# Instituto de Ciencias Matemáticas

**Algebra Lineal: Solución de la Segunda Evaluación**

**1. (20 puntos) Califique como verdaderas o falsas a las siguientes proposiciones. Justifique formalmente sus repuestas.**

**a) Una transformación lineal cuyo núcleo es $\{O_V\}$ , es invertible**

*Sea* $T: R^2 \to R^3$ *una transformación lineal definida por* $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix}$

*Si obtenemos su núcleo fácilmente nos damos cuenta que es* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *pero como la* $\dim V \neq \dim W$ , $T$ *no es invertible.*

*También es válido decir que el hecho que la transformación lineal sea inyectiva no necesariamente debe ser sobreyectiva*

$\therefore$ *Falso*

**b)** $\forall r,t \in R:\ A = \begin{pmatrix} rSen(t) & Cos(t) \\ Cos(t) & -rSen(t) \end{pmatrix}$ **es ortogonal**

*Para que la matriz sea ortogonal, el producto interno entre sus columnas debe ser igual a* $0$ *y al mismo tiempo el producto interno de cada columna consigo misma debe ser igual a* $1$. *Entonces, utilizando el producto interno canónico:*

$$\left( \begin{pmatrix} rSen(t) \\ Cos(t) \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} Cos(t) \\ -rSen(t) \end{pmatrix} \right) = 0$$
$$rSen(t)Cos(t) - rSen(t)Cos(t) = 0$$
$$0 = 0$$

$$\left( \begin{pmatrix} rSen(t) \\ Cos(t) \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} rSen(t) \\ Cos(t) \end{pmatrix} \right) = 1$$
$$r^2Sen^2(t) + Cos^2(t) = 1$$
$$r^2Sen^2(t) + 1 - Sen^2(t) = 1$$
$$Sen^2(t)\left[r^2 - 1\right] = 0$$

$$Sen^2(t) = 0 \qquad r^2 - 1 = 0$$
$$Sen(t) = 0 \qquad r^2 = 1$$
$$t = 0 \wedge t = 2\pi \qquad r = \pm 1$$

*Por lo tanto la igualdad sólo se cumple para los valores de* $r$ *y* $t$ *encontrados y no para todos los reales. Se igual procedimiento para la segunda columna*

$\therefore$ *Falso*

**c) Sea $V$ un espacio vectorial real con producto interno. Sean $u, v \in V$ dos vectores ortonormales. Si los vectores $\alpha u + \beta v$ y $\alpha u - \beta v$ son ortogonales, entonces $|\alpha| = |\beta|$**

$$(\alpha u + \beta v / \alpha u - \beta v) = 0$$
$$(\alpha u / \alpha u) + (\alpha u / -\beta v) + (\beta v / \alpha u) + (\beta v / -\beta v) = 0$$
$$\alpha^2 (u/u) - \alpha\beta(u/v) + \alpha\beta(u/v) - \beta^2 (v/v) = 0$$

*Pero como los vectores $u$ y $v$ son ortonormales, sabemos que:* $(u/u) = (v/v) = 1$

$$\alpha^2 (u/u) - \beta^2 (v/v) = 0$$
$$\alpha^2 - \beta^2 = 0$$
$$\alpha^2 = \beta^2$$
$$|\alpha| = |\beta|$$

$\therefore$ *Verdadero*

**d) Si $\lambda$ es un valor propio de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces $\left(A + A^{-1}\right)^{\lambda} = 2^{\lambda} A$**

*Primero tenemos que darnos cuenta la matriz $A$ es ortogonal, eso se ve fácilmente porque el producto interno entre sus columnas es cero y al mismo tiempo el producto interno de cada columna consigo misma es uno, entonces:*

$$A^{-1} = A^T \rightarrow A^{-1} = A$$

*También como $A$ es una matriz diagonal sus valores propios son los elementos de la diagonal principal, es decir:*

$$\lambda = 1$$
$$\lambda = -1$$

*Finalmente:*

$$\left(A + A^{-1}\right)^{\lambda} = 2^{\lambda} A$$
$$\left(A + A\right)^{1} = 2^{1} A$$
$$2A = 2A$$

$$\left(A + A^{-1}\right)^{\lambda} = 2^{\lambda} A$$
$$\left(A + A\right)^{-1} = 2^{-1} A$$
$$(2A)^{-1} = \frac{1}{2} A$$
$$(2)^{-1}(A)^{-1} = \frac{1}{2} A$$
$$\frac{1}{2} A = \frac{1}{2} A$$

$\therefore$ *Verdadero*

**2. (15 puntos) Sea $L: M_{2x2} \rightarrow R^2$ una transformación lineal tal que:**

$$L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \textbf{ y } L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Determine:**

**a)** $Nu(L), \operatorname{Im}(L)$

**b) La matriz asociada a $L$ respecto a las bases canónicas de cada espacio**

*La mejor opción es encontrar la regla de correspondencia de $L$, y para ello necesitamos una base del espacio de partida y para armarla usamos los cuatro vectores que nos dan de datos, así:*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

*Y al vector típico de $M_{2x2}$ lo escribimos como combinación lineal de los vectores de esta base, luego planteamos el sistema de ecuaciones y obtenemos los escalares en términos de $a, b, c, d$*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ b = \alpha_1 \\ c = \alpha_1 + \alpha_3 \\ d = \alpha_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} c = b + \alpha_3 \\ \alpha_3 = c - b \end{array} \qquad \begin{array}{l} a = d + c - b + \alpha_4 \\ \alpha_4 = a + b - c - d \end{array}$$

