Instituto de Ciencias Matemáticas

Algebra Lineal: Solución de la Primera Evaluación

Tema 1: (20 puntos) Califique como verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Justifique formalmente su respuesta

a) Si la matriz B se obtiene a partir de la matriz A por medio de un intercambio de filas, entonces $\rho(A) = \rho(B)$ *(Verdadero)*

Por definición, la matriz A es equivalente por renglones a la matriz B si A puede reducirse a B mediante operaciones elementales de renglón

En este caso la matriz B se obtiene por un simple intercambio de las filas (renglones) de A, entonces $R_A = R_B$ dado que los renglones de A y B son los mismos excepto que están escritos en un orden diferente

También hay que recordar que $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \rho(A) = \dim(C_A) = \dim(R_A)$

$$\therefore \rho(A) = \rho(B)$$

b) Si $A \in M_{3x5}$ es una matriz cualquiera, entonces $v(A) \geq 3$ *(Falso)*

$$Sea\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3x5}.\ Sea\ X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \in Nu(A)$$

$$AX = O_{R^3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De donde obtenemos:

$$\begin{matrix} a - d - e = 0 \\ a = d + e \end{matrix} \qquad b = 0 \qquad c = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+e \\ 0 \\ 0 \\ d \\ e \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B_{Nu(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \therefore v(A) = 2$$

c) Sea V un espacio vectorial. Sea $A,B \subseteq V$, entonces $gen(A\cap B)=gen(A)\cap gen(B)$ *(Falso)*

Sea $V=R^3$. *Sea* $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ *y* $B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}\in V$

- $A\cap B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \quad \rightarrow gen(A\cap B)=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in R^3 / a=c=0\right\}$
- $gen(A)=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in R^3 / a,b,c\in R\right\}$ *y* $gen(B)=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in R^3 / a=0\right\}$
- $gen(A)\cap gen(B)=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in R^3 / a=0 \wedge b,c\in R\right\}$ $\quad \therefore gen(A\cap B)\neq gen(A)\cap gen(B)$

d) Sea W un subespacio del espacio vectorial V. Si $w\notin W$ y $\alpha\in R$, entonces $\alpha w\notin W$ *(Falso)*

Sea $V=R^2$. *Sea* $W=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in R^2 / a=0\right\}$ *un subespacio de* V. *Sea* $\alpha=0$

Sea $w=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$*, este vector no pertenece a* W *por no cumplir la condición de que* $a=0$

$$\alpha w=(0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Por hipótesis sabemos que W *es un subespacio y por tanto contiene al nulo de* V *y* $\alpha w=O_V$

$$\therefore \alpha w\in W$$

e) Si $L:R\rightarrow R$ es una transformación lineal, entonces $[L(v)]^2=L(v^2)$ *(Falso)*

Sea $L(a)=2a$ *una transformación lineal*
Sea $a=2$

$$[L(2)]^2=L(2^2)$$
$$(4)^2=L(4)$$
$$16\neq 8$$

$$\therefore [L(v)]^2\neq L(v^2)$$

Tema 2: (10 puntos) Sea $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / x > 0 \wedge y > 0 \right\}$ **con las operaciones:**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_1 \cdot x_2 \\ 4y_1 \cdot y_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{2\alpha} x^{\alpha} \\ 2^{2\alpha} y^{\alpha} \end{pmatrix}$$

Si $(V, \oplus, \bullet)$ **es un espacio vectorial, determine:**

a) **El neutro o cero vectorial de** V

b) **Si** $v \in V$**, el inverso aditivo de** v

Este ejercicio se presenta bastante confuso, debido a que la manera en que es planteado da a entender que primero hay que determinar si V es un espacio vectorial. Pero no vamos a analizar la validez del ejercicio planteado, sino que vamos a resolver lo que nos piden en cada literal.

a)

- *Usando el teorema* $\forall v \in V \quad 0 \bullet v = O_V$

$$O_V = 0 \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$O_V = \begin{pmatrix} 3^{2(0)} x^0 \\ 2^{2(0)} y^0 \end{pmatrix}$$

$$O_V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- *Usando el axioma* $\exists O_V \in V \; \forall v \in V \quad v + O_V = v$

Sea $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V$. *Sea* $O_V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9ax \\ 4by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$9ax = a \qquad 4by = b$$

$$x = \tfrac{1}{9} \qquad y = \tfrac{1}{4}$$

$$O_V = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

El nulo pertenece a V *porque sus componentes son mayores que* 0

Hay que notar que usando las dos formas de resolución no nos queda el mismo nulo, pero esto se debe al mal planteamiento del problema. Utilizando ambas alternativas siempre debe quedar la misma respuesta *b)*

