ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
Instituto de Ciencias Matemáticas
I-Término 2008

Resolución de la Primera Evaluación de Algebra Lineal (B)

1. Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta

a) Sea un espacio vectorial $(V,\oplus,\bullet)$. Si $u\oplus v=w\oplus v\Rightarrow u=w$

Sumamos el inverso aditivo de v *en ambos lados de la ecuación*

$$(u\oplus v)\oplus v'=(w\oplus v)\oplus v'$$
$$u\oplus(v\oplus v')=w\oplus(v\oplus v')$$
$$u\oplus O_V=w\oplus O_V$$
$$u=w$$

$\therefore$ *Verdadero*

b) Sea $(V,\oplus,\bullet)$ un espacio vectorial. Si $S_1=\{v_1,v_2,...,v_k\}\subseteq V$ y $S_2=\{w_1,w_2,...,w_r\}\subseteq V$ son conjuntos linealmente independientes, entonces $S_1\cup S_2$ es también linealmente independiente

Sea $V=R^2$. *Sean* $S_1\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ *y* $S_2\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ *dos conjuntos linealmente independientes en* R^2

$S_1\cup S_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, *como tiene más elemento que la base de* R^2 *podemos concluir que este conjunto es linealmente dependiente*

$\therefore$ *Falso*

c) Si $A\in M_{mxn}$, entonces $\dim(N_A)=\dim(R_A)$, donde N_A es el núcleo de la matriz A

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

$R_A=gen\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$, *pero este conjunto es linealmente independiente en* R^2 *y por tanto constituye una base del espacio renglón de* A, *entonces* $\dim(R_A)=2=\dim(\mathrm{Im}(A))=\rho(A)$

Del teorema de la dimensión para matrices:

$$v(A)+\rho(A)=n$$
$$v(A)+2=2 \qquad\qquad \Rightarrow\dim(N_A)\neq\dim(R_A) \qquad \therefore\ Falso$$
$$v(A)=\dim(N_A)=0$$

Ramiro J. Saltos

d) Sean H y W dos subespacios vectoriales de V con bases $B_1 = \{v_1, v_2\}$ y $B_2 = \{v_2, v_3\}$ respectivamente. Entonces $B = \{v_2\}$ es base del subespacio $H \cap W$

Sea $V = R^2$. *Sean los subespacios* $H = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ *y* $W = gen\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Podemos notar que los conjuntos generadores de H *y* W *son linealmente independientes y por tanto constituyen una base de* R^2, *es decir,* $H = W = R^2$

Entonces $H \cap W = R^2$ *y una base de la intersección sería* $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\therefore$ *Falso*

2. Sea $V = M_{2x2}$. Dados los conjuntos:

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} / 2a + 1 = 3 + b + d - 2 \right\} \qquad H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ a+d & 1 \end{pmatrix} / a,b,c,d \in R \right\}$$

$$H_3 = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad H_4 = \{ A \in M_{2x2} / \det(A) \neq 0 \}$$

a) **¿Cuáles son subespacios vectoriales de V ?**
b) **Determine una base y la dimensión de dos de los subespacios obtenidos en (a), así como de su intersección**
c) **Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Determine si $A + B$ pertenece a la unión de los subespacios hallados en (a)**

Sea $O_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

El elemento neutro del espacio vectorial por definición pertenece a cualquier subespacio de V *, entonces:*

$O_V \notin H_2$ *porque no posee la forma de todo elemento de* H_2*, es decir, en su cuarta componente debe estar siempre presente la constante* 1*, lo cual no ocurre con el vector nulo*

$\therefore H_2$ *no es subespacio de* V

$O_V \notin H_4$ *porque su determinante es igual a* 0 *y con ello no cumple la condición del conjunto* H_4

$\therefore H_4$ *no es subespacio de* V

H_3 *es el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de los vectores* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y por teorema este conjunto es un subespacio de* V *y además es el menor de todos los subespacios que contienen a los vectores ya mencionados*

$\therefore H_3$ *es un subespacio de* V

Se han analizado los conjuntos más sencillos, con el último hay que determinar si se cumplen los axiomas de cerradura de la suma y multiplicación por escalar

1. $\forall v, w \in H_1 \quad v + w \in H_1$

Sean $v = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ *y* $w = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in H_1 \Rightarrow 2a_1 = b_1 + d_1 \wedge 2a_2 = b_2 + d_2$

$$v + w = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow 2(a_1 + a_2) = (b_1 + b_2) + (d_1 + d_2)$$

$$2a_1 + 2a_2 = (b_1 + d_1) + (b_2 + d_2)$$

$$v + w = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \qquad 2a_1 + 2a_2 = 2a_1 + 2a_2$$

$$0 = 0$$

$\rightarrow$ *La suma es cerrada en* H_1

2. $\forall \alpha \in R \;\; \forall v \in H_1 \;\; \alpha \bullet v \in H_1$

Sea $\alpha \in R$. *Sea* $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H_1 \Rightarrow 2a = b + d$

$$\begin{aligned} \alpha \bullet v &= \alpha \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \alpha \bullet v &= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2(\alpha a) &= \alpha b + \alpha d \\ \alpha(2a) &= \alpha(b+d) \\ 2a &= b+d \\ 2a &= 2a \end{aligned}$$

$\rightarrow$ *La multiplicación por escalar es cerrada en* H_1

$\therefore H_1$ *es un subespacio de* V

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H_1$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a-d \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B_{H1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \dim(H_1) = 3$$

El conjunto generador de H_3 *es linealmente independiente y por tanto constituye una base para* H_3

$$\therefore B_{H3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \dim(H_3) = 2$$

