Escuela Superior Politécnica del Litoral

Instituto de Ciencias Matemáticas

Solución y Rúbrica de la Tercera Evaluación de Algebra Lineal

Nombre:…………………………………………………………………………………….. Paralelo:………………

Firma:………………………………………………………………………………………… Septiembre 15,2011

1.- (20 puntos) Defina:

**Núcleo de una transformación lineal**.- Sea T: V → W una transformación lineal. El núcleo de T es el conjunto de todos los vectores de V que mediante T se transforman en el neutro aditivo de W.

**Recorrido de una matrizAmxn**.- Es el conjunto de todos los vectores Y de Rm, para los que existe un vector X de Rn tal que AX = Y.

**Conjunto ortonormal de vectores.-** Es un conjunto {v1,v2,v3,…vn} de vectores de un espacio vectorial con producto interno tal que (vi,vj)= 0 si i≠j , y es igual a 1 si i=j.

**Conjunto generador de un Espacio Vectorial**.- Es un conjunto {v1,v2,v3,…vn} de vectores de V tal que todo vector de V puede escribirse como combinación lineal de los vectores del conjunto.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Excelente** |
| No escribe definiciones coherentes , o deja el espacio vacío | Presente una idea relacionada con el concepto pera falta precisión o añade elementos adicionales incorrectos. | Presenta en forma explícita todos los elementos claves de los conceptos. |
| **0-1** | **2-4** | **5** |

2.- (20 puntos) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

x + y + z = 2

2x + 3y + 3z = 5

2x + 3y + (**k**2-1)z= **k**+3

Determine los valores de **k** para que el sistema lineal resultante tenga:

1. Solución única
2. Infinitas soluciones
3. Ninguna solución

Representamos el sistema haciendo uso de la matriz aumentada:



Empleando operaciones elementales con renglones, nos queda:



Si , el sistema tiene infinitas soluciones: , 

Si , no hay solución para el sistema y la matriz aumentada se ve de la siguiente manera:



Si  toma cualquier valor que no sea ni  ni , la única solución del sistema es:

, , 

|  |  |
| --- | --- |
| **CRITERIO** | **PUNTAJE** |
| **Plantea la matriz aumentada correctamente** | **hasta 3** |
| **Realiza adecuadamente las operaciones elementales con renglones** | **hasta 4** |
| **Concluye, justificando, que con el sistema tiene infinitas soluciones** | **hasta 4** |
| **Concluye, justificando, que con el sistema es inconsistente** | **hasta 4** |
| **Concluye, justificando, que si  y , el sistema tiene solución única y encuentra dicha solución única** | **hasta 5** |

3.- (20 puntos) Sea T:V→W una transformación lineal. Si dim V= 3 y dim W = n, demuestre que:

a) Si n= 3, T es inyectiva si y solo si T es sobreyectiva.

b) Si n > 3, T no es sobreyectiva

c) Si T es inyectiva, n ≥ 3

**PRUEBA:**

1. PD: Si T es inyectiva, entonces T es sobreyectiva.

Si T es inyectiva, entonces .

Por el teorema de la dimensión, tenemos:

(ya que )

1. PD: Si T es sobreyectiva, entonces T es inyectiva.

Si T es sobreyectiva, entonces

Por el teorema de la dimensión, tenemos:

(ya que )

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , deja el espacio vacío o solo intenta adivinar | Demuestra la bicondicional en una sola dirección. | Demuestra la bicondicional en una sola dirección e intenta demostrarla en la otra dirección | Demostración completa y correcta |
| **0** | **1-4** | **5-7** | **8** |

1. Para este caso se puede demostrar la contrarrecíproca de la proposición dada:

PD: Si T es sobreyectiva, entonces .

Si T es sobreyectiva, entonces .

