ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS **CÁLCULO DIFERENCIAL** SEGUNDA EVALUACIÓN 04 de Febrero de 2011 Nombre: .... #Matrícula:.................. Firma:............................ Paralelo:.....	CALIFICACIÓN	
	TEMA 1	
	TEMA 2	
	TEMA 3	
	TEMA 4	
	BONUS	
	TOTAL EXAMEN	
	DEBERES Y LECCIONES	
	TOTAL	

<u>TEMA 1</u> (17 puntos)

a) Enuncie y demuestre el Teorema de Rolle. (**VALOR 12 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Enunciado del Teorema de Rolle.	2
Usar el Teorema del Valor Intermedio o Teorema de Bolzano.	2
Estudiar el caso en que tanto el máximo como el mínimo de la función se alcanzan en los extremos del intervalo.	2
Estudiar el caso en que el máximo o el mínimo de la función se alcanza en el interior del intervalo.	6

b) Utilizando el polinomio de Taylor de primer orden o similarmente diferenciales, calcule arcsin(0.49). (**VALOR 5 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Escribir el polinomio de Taylor de primer orden alrededor del punto a.	1
Escoger el valor apropiado de a y de $h = \Delta x$.	2
Escribir la expresión correcta de la derivada de la función.	1
Reemplazar la información correspondiente en el polinomio de Taylor.	1

TEMA 2 (16 puntos)

a) Determine $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = f(\ln(x))$. (**VALOR 6 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Obtener la expresión de la primera derivada.	2
Obtener la expresión de la segunda derivada y simplificar.	4

b) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x - \tan(x)}.$$ (**VALOR 5 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Estudiar el tipo de indeterminación y aplicar el resultado de L'Hôpital.	2
Estudiar nuevamente el tipo de indeterminación y aplicar de nuevo el Teorema de L'Hôpital.	2
Realizar las simplificaciones correspondientes.	1
Si el estudiante ha decidido usar otro método y tanto el procedimiento como el resultado son correctos, el puntaje obtenido será de 5 puntos.	

c) Suponga que la ecuación dada a continuación define una función derivable respecto a x. Encuentre $\frac{dy}{dx}$, por medio de derivación implícita, si

$$xy + \sin(xy) = 1.$$ (**VALOR 5 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Derivar ambos lados de la ecuación con respecto a x.	2
Despejar $y' = \frac{dy}{dx}$ y realizar las simplificaciones correspondientes.	3

TEMA 3 (15 puntos)

a) Un cartel publicitario debe tener 100 pulgadas cuadradas para el espacio impreso con márgenes superior e inferior de 3 pulgadas cada uno y cada margen lateral de 2 pulgadas. ¿Qué dimensiones del cartel requerirán el menor papel posible?. (**VALOR 8 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Escribir correctamente la expresión para la función área.	3
Obtener el punto de mínimo y justificar adecuadamente su existencia.	3
Calcular las dimensiones requeridas del cartel.	2

b) Bosqueje la gráfica de una función de variable real f tal que

i.) f es continua y diferenciable en $\mathbb{R}$.
ii.) $f(-1) = f(2) = 0$; $f(0) = -2$; $f(1) = -4$.
iii.) $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), f'(x) > 0$.
iv.) $\forall x \in (-1, 1), f'(x) < 0$.
v.) $\forall x \in (-\infty, 0), f''(x) < 0$.
vi.) $\forall x \in (0, +\infty), f''(x) > 0$. (**VALOR 7 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Usar la hipótesis i.).	0.5
Usar la hipótesis ii.) para graficar los 4 puntos en cuestión.	0.5
Usar la hipótesis iii.) e indicar la monotonía correspondiente de la función.	1
Usar la hipótesis iv.) e indicar la monotonía correspondiente de la función.	1
Usar la hipótesis v.) e indicar la concavidad correspondiente de la función.	1
Usar la hipótesis vi.) e indicar la convexidad correspondiente de la función.	1
Bosquejar el gráfico de una función que cumpla las hipótesis anteriores.	2

<u>TEMA 4</u> (12 puntos)

a) Decimos que una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es *convexa* o *cóncava hacia arriba* en $\mathbb{R}$ si $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$.
Suponga que $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función convexa y derivable. Demuestre que $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$, para todo $x, c \in \mathbb{R}$. (**VALOR 7 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Usar la definición dada de convexidad y asociar adecuadamente los términos a ambos lados de la desigualdad.	4
Calcular el límite correspondiente a ambos lados de la desigualdad, identificando uno de los términos obtenidos como la derivada en el punto de interés.	2
Dejar en un lado de la desigualdad el término $f(x)$ para obtener el resultado.	1

b) Sea $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo abierto (a, b). Demuestre que entre distintos ceros sucesivos de f' solo puede haber a lo más un cero de f. (**VALOR 5 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Tomar dos ceros sucesivos de la derivada.	1
Usar el Teorema de Rolle entre dos ceros de la función dada para así obtener una contradicción.	4

BONUS (30 puntos, opcional) Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ derivable, con derivada f' no necesariamente continua. Califique la siguiente proposición como Verdadera o Falsa y justifique rigurosamente su respuesta: "Dado cualquier intervalo $[a, b]$, y dado c entre $f'(a)$ y $f'(b)$ existe por lo menos un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f'(x_0) = c$".

Observación: Recuerde que si la suma de las calificaciones de las preguntas que no son del tipo Bonus (Temas 1-4) con la calificación de la pregunta tipo Bonus que el estudiante ha optado por desarrollar llegara a ser superior a la nota máxima del Examen, entonces el resultado final del Examen será el equivalente al 100% de la nota del Examen.

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Estudiar el caso particular $c = 0$ usando la definición de derivada en los extremos del intervalo en cuestión.	15
Probar la existencia de un extremo local en el interior del intervalo analizado.	5
Considerar el caso general de c a partir del caso anterior.	10