- *Usando el teorema* $\forall v \in V \quad -1 \bullet v = v'$

$$v' = -1 \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$v' = \begin{pmatrix} 3^{2(-1)} x^{-1} \\ 2^{2(-1)} y^{-1} \end{pmatrix}$$
$$v' = \begin{pmatrix} 1/9x \\ 1/4y \end{pmatrix}$$

- *Usando el axioma* $\forall v \in V \quad \exists v' \in V \quad v + v' = O_V$

La pregunta aquí es con cuál nulo trabajamos. Para este caso debemos usar el obtenido al usar el axioma porque estamos calculando el inverso de la misma manera que ese neutro

Sea $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$. *Sea* $v' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/4 \end{pmatrix} \qquad 9xa = 1/9 \qquad 4yb = 1/4 \qquad v' = \begin{pmatrix} 1/81x \\ 1/16y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 9xa \\ 4yb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/4 \end{pmatrix} \qquad a = 1/81x \qquad b = 1/16y$$

Ambos inversos pertenecen a V *por ser sus componentes mayores que* 0
Con el mismo argumento mencionado al calcular el O_V *sabemos que nos debió quedar la misma respuesta.*

También se puede notar que V *no es un espacio vectorial por no cumplirse el siguiente axioma:*

M10) $\forall v \in V \quad 1 \bullet v = v$
Sea $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$

$$1 \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3^{2(1)} x^{1} \\ 2^{2(1)} y^{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 9x \\ 4y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tema 3: (20 puntos) Sea $V = M_{3x2}$. Sean W_1 el conjunto de las matrices que tienen la primera y última fila iguales; W_2 el conjunto de las matrices que tienen la primera columna igual a su segunda columna; y W_3 el conjunto de las matrices A_{3x2} tal que $a_{i2} = i-1$, $i = 1,2,3$.

Determine.

a) **Los conjuntos que son subespacios de V**
b) **La intersección entre los subespacios encontrados en el literal anterior**
c) **La suma entre los subespacios encontrados en el primer literal**
d) **Una base para el subespacio intersección y otra para el subespacio suma, obtenidos en (b) y (c), respectivamente.**

Para hallar W_1 *hay que tener en cuenta que su primera y última fila son iguales, por tanto las componentes en dichas filas deben ser correspondientemente iguales, así nos queda que:*

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3x2} \, / \, a = e \wedge b = f \right\}$$

Ahora procedemos a determinar si W_1 *es un subespacio de* V

1) $\forall v, w \in W_1 \quad v + w \in W_1$

Sea $v = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \\ e_1 & f_1 \end{pmatrix}$ *y* $w = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \\ e_2 & f_2 \end{pmatrix} \in W_1$

Como ambos vectores pertenecen a W_1 *cumplen con la condición del mismo, con lo que tenemos que:*

$$a_1 = e_1 \qquad b_1 = f_1 \qquad a_2 = e_2 \qquad b_2 = f_2$$

$$v + w = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \\ e_1 + e_2 & f_1 + f_2 \end{pmatrix}$$

Ahora hay que ver si la suma de ambos cumple la condición

$$\begin{array}{ll} a_1 + a_2 = e_1 + e_2 & b_1 + b_2 = f_1 + f_2 \\ e_1 + e_2 = e_1 + e_2 & f_1 + f_2 = f_1 + f_2 \\ 0 = 0 & 0 = 0 \end{array}$$

Por tanto $v + w \in W_1$

2) $\forall \alpha \in R \quad \forall v \in W_1 \quad \alpha v \in W_1$

Sean $\alpha \in R$. *Sea* $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in W_1$

Sabemos que $a = e$ *y* $b = f$ *entonces* $a - e = 0$ *y* $b - f = 0$

$$\alpha v=\begin{pmatrix}\alpha a & \alpha b\\ \alpha c & \alpha d\\ \alpha e & \alpha f\end{pmatrix}\qquad \begin{aligned}&\alpha a-\alpha e=0\\&\alpha(a-e)=0\\&\alpha(0)=0\\&0=0\end{aligned}\qquad \begin{aligned}&\alpha b-\alpha f=0\\&\alpha(b-f)=0\\&\alpha(0)=0\\&0=0\end{aligned}$$

