

Aquí se presentan algunas reglas de integración, las cuales nos ayudaran a resolver los ejercicios propuestos en Calculo Integral:

1. $\int kf(u)du = k \int f(u)du$
2. $\int [f(u) \pm g(u)]du = \int f(u)du \pm \int g(u)du$
3. $\int adu = au + C; a \in \mathbb{R}$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int e^{au+b} du = \frac{e^{au+b}}{a} + C; a, b \in \mathbb{R}$
7. $\int a^{bu+c} du = \frac{a^{bu+c}}{b \ln a} + C; a, b, c \in \mathbb{R}$
8. $\int \sin(au+b)du = -\frac{\cos(au+b)}{a} + C; a, b \in \mathbb{R}$
9. $\int \cos(au+b)du = \frac{\sin(au+b)}{a} + C; a, b \in \mathbb{R}$
10. $\int \tan(au+b)du = -\frac{1}{a} \ln|\cos(au+b)| + C; a, b \in \mathbb{R}$
11. $\int \cot(au+b)du = \frac{1}{a} \ln|\sin(au+b)| + C; a, b \in \mathbb{R}$
12. $\int \sec(au+b)du = \frac{1}{a} \ln|\sec(au+b) + \tan(au+b)| + C; a, b \in \mathbb{R}$
13. $\int \csc(au+b)du = \ln|\csc(au+b) - \cot(au+b)| + C; a, b \in \mathbb{R}$
14. $\int \sec(au+b)^2 du = \frac{\tan(au+b)}{a} + C; a, b \in \mathbb{R}$
15. $\int \csc(au+b)^2 du = -\frac{\cot(au+b)}{a} + C; a, b \in \mathbb{R}$
16. $\int \sec(au+b)\tan(au+b)du = \frac{\sec(au+b)}{a} + C; a, b \in \mathbb{R}$
17. $\int \csc(au+b)\cot(au+b)du = -\frac{\csc(au+b)}{a} + C; a, b \in \mathbb{R}$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-(bu+c)^2}} = \frac{1}{b} \left[\arcsen\left(\frac{bu+c}{a}\right) \right] + C; a, b, c \in \mathbb{R}$
19. $\int \frac{du}{a^2+(bu+c)^2} = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{a} \arctg\left(\frac{bu+c}{a}\right) \right] + C; a, b, c \in \mathbb{R}$
20. $\int \frac{du}{(bu+c)\sqrt{(bu+c)^2-a^2}} = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{|bu+c|}{a}\right) \right] + C; a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Sustitución Universal:

$$21. \tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \rightarrow \begin{cases} \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{cases}$$

$$22. \tan(x) = t \rightarrow \begin{cases} \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{cases}$$

Integrales por sustitución.

Cuando se presenten funciones con reglas de correspondencia un tanto más complejas, se puede transformar en integrales inmediatas con un cambio de variable.

“Para cambiar de variable tenemos que tener en cuenta que la derivada de la función escogida debe estar presente”.

$u = g(x)$ $du = g'(x)dx$	$\int f(g(x)) g'(x)dx = \int f(u) du$
---------------------------	---------------------------------------

Integración por partes.

Sean dos funciones $u(x)$ y $v(x)$ donde " u " y " v " están en función de " x ". Y se presenta la siguiente estructura por la derivada que surge del producto entre las dos funciones:

$$d(u \cdot v) = u dv + v du \Rightarrow \int d(u \cdot v) = \int u dv + \int v du$$
$$\int u dv = \int d(u \cdot v) - \int v du \Rightarrow \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Tips: tomar en cuenta para el cambio de variable de " u " en este orden descendente:

I: Función trigonométrica inversa

L: Función logarítmica

A: Función algebraica

T: Función trigonométrica

E: Función Exponencial

Tips: tomar en cuenta para el cambio de variable de " u " en este orden descendente:

"Escoger de variable " u " según su conveniencia"

"Escoger de variable " u " la función que no sea una integral inmediata"

Integrales de funciones trigonométricas

Para estos casos es indispensable recordar las identidades trigonométricas. Por ello se le enunciarán las más importantes

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$\csc^2(x) = 1 + \cot^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) \begin{cases} \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 1 - 2\sin^2(x) \\ 2\cos^2(x) - 1 \end{cases} = \begin{cases} \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\ \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \end{cases}$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \sin(y) \cos(x)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

"NO ES LO MISMO APRENDER QUE ENTENDER. TODOS LOS TRIUNFOS NACEN CUANDO NOS ATREVEMOS A EMPEZAR"