Por el teorema de la dimensión, tenemos:

Por otro lado, tenemos que:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , deja el espacio vacío o solo intenta adivinar | Determina la contrarrecíproca de la proposición y utiliza el teorema de la dimensión pero no logra plantear desigualdad alguna que sirva para la demostración | Determina la contrarrecíproca de la proposición, utiliza el teorema de la dimensión y plantea una desigualdad que sirve para la demostración pero no determina la conclusión. | Demostraciones completas y correctas |
| **0** | **1-3** | **4-5** | **6** |

1. PD: Si T es inyectiva, n ≥ 3

Si T es inyectiva, entonces

Por el teorema de la dimensión, tenemos:

Por otro lado, ya que Im (T) es un subespacio vectorial de W, se tiene que:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , deja el espacio vacío o solo intenta adivinar | Determina que , utiliza el teorema de la dimensión pero no logra determinar el rango de T. | Determina que , utiliza el teorema de la dimensión y determina el rango de T; pero no plantea una desigualdad que sirva para la demostración. | Demostraciones completas y correctas |
| **0** | **1-3** | **4-5** | **6** |

4.- (20 puntos) En el espacio P2, se define el producto escalar:

< p, q > = p (−1) q (−1) + p (0) q (0) + p (1) q (1).

a) Obtenga el complemento ortogonal de W = gen {1}.

c) Determine los polinomios p(x) tales que proyW p(x) = ½.

d) Determine los polinomios de P1 que formen un ángulo de 60 grados con x2.

b) Encuentre la proyección ortogonal de x2− 1 sobre S = gen { 1, x }

**SOLUCION:**

Ya que W = gen {1}, entonces una base de W es B = {1}. Con esto:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , deja el espacio vacío o solo intenta adivinar | Indica que B = {1} es una base de W y solo define el complemento ortogonal de W | Indica que B = {1} es una base de W y determina el complemento ortogonal de W pero comete errores de cálculo o no determina correctamente las condiciones. | Cálculos y condiciones correctas. |
| **0** | **1-2** | **3-4** | **5** |

1. Definamos

Para esto, necesitamos una base ortonormal de W.

A partir de la base B = {1}, tenemos:

Con lo que una base ortonormal de W es

Entonces,

, donde

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , deja el espacio vacío o solo intenta adivinar | Determina la base ortonormal de W y solo plantea la formula que le permitiría determinar la proyección. | Determina la base ortonormal de W y calcula la proyección pero comete errores de cálculo o no determina correctamente las condiciones. | Cálculos y condiciones correctas. |
| **0** | **1-2** | **3-4** | **5** |

1. Definamos

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , deja el espacio vacío o solo intenta adivinar | Solo plantea correctamente la formula que le permitiría determinar el ángulo entre loa vectores | Plantea correctamente la formula que le permitiría determinar el ángulo entre loa vectores, realiza los cálculos pero comete errores en los mismos o no determina correctamente las condiciones. | Cálculos y condiciones correctas. |
| **0** | **1-2** | **3-4** | **5** |

1. Para este caso primero debemos determinar una base ortonormal de S.

Siendo una base de S; con esto determinamos una base ortonormal por el proceso de Gram – Schmidt.

De ahí que, la base ortonormal de S es

Luego, la proyección es:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , deja el espacio vacío o solo intenta adivinar | Plantea el hecho de que es necesario determina una base ortonormal de S y al calcularla comete errores. | Determina correctamente una base ortonormal de S pero comete errores al calcular la proyección. | Cálculos correctos. |
| **0** | **1-2** | **3-4** | **5** |

5.-(20 puntos) Sea T: P2→P2 la transformación lineal definida por:

T(ax2+bx+c)=2ax2+(3a+2b+c)x+(4a+b+2c)

De serposible,determineuna base de P2 respecto de la cual la matriz que representa a T sea una matriz diagonal.

La representación matricial de  con respecto a la base  es:



El polinomio característico de la matriz , es: 

Los valores propios de , son: 

Entonces, la matriz  es diagonalizable; ya que es una matriz cuadrada de tamaño 3 con 3 valores propios distintos. Por tanto, la transformación lineal  es diagonalizable.

Con , se obtiene: 

De aquí se obtiene que: 

Con , se obtiene: 

De aquí se obtiene que: 

Con , se obtiene: 

De aquí se obtiene que: 

Finalmente, la matriz asociada a  con respecto a la base  es la matriz diagonal:



|  |  |
| --- | --- |
| **CRITERIO** | **PUNTAJE** |
| **Encuentra correctamente la matriz asociada a  con respecto a la base canónica de** | **hasta 2** |
| **Calcula correctamente los valores propios de la representación matricial de** | **hasta 4** |
| **Determina con argumentos que  es diagonalizable** | **hasta 2** |
| **Encuentra los 3 vectores de la base  solicitada (hasta 4 puntos por cada vector)** | **hasta 12** |