Por tanto $\alpha v\in W_1$

$\therefore W_1$ *es un subespacio de V*

El mismo procedimiento vamos a realizar con W_2 *pero aquí hay que notar que ambas columnas son iguales, por tanto las componentes en dichas columnas deben ser correspondientemente iguales, así nos queda que:*

$$W_2=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}\in M_{3x2}\,/\,a=b\wedge c=d\wedge e=f\right\}$$

Ahora procedemos a determinar si W_2 *es un subespacio de V*

1) $\forall v,w\in W_2\quad v+w\in W_2$

Sea $v=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\\ e_1 & f_1\end{pmatrix}$ *y* $w=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\\ e_2 & f_2\end{pmatrix}\in W_2$

Como ambos vectores pertenecen a W_2 *cumplen con la condición del mismo, con lo que tenemos que:*

$$\begin{matrix}a_1=b_1 & c_1=d_1 & e_1=f_1 & a_2=b_2 & c_2=d_2 & e_2=f_2\\ a_1-b_1=0 & c_1-d_1=0 & e_1-f_1=0 & a_2-b_2=0 & c_2-d_2=0 & e_2-f_2=0\end{matrix}$$

$$v+w=\begin{pmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2\\ c_1+c_2 & d_1+d_2\\ e_1+e_2 & f_1+f_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}(a_1+a_2)-(b_1+b_2)=0 & (c_1+c_2)-(d_1+d_2)=0 & (e_1+e_2)-(f_1+f_2)=0\\ (a_1-b_1)+(a_2-b_2)=0 & (c_1-d_1)+(c_2-d_2)=0 & (e_1-f_1)+(e_2-f_2)=0\\ 0+0=0 & 0+0=0 & 0+0=0\\ 0=0 & 0=0 & 0=0\end{matrix}$$

Por tanto $v+w\in W_2$

2) $\forall\alpha\in R\quad\forall v\in W_2\quad\alpha v\in W_2$

Sean $\alpha\in R$. *Sea* $v=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}\in W_2$

$$\alpha v = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \\ \alpha e & \alpha f \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \alpha a - \alpha b &= 0 \\ \alpha(a-b) &= 0 \\ \alpha(0) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha c - \alpha d &= 0 \\ \alpha(c-d) &= 0 \\ \alpha(0) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha e - \alpha f &= 0 \\ \alpha(e-f) &= 0 \\ \alpha(0) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto $\alpha v \in W_2$

$\therefore W_2$ *es un subespacio de V*

Finalmente nos falta encontrar W_3 *y determinar si este es un subespacio, y para ello hay que utilizar la regla de correspondencia para determinar el valor de las componentes en la segunda columna, la cual es* $a_{i2} = i - 1$

$$\begin{aligned} a_{12} &= 1-1 \qquad & a_{22} &= 2-1 \qquad & a_{32} &= 3-1 \\ a_{12} &= 0 & a_{22} &= 1 & a_{32} &= 2 \end{aligned}$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \\ c & 2 \end{pmatrix} \in M_{3x2} \,/\, a,b,c \in R \right\}$$

Para determinar si W_3 *es un subespacio hay que recordar que todo subespacio debe contener a vector nulo del espacio vectorial, pero en este caso el nulo que es* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *no pertenece a* W_3 *por no cumplir con la forma de todo vector de* W_3*, la cual consiste en que su segunda columna siempre tendrá* 0*,* 1 *y* 2*, respectivamente*

$\therefore W_3$ *no es un subespacio de V*

Procederemos a encontrar la intersección entre los subespacios hallados y una base para la misma. Sabemos que:

- $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3x2} \,/\, a - e = 0 \wedge b - f = 0 \right\}$
- $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3x2} \,/\, a - b = 0 \wedge c - d = 0 \wedge e - f = 0 \right\}$

Por tanto:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3x2} \,/\, a - e = b - f = a - b = c - d = e - f = 0 \right\}$$

Pero no es correcto dejar expresada la intersección en función de muchas condiciones. A estas hay que simplificarlas usando Gauss, así:

$$\begin{cases} a-e=0 \\ b-f=0 \\ a-b=0 \\ c-d=0 \\ e-f=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) A_{13}(-1) \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) A_{23}(1)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) A_{35}(-1) \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como ya no podemos seguir obteniendo más filas llenas de ceros, entonces la intersección sólo quedará en función de estas condiciones:

$$\therefore W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3x2} \,/\, a-e = b-f = e-f = c-d = 0 \right\}$$