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H_1 \cap H_3$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 \\ 0 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \beta_1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_3\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 2\beta_1 - \beta_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 \\ 0 & -\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 2\beta_1 - \beta_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 \\ \alpha_2 = 2\beta_1 - \beta_3 \\ 0 = \beta_2 \\ -\alpha_1 = \beta_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 2\beta_1 - \beta_3 \\ 0 & 0 & \beta_2 \\ -1 & 0 & \beta_3 \end{array}\right) A_{41}(1) \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \beta_1 + \beta_3 \\ 0 & 1 & 2\beta_1 - \beta_3 \\ 0 & 0 & \beta_2 \\ -1 & 0 & \beta_3 \end{array}\right) A_{21}(-1) \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -\beta_1 + 2\beta_3 \\ 0 & 1 & 2\beta_1 - \beta_3 \\ 0 & 0 & \beta_2 \\ -1 & 0 & \beta_3 \end{array}\right) \qquad \beta_2 = 0 \qquad \begin{aligned} -\beta_1 + 2\beta_3 &= 0 \\ \beta_1 &= 2\beta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 2\beta_1 - \beta_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta_3 & 2(2\beta_3) - \beta_3 \\ 0 & \beta_3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta_3 & 3\beta_3 \\ 0 & \beta_3 \end{pmatrix} = \beta_3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B_{H1 \cap H3} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \ \dim(H_1 \cap H_3) = 1$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que esta matriz pertenezca a la unión de ambos subespacios, debe pertenecer ya sea a H_1 *o a* H_3. *Si pertenece a* H_1 *debe cumplir su condición*

$$\begin{aligned} &2a = b + d \\ &2(5) = 2 - 1 \qquad \to A + B \notin H_1 \\ &10 = 1 \end{aligned}$$

Finalmente hay que determinar si pertenece a H_3 *y para ello debe ser una combinación lineal de los vectores de su base*

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & c_2 \\ 0 & -c_1 \end{pmatrix}$$

Si nos damos cuenta nos queda la igualdad $2 = 0$ *la cual es falsa* $\to A + B \notin H_3$

$$\therefore A + B \notin H_1 \cup H_3$$

3. Sea $V = P_2$ **y** $B_1 = \{x^2+1, x^2-x, x-3\}$ **y** $B_2 = \{x^2-2x+2, x-3, x^2-1\}$ **bases de** P_2**.**
Determine:

a) **La matriz de cambio de base de** B_2 **a** B_1
b) **El núcleo y la imagen de la matriz obtenida en** (a)

Sea $ax^2+bx+c \in P_2$

$$ax^2+bx+c = \alpha_1(x^2+1)+\alpha_2(x^2-x)+\alpha_1(x-3)$$
$$ax^2+bx+c = (\alpha_1+\alpha_2)x^2+(-\alpha_2+\alpha_3)x+(\alpha_1-3\alpha_3)$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=a\\ -\alpha_2+\alpha_3=b\\ \alpha_1-3\alpha_3=c\end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\0&-1&1&b\\1&0&-3&c\end{array}\right) A_{13}(-1) \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\0&-1&1&b\\0&-1&-3&c-a\end{array}\right) A_{23}(-1) \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\0&-1&1&b\\0&0&-4&c-a-b\end{array}\right)$$

$$-4\alpha_3 = c-a-b \qquad -\alpha_2+\alpha_3=b \qquad \alpha_1+\alpha_2=a$$
$$\alpha_3=\frac{a+b-c}{4} \qquad \alpha_2=\frac{a-3b-c}{4} \qquad \alpha_1=\frac{3a+3b+c}{4}$$

$$\Rightarrow [ax^2+bx+c]_{B1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3a+3b+c\\a-3b-c\\a+b-c\end{pmatrix}$$

$$[x^2-2x+2]_{B1}=\begin{pmatrix}-1/4\\5/4\\-3/4\end{pmatrix} \qquad [x-3]_{B1}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad [x^2-1]_{B1}=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$\therefore C_{B2\to B1}=\begin{pmatrix}-1/4&0&1/2\\5/4&0&1/2\\-3/4&1&1/2\end{pmatrix}$$

Como C *es una matriz de cambio de base, su determinante siempre será diferente de cero, esto implica que sus columnas son linealmente independientes en* R^3 *y constituyen además de una base del espacio* $C_C = \mathrm{Im}(C)$ *también una base para* R^3

$$\therefore \mathrm{Im}(C) = R^3$$

Para el núcleo utilizamos el teorema de la dimensión:

$$v(C)+\rho(C)=n$$
$$v(C)+3=3$$
$$v(C)=0$$

Como la nulidad es cero, entonces el único elemento presente en el núcleo de C *es el* O_{R^3}

$$\therefore Nu(C)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

4. Sea el espacio vectorial $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x, y \in R, z \in R^{+} \right\}$ **junto con las operaciones:**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 z_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + 2\alpha - 2 \\ \alpha y \\ z^{\alpha} \end{pmatrix}$$

Determine:

a) **El neutro de** V **y el opuesto de** $v \in V$

b) **Si** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **es combinación lineal de** $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **y** $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

1. $\forall v \in V \quad 0 \bullet v = O_V$

$$O_V = 0 \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x + 2(0) - 2 \\ 0y \\ z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore O_V = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $\forall v \in V \quad -1 \bullet v = v'$

$$v' = -1 \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)x + 2(-1) - 2 \\ (-1)y \\ z^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - x \\ -y \\ 1/z \end{pmatrix} \qquad \therefore v' = \begin{pmatrix} -4 - x \\ -y \\ 1/z \end{pmatrix}$$

3. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *no es una combinación lineal de los vectores mencionados porque este no pertenece al espacio vectorial V*

Ramiro J. Saltos