<table>
<tr><td rowspan="3">ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
CÁLCULO DIFERENCIAL</td><td colspan="2">CALIFICACIÓN</td></tr>
<tr><td>TEMA 1</td><td></td></tr>
<tr><td>TEMA 2</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">PRIMERA EVALUACIÓN 10 de Diciembre de 2010</td><td>TEMA 3</td><td></td></tr>
<tr><td>TEMA 4</td><td></td></tr>
<tr><td>BONUS</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nombre: ....</td><td>TOTAL EXAMEN</td><td></td></tr>
<tr><td>DEBERES Y LECCIONES</td><td></td></tr>
<tr><td>#Matrícula:.................. Firma:............................. Paralelo:.....</td><td>TOTAL</td><td></td></tr>
</table>

TEMA 1 (15 puntos) Escoja únicamente tres de los siguientes cuatro ítems.

a) Usando la definición de la función exponencial $e^w := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!}$, demuestre que: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. (**VALOR 5 puntos**)

b) Califique la siguiente proposición como verdadera o falsa, justificando su respuesta: "La función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-1}, & \text{si } x \neq 1, \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

es continua en $x = 1$." (**VALOR 5 puntos**)

c) Determine la ecuación cartesiana, es decir usando $x = r \cdot \cos(\theta)$, $y = r \cdot \operatorname{sen}(\theta)$, correspondiente a $r^2 - 6r\big(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\big) + 9 = 0$ y luego bosqueje su gráfica. (**VALOR 5 puntos**)

d) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \big(\cos(x)\big)^{\frac{1}{x^2}}. \qquad (\textbf{VALOR 5 puntos})$$

TEMA 2 (18 puntos)

a) Sea $f : I \mapsto \mathbb{R}$ una función, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto, y sea $a \in I$. Demuestre que si f es diferenciable en el punto a, entonces f es continua en a. (**VALOR 7 puntos**)

b) Sea $X \subset \mathbb{R}$. Decimos que un punto $a \in X$ es un *punto aislado* de X ssi $\exists \delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \cap X = \{a\}$, es decir existe un intervalo abierto alrededor del punto a donde el único punto de X es el mismo punto a. Sea $f : X \mapsto \mathbb{R}$ una función y sea $a \in X$ un punto aislado del dominio X, demuestre que f es continua en a. (**VALOR 5 puntos**)

c) Demuestre formalmente, usando la definición de límite, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty. \qquad (\textbf{VALOR 6 puntos})$$

<u>TEMA 3</u> (10 puntos)

Construir la gráfica de una función $f : X \mapsto \mathbb{R}$ de variable real tal que:

i.) f es continua en $X := (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

ii.) $f(0) = 5$; $f(2) = f(4) = 0$.

iii.) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$, $\forall x \in X$, $x > M \implies |f(x) + 3| < \varepsilon$.

iv.) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, $\forall x \in X$, $x < -N \implies |f(x)| < \varepsilon$.

v.)

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty.$$

vi.) $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in X$, $3 < x < 3 + \delta \implies f(x) > M$.

<u>TEMA 4</u> (17 puntos)

a) Demuestre que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen(x)}}{x} = 1. \qquad \text{(\textbf{VALOR 6 puntos})}$$

b) Sea f la función continua dada por $f(x) = \sqrt{x}$, para todo $x \geq 0$. Demuestre, usando la definición de derivada, que $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, para todo $x > 0$. (**VALOR 6 puntos**)

c) Determine el valor de "a" diferente de cero, para que
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(a^2+4)x^3 + 3x - 4}{ax^3 - 2x} = 4. \qquad \text{(\textbf{VALOR 5 puntos})}$$

<u>BONUS</u> (30 puntos, opcional) Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función no decreciente cualquiera, es decir $x \leq y \implies f(x) \leq f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto formado por todos los puntos del dominio de f donde la función f es discontinua, es decir

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}; f \text{ es discontinua en el punto } x\}.$$

¿Cuál es el número máximo de elementos que podría tener el conjunto $\mathcal{A}$?. Justifique rigurosamente su respuesta.

Observación: Recuerde que si la suma de las calificaciones de las preguntas que no son del tipo Bonus (Temas 1-4) con la calificación de la pregunta tipo Bonus que el estudiante ha optado por desarrollar llegara a ser superior a la nota máxima del Examen, entonces el resultado final del Examen será el equivalente al 100% de la nota del Examen.