Para obtener una base para la intersección debemos reemplazar las condiciones en el vector típico de la misma, pero antes hay que hacer unos cuantos despejes para dejar al vector en función de la menor cantidad posible de variables

$$\begin{array}{llll} a-e=0 & e-f=0 & b-f=0 & c-d=0 \\ a=e & f=e & b=f & c=d \\ & & b=e & \end{array}$$

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ d & d \\ e & e \end{pmatrix} = e\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B_{W_1 \cap W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \dim W_1 \cap W_2 = 2$$

Finalmente hallaremos las condiciones del subespacio suma y una base para el mismo, pero antes necesitamos las bases de los subespacios W_1 *y* W_2

Para W_1

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in W_1$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ a & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{W_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \dim W_1 = 4$$

Para W_2

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in W_2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \\ e & e \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \dim W_2 = 3$$

Una vez obtenidas las bases, podemos calcular cuál va a ser la dimensión de $W_1 + W_2$ *para saber cuántos vectores deberán estar en su base. Sabemos que:*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$
$$\dim(W_1 + W_2) = 4 + 3 - 2$$
$$\dim(W_1 + W_2) = 5$$

Por tanto habrá 5 *vectores en la base*

$$W_1 + W_2 = gen\{B_{W_1} \cup B_{W_2}\}$$

$$W_1 + W_2 = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pero el conjunto generador tiene 7 *vectores, eso significa que hay dos vectores de más, los cuales eliminaremos colocando los vectores de este conjunto en una matriz donde cada fila representa un vector y luego simplificamos hasta obtener la mayor cantidad posible de filas llenas de ceros*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_{15}(-1) \\ A_{36}(-1) \\ A_{46}(-1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_{25}(-1) \\ A_{75}(1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo que significa que los vectores 5 *y* 6 *dependen de los otros*

$$\therefore B_{W_1+W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora sólo falta hallar las condiciones del subespacio suma y para ello escribimos al vector típico como combinación lineal de los vectores de la base y simplificamos el sistema hasta obtener las condiciones, así:

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in W_1 + W_2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 + \alpha_5 & \alpha_2 + \alpha_5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & f \end{array}\right) \begin{matrix} A_{15}(-1) \\ A_{26}(-1) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & f-b \end{array}\right) A_{56}(-1) \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f-b+a-e \end{array}\right)$$

$$\therefore W_1 + W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3x2} \,/\, f - b + a - e = 0 \right\}$$

Tema 4: (10 puntos) Sea V un espacio vectorial y $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ una base de V. Se define el conjunto:

$$W = gen\{v_1+2v_2, -v_1+3v_2-v_3, v_1+3v_3\}$$

a) Determine una base para W, denotada como B_W

b) Si es factible, calcule la matriz de cambio de base de B a B_W

Siempre es recomendable primero leer bien el planteamiento del problema junto con lo que solicitan hallar. Razonando un poco, en el literal "b" nos piden calcular una matriz de cambio de base y para poder hacerlo la base B_W debe tener exactamente 3 vectores al igual que la base B de V

Si esto sucede significaría que la base de W es también una base para V, por tanto $W=V$. Así que para que sea factible resolver el literal "b" habrá que demostrar que el conjunto generador de W es una base para V

Para ello partimos de la hipótesis que nos dice que los vectores $\{v_1,v_2,v_3\}$ son linealmente independientes por ser una base para V, esto implicaría que:

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3 = O_V \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

Lo cual se cumple por ser linealmente independientes

Para demostrar que los vectores del conjunto generador de W son linealmente independientes los escribimos como combinación lineal y los igualamos al O_V

$$c_1(v_1+2v_2)+c_2(-v_1+3v_2-v_3)+c_3(v_1+3v_3)=O_V$$
$$(c_1-c_2+c_3)v_1+(2c_1+3c_2)v_2+(-c_2+3c_3)v_3=O_V$$

Con lo que hemos obtenido una ecuación parecida a la primera expresada en términos de $\{v_1,v_2,v_3\}$, y por hipótesis los escalares que los multiplican deben ser iguales a cero, con lo que planteamos un sistema de ecuaciones y procedemos a calcular los valores de los escales c_i

$$\begin{cases} c_1-c_2+c_3=0 \\ 2c_1+3c_2=0 \\ -c_2+3c_3=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) A_{12}(-2) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) A_{32}(4) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} A_{21}(1) \\ A_{22}(1) \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right) M_3\left(\frac{1}{13}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} A_{31}(-11) \\ A_{32}(-10) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad c_1=c_2=c_3=0$$