*Finalmente reemplazamos los datos en la combinación lineal inicial:*

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (d)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (c-b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a+b-c-d)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+d \\ c+d \end{pmatrix}$$

*Calculando el núcleo tenemos:*

$$\begin{cases} c + d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} c + d = 0 \\ c = -d \end{array}$$

$$\therefore Nu(L) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} / c + d = 0 \right\}$$

*Y la imagen:*

$$\begin{cases} c+d=x \\ c+d=y \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y-x \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} y-x=0 \\ x=y \end{array}$$

$$\therefore \operatorname{Im}(L)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \,/\, x=y\right\}$$

*Para obtener la matriz asociada a la base canónica, sabemos que:*

$$B_{C\,M_{2x2}}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad B_{CR^2}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \left[T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{B_{CR^2}} & \left[T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{B_{CR^2}} & \left[T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{B_{CR^2}} & \left[T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{B_{CR^2}} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**3. (15 puntos) Sea** $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

**Determine:**

a) **Los valores propios de** $A$

b) **Una base para cada espacio propio de** $A$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2-1\right]-1\left[(a-\lambda)-1\right]+1\left[1-(a-\lambda)\right]=0$$
$$(a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2-1\right]-(a-\lambda)+1+1-(a-\lambda)=0$$
$$(a-\lambda)^3-3(a-\lambda)+2=0$$

*Ahora realizamos un cambio de variable para visualizar mejor las cosas:*

$$x=a-\lambda$$
$$x^3-3x+2=0$$

*Aplicando división sintética:*

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x^2+x-2)=0$$
$$(x-1)(x+2)(x-1)=0$$

$$x=1 \qquad x=-2$$
$$a-\lambda=1 \qquad a-\lambda=-2$$
$$\lambda=a-1 \qquad \lambda=a+2$$

*Y finalmente hallamos cada espacio propio reemplazando cada* $\lambda$ *en la matriz* $A-\lambda I$

$E_{\lambda=a-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a+b+c=0$$
$$a=-b-c$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B_{E_\lambda}=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$E_{\lambda=a+2}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-b+c=0 \qquad a-c=0$$
$$b=c \qquad a=c$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore B_{E_\lambda}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

*Ramiro J. Saltos*

**4. (5 puntos) Determine si la matriz** $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ **es diagonalizable**

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&1\\1&0&1-\lambda\end{pmatrix}$$

*Calculamos la ecuación característica:*

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2\right]-(1-\lambda)=0 \qquad (1-\lambda)=0$$
$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right]=0 \qquad \lambda=1$$

$$(1-\lambda)^2-1=0$$
$$(1-\lambda-1)(1-\lambda+1)=0 \qquad \lambda=0 \qquad 2-\lambda=0$$
$$(-\lambda)(2-\lambda)=0 \qquad \lambda=2$$

*Debemos recordar el corolario que dice: "Si* $A\in M_{nxn}$ *tiene* $n$ *valores propios distintos, entonces* $A$ *es diagonalizable"*

*Como tenemos tres valores propios distintos, entonces* $A$ *es diagonalizable*

*Ramiro J. Saltos*

**5. (15 puntos) Sea** $V = R_3$ **y** $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 / 3x - 2y + 6z = 0 \right\}$ **un subespacio de** $V$

**Determine:**

a) **El complemento ortogonal de** $W$

b) **La proyección de** $v$ **sobre** $W$ **si se conoce que** $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

*Para calcular el complemente primero necesitamos una base de W*

$$3x - 2y + 6z = 0$$
$$2y = 3x + 6z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x + 6z \\ 2z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Sea* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in W^{\perp}$

$$\left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad \left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$2a + 3b = 0 \qquad 3b + c = 0$$
$$2a = -3b \qquad c = -3b$$

$$\therefore W^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in R^3 / 2a + 3b = c + 3b = 0 \right\}$$

*Para hallar la proyección del vector que nos piden es mejor calcularla sobre* $W^{\perp}$ *debido a que la base de este subespacio tiene un solo vector y ortonormalizarla será más sencillo.*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3b \\ 2b \\ -6b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow B_{W^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

*Ahora procedemos a ortonormalizar esta base:*

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \bullet v_1$$

$$\|v_1\| = \sqrt{(v_1 / v_1)}$$
$$\|v_1\| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}\right)}$$
$$\|v_1\| = \sqrt{9+4+36}$$
$$\|v_1\| = \sqrt{49} = 7$$

$$\therefore B^*{}_{W^\perp} = \left\{ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

*Vamos a suponer que* $v$ *se puede escribir como la suma de dos vectores* $h \in W$ *y* $p \in W^\perp$*, hallaremos* $p$ *y luego contestaremos la pregunta al encontrar* $h = v - p$

$$p = \mathrm{Proy}_{W^\perp} v$$
$$p = (v \mid u_1)u_1$$

$$p = \left(\frac{1}{49}\right)\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$p = \left(\frac{1}{49}\right)(9+2-24) \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$p = \left(\frac{13}{49}\right)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -39/49 \\ 26/49 \\ 52/49 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} -186/49 \\ 75/49 \\ 248/49 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathrm{Proy}_W v = \begin{pmatrix} -186/49 \\ 75/49 \\ 248/49 \end{pmatrix}$$

*Ramiro J. Saltos*