$     b) 7.00    c)  $\lambda_2 \approx 2.00, v_2 \approx \begin{bmatrix} -.51 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) Eigenvalores exactos 7, 2; eigenvectores exactos

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ .503 \end{bmatrix}$     b) 12.0    c)  $\lambda_2 \approx 2.02, v_2 \approx \begin{bmatrix} -.532 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) Eigenvalores exactos 12, 2; eigenvectores exactos

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Indice

## A

- Adjunta, 103
- Angulo entre vectores, 206
- Aplicaciones, 329-360
  - a las ecuaciones diferenciales, 329-336
  - a las series de Fourier, 339-342
  - a formas cuadráticas, 343-360
  - a problemas de aproximación, 336-342
- Aproximación de mínimos cuadrados, 339-341
- Aproximación mejor, 219
- Arbol de permutaciones, 77
- Area, 139
- Axioma de aditividad, 197
- Axioma de positividad, 197
- Axioma de simetría, 197
- Axiomas, para un espacio de productos interiores, 197
  - para un espacio vectorial, 157

## B

- Base, 178
  - cambio de, 226-230
  - coordenadas relativas a una, 222
  - estándar, 179, 180
- Base estándar para  $P_n$ , 180
  - para  $R^n$ , 178

## C

- Caja negra, 70
- Cambio de base, 227-230
- Cauchy, Augustin Louis, 200
- Cauchy, desigualdad de, 200
- Cauchy-Schwarz, desigualdad de, 200-201, 204, 205
- Cerrado bajo la adición, 163
- Cerrado bajo la multiplicación escalar, 163
- Cofactor, 97-108
  - desarrollo, 97-109
- Columna, de una matriz, 42
  - espacio, 187
  - vector, 187
- Combinación lineal, 166
- Componente, ortogonal a, 130, 133
  - de un vector, 116-117, 119
- Compresión, 270
- Condensación pivotal, 363-369
- Condición inicial, 330
- Cónica imaginaria, 354

- Cónica no degenerada, 343
- Conjunto (de vectores) ortonormal, 211
- Conjunto ortogonal, 207, 211
- Cono elíptico, 355
- Contracción (operador de), 250
- Coordenadas, de un punto, 230-232
  - de un vector, 224
- Coordenada(s), ejes de, 118-119
  - libre, 140
  - matriz de, 224, 286-287
  - planos de, 118
  - vector de, 224
- Cosenos de dirección, 133
- Cramer, regla de, 97-109

## D

- Deflación, 385-388
- Descomposición de un vector, 131
- Deslizamientos cortantes, 271-272
- Desviación, 337
- Desplazamientos simultáneos, 369-376
- Desplazamientos sucesivos, 371-375
- Det, 81
- Determinante (función determinante), desarrollo por cofactores de un, 97-109
  - definición, 81
  - de una matriz de  $2 \times 2$ , 79
  - de una matriz de  $3 \times 3$ , 79
- Diagonal principal, 43
- Dilatación, 250
- Dimensión, 183-184
- Distancia euclidiana, 154
- Distancia, entre puntos, 203
  - entre vectores, 204

## E

- Ecuación característica, 302
- Ecuación cuadrática, en  $x$  y  $y$ , 343
  - en  $x$ ,  $y$  y  $z$ , 354
- Ecuación diferencial, 329-336
  - solución general de una, 329
  - solución particular, 329
- Ecuaciones de dependencia, 190
- Ecuaciones de traslación, 121
- Ecuaciones paramétricas, 146-147
- Ecuaciones simétricas, 148-149
- Ecuación lineal, 19-76
  - solución de una, 20
- Eigenspacio (espacio propio), 304-306, 307



- de un operador lineal, 306
- Eigenvalor dominante, 375
- Eigenvalores (valores propios) complejos, 304
- Eigenvalor (valor propio), 301-326
  - de un operador lineal, 306-307
- Eigenvector dominante, 376
- Eigenvector (vector propio), 301-326
  - de un operador lineal, 307
- Elemento pivote, 364
- Elementos, 42
- Eliminación gaussiana, 26-38, 106
  - con pivote, 363-369
- Elipse, 344
- Elipsoide, 355
- Equivalentes respecto a los renglones, 62
- Error cuadrático medio, 337
- Error en porcentaje, 381
- Error en porcentaje estimado, 381
- Error por redondeo, 363
- Error relativo, 381
- Error relativo estimado, 381
- Escalar, 43, 113
- Espacio generado, 168
- Espacio lineal generado, 169
- Espacio  $n$ , 151
- Espacio  $n$  euclidiano, 155-157
- Espacio nulo (*kernel*), 257
- Espacio (subespacio) del vector cero, 160
- Espacio de renglones, 187
- Espacios vectoriales complejos, 158, 304
- Espacios vectoriales de dimensión finita, 181-182
- Espacios vectoriales de dimensión infinita, 181
- Espacios vectoriales generales, 156-163
- Estrictamente dominante en la diagonal, 373-374
- Expansión (o compresión), 270-271

## F

- Forma cuadrática, 343-360
  - matriz de una, 347
- Forma cuadrática asociada, 309, 354
- Forma escalonada en los renglones, 26
- Forma escalonada en los renglones reducida, 26, 27
- Forma general de un plano, 144
- Fourier, coeficientes de, 341
- Fourier, Jean Baptiste Joseph, 341
- Fourier, series de, 339-342
- Fredholm, teorema alternativo de, 299

## G

- Gauss, Carl Friedrich, 29
- Gauss-Jordan, eliminación de, 29-30
- Gauss-Seidel, iteración de, 371-376
- Generación, 167
- Gram, Jörgen Pederson, 216
- Gram-Schmidt, proceso de, 216

## H

- Hiperbola, 344
- Hiperboloide, de un manto, 355
  - de dos mantos, 355

## I

- Imagen, de un vector, 247
- Inversa(s), de una matriz, 53-57
  - de una matriz de  $2 \times 2$ , 275
  - operaciones, 61
- Inversión en una permutación, 78-79
- Inverso aditivo, véase Negativo de un vector
- Iteraciones, 371

## J

- Jacobi, iteración de, 369
- Jordan, Camille, 29

## L

- Lagrange, identidad de, 134-135
- Legendre, polinomios de, 221
- Ley conmutativa, para la adición, 50
  - para la multiplicación, 50
- Ley de cancelación, 52-53
- Ley distributiva, 50
- Leyes asociativas, 50
- Lin, 170
- Longitud de un vector, 120-126, 203
- Longitud euclidiana, 154

## M

- Mantisa, 363
- Matrices iguales, 43
- Matrices ortogonalmente semejantes, 324
- Matrices semejantes, 291-296
- Matriz acompañante, 327
- Matriz antisimétrica, 97
- Matriz aumentada, 22-23
- Matriz cero, 52-53
- Matriz cuadrada, 84, 90-97
- Matriz de coeficientes, 47
- Matriz de transición, 229
- Matriz diagonal, 295-296
- Matriz diagonal superior, 84
- Matriz diagonalizable, 309-318
- Matriz elemental, 60-67
- Matriz estándar, 266-268
- Matriz identidad, 53
- Matriz inversible, 53-57, 275
- Matriz (matrices), aumentada, 22-23
  - acompañante, 327
  - antisimétrica, 97
  - cero, 52-53
  - columnas de una, 42
  - de coeficientes, 47
  - de coordenadas, 224
  - definición, 22, 42
  - de los cofactores, 102
  - de una forma cuadrática, 347
  - de una transformación lineal, 284-291
  - diagonal, 295-296
  - diagonalizable, 310
  - diagonal principal, 43
  - elemental, 60-67, 275
  - elementos de una, 42
  - equivalentes respecto a los renglones, 62

- forma escalonada en los renglones, 26, 27
- forma escalonada en los renglones reducida, 26, 27
- identidad, 53
- igualdad de, 43
- inversa, 54-57
- invertible, 54-57, 275
- inversión de una, 63, 64
- múltiplo escalar de una, 152, 158
- notación matricial para vectores, 155
- orden de una, 43
- ortogonal, 234
- ortogonalmente diagonalizable, 318
- ortogonalmente semejantes, 324
- producto de, 44-45
- rango de una, 191
- renglón de una, 42
- semejantes, 292-296
- simétrica, 97, 318-327
- suma, 44
- tamaño de una, 42
- transformación, 248-249
- transición, 229
- traspuesta de una, 91
- traza de una, 308
- triangular, 84-85
- triangular inferior, 84
- triangular superior, 84
- Matriz ortogonal, 234
- Matriz ortogonalmente diagonalizable, 318
- Matriz triangular, 84-85
- Matriz triangular inferior, 84
- Matriz simétrica, 97, 318-326
- Menor, 98
- Método de iteraciones, 266
- Método de la potencia, 375-386
  - con reducción a escala, 379
- Multiplicación por A (como una transformación), definición, 248-249
  - espacio nulo, 257
  - núcleo (*kernel*), 256-257
  - recorrido, 256-257
- Múltiplo escalar, 152-157

N

- $n$ -ada ordenada, 151
- Negativo de un vector, 115, 152
- Norma de un vector, 122-125, 202
- Norma euclidiana, 155
- Normal a un plano, 142
- Normalización de un vector, 211
- Núcleo (*kernel*), 256-265
- Nulidad, de una transformación, 259
- Número con punto flotante normalizado, 363
- Números binarios, 363
- Números decimales, 363

O

- Operaciones elementales sobre los renglones, 23
- Operaciones en los renglones, 23
- Operaciones estándar sobre  $R^n$ , 152
- Operador lineal, 250

- matriz de un, 264
- Orden, 43, 339
- Origen, 118-119

P

- Parábola, 344
- Paraboloide elíptico, 355
- Paraboloide hiperbólico, 355
- Par ordenado, 151
- Permutación, 77
- Permutación impar, 78
- Permutación par, 79
- Pitágoras, teorema generalizado de, 207, 219
- Plano, ecuación general, 144
  - forma normal puntual, 142
- Plano  $xz$ , 118
- Plano  $xy$ , 118
- Plano  $yz$ , 118
- Polinomio característico, 302
- Polinomio mónico, 326
- Polinomios normalizados de Legendre, 221
- Polinomio trigonométrico, 339
  - orden de un, 339
- Posición estándar, 343, 354-357
- Problema con valor inicial, 330
- Producto, de una matriz por un escalar, 43
  - de matrices, 44-45
  - de matrices inversibles, 54
  - de un vector por un escalar, 115-116, 152-153, 157
- Producto elemental, 79-81
- Producto elemental con signo, 80, 91
- Producto escalar (punto), 126
  - propiedades del, 130
- Producto interior euclidiano, 126, 153
- Productos(s) interior(es), axiomas para el, 197-203
  - espacio de, 197
  - euclidiano, 153, 197
- Producto vectorial (cruz) de vectores, 133-141
- Proyección ortogonal, 130, 213, 251
- Punto inicial, 113
- Puntos en  $R^n$ , 151
- Punto terminal, 113

R

- Raíces latentes, 301
- Rango de una matriz, 191
  - de una transformación, 259
- Rayleigh, cociente de, 378
- Rayleigh, John, 378
- Recorrido, 257
- Recta, ecuaciones paramétricas de la, 146-147
  - ecuaciones simétricas de la, 148-149
- Reflexiones, 270
- Regla de la mano derecha, 137
- Renglón, 42
- $R^m$ , 265
- Rotación, de ejes, 232-233
  - de vectores, 241, 248, 249
- Rotaciones, 270

## S

- Schmidt, Erhardt, 216  
 Schwarz, desigualdad de, *véase* Cauchy-Schwarz, desigualdad de  
 Schwarz, Hermann Amandus, 200  
 Sección cónica (cónica), 315  
   degenerada, 316  
   no degenerada, 316  
 Sección cónica degenerada, 343-354  
 Sistema consistente, 21  
 Sistema de coordenadas derecho, 118-119  
 Sistema de coordenadas izquierdo, 118-119  
 Sistema de coordenadas rectangulares, 118  
 Sistema de ecuaciones lineales, 20-21  
   consistente, 21  
   inconsistente, 21  
   solución de un, 20  
 Sistema físico lineal, 70  
 Sistema homogéneo, 38-42, 166  
 Sistema inconsistente, 21  
 Sistema mal condicionado, 368  
 Solución, de una ecuación lineal, 20  
   conjunto, 20  
   de un sistema, 20-21  
   espacio, 166  
   vector, 166  
 Soluciones no triviales, 38  
 Solución trivial, 38  
 Subespacio, 163-172  
 Subespacio cero, 163  
 Suma, de matrices, 43  
   de vectores, 114, 152, 157  
 Superficie cuadrática, 355  
 Sustitución hacia atrás, 33  
 Sustracción, de matrices, 44  
   de vectores, 115, 151

## T

- Tamaño de una matriz, 42  
 Teorema de dimensión, 260  
 Teorema de la mejor aproximación, 219  
 Teorema de homogeneidad, 197  
 Teorema de los ejes principales, para  $R^2$ , 348  
   para  $R^3$ , 357-358  
 Teorema de proyección, 217-219  
 Teorema generalizado de Pitágoras, 207

- Terna ordenada, 151  
 Transformación cero, 250-251  
 Transformaciones lineales en el plano, 268  
 Transformación identidad, 250, 271  
 Transformación inversa, 276  
 Transformación lineal, 247-299  
   matriz de una, 284-292  
 Transformación ortogonal de coordenadas, 235-237  
 Transpuesta, 91  
   propiedades de la, 91  
 Traza de una matriz, 309

## U

- Uno principal, 28  
 Uso de un pivote, 364

## V

- Valores característicos, 301  
 Valores propios, 301  
 Variables principales, 28  
 Vector, 113-130  
   cero, 115-116, 157  
   de coordenadas, 222-245  
   longitud de un, *véase* Norma de un vector  
   norma de un, 123-125  
 Vector cero, 114-120, 157  
 Vectores (conjunto de) linealmente dependientes, 172  
 Vectores (conjunto de) linealmente independientes, 172  
 Vectores equivalentes, 113  
 Vectores geométricos, 113-123  
 Vectores iguales, 114  
 Vectores ortogonales, 126, 200  
 Vectores renglón, 187  
 Vectores unitarios estándar, 135-136  
 Vectorial, espacio, 151-245  
   axiomas, 157  
   de dimensión finita, 181  
   de dimensión infinita, 181  
   dimensión de un, 183-184  
   subespacio de un, 163-172

## W

- Wronskiano, 178