Si nos hubiese quedado al resolver el sistema una o más filas con ceros, el sistema tenía infinita soluciones y en ese caso los vectores del conjunto generador de W serían linealmente dependientes

$$\therefore B_W = \{v_1+2v_2; -v_1+3v_2-v_3; v_1+3v_3\}$$

Para hallar la matriz que nos piden vamos a suponer que $B_W = \{u_1, u_2, u_3\}$ *tal que:*

$$u_1 = v_1 + 2v_2 \qquad u_2 = -v_1 + 3v_2 - v_3 \qquad u_3 = v_1 + 3v_3$$

También recordamos que:

$$C_{B_W \to B} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [u_1]_B & [u_2]_B & [u_2]_B \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$[u_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [u_2]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad [u_3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C_{B_W \to B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Y para hallar la matriz de cambio que nos piden habrá que sacar la inversa de la matriz arriba encontrada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) A_{12}(-2) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) A_{32}(4) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} A_{21}(1) \\ A_{23}(1) \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 13 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) M_3\left(\frac{1}{13}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{array}\right) \begin{matrix} A_{31}(-11) \\ A_{32}(-10) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{13} & \frac{2}{13} & \frac{-3}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-6}{13} & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{array}\right)$$

$$\therefore C_{B \to B_W} = \begin{pmatrix} 9/13 & 2/13 & -3/13 \\ -6/13 & 3/13 & 2/13 \\ -2/13 & 1/13 & 5/13 \end{pmatrix}$$

Tema 5: (10 puntos) Sea A la matriz de los coeficientes del sistema lineal:

$$2x + y - z = a$$
$$x - y + 2z = b$$
$$x + 2y - 3z = c$$

a) Determine el espacio fila, el núcleo y el recorrido de A

b) Si $c = 2a + b$, determine si el vector $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pertenece a $\mathrm{Im}(A)$

La matriz A está dada por los coeficientes del sistema de ecuaciones, estos coeficientes corresponden a número que se encuentra delante de cada variable x, y y z, por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a)

- $F_A = gen\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

Sea $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in F_A$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 & b \\ -1 & 2 & -3 & c \end{array}\right) \begin{array}{c} A_{31}(2) \\ A_{32}(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -5 & a+2c \\ 0 & 1 & -1 & b+c \\ -1 & 2 & -3 & c \end{array}\right) A_{21}(-5) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a-5b-3c \\ 0 & 1 & -1 & b+c \\ -1 & 2 & -3 & c \end{array}\right)$$

$$\therefore F_A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in R^3 \,/\, a - 5b - 3c = 0 \right\}$$

- $Nu(A) = \left\{ X \in R^3 \,/\, AX = O_{R^3} \right\}$

Sea $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in Nu(A)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} A_{31}(-2) \\ A_{32}(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) A_{21}(-1) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$-3b+5c=0 \qquad a+2b-3c=0$$

$$\therefore Nu(A)=\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\in R^3 \,/\, a+2b-3c=0 \wedge 3b=5c\right\}$$

- $\operatorname{Re}(A)=\{Y\in R_3 \,/\, AX=Y;\, X\in R^3\}$

Sea $Y=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\in \operatorname{Re}(A)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 2 & b \\ 1 & 2 & -3 & c \end{array}\right)\begin{array}{c} A_{31}(-2) \\ A_{32}(-1) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 5 & a-2c \\ 0 & -3 & 5 & b-c \\ 1 & 2 & -3 & c \end{array}\right) A_{21}(-1)\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a-b-c \\ 0 & -3 & 5 & b-c \\ 1 & 2 & -3 & c \end{array}\right)$$

$$a-b-c=0$$

$$\therefore \operatorname{Re}(A)=\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\in R^3 \,/\, a-b-c=0\right\}$$

b)

Para que el vector u pertenezca a la imagen de A *debe cumplir con la condición de la misma, cabe recalcar que la imagen de una matriz es también conocida como el recorrido de una matriz*

Sea $u=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$*, donde* $c=2a+b$

$$\begin{aligned} &a-b-c=0 \\ &a-b-(2a+b)=0 \\ &a-b-2a-b=0 \\ &-a-2b=0 \end{aligned}$$

Pero hay que tener en cuenta que $-a-2b$ *no necesariamente tiene que ser igual a* 0

$$\therefore u\notin \operatorname{Im}(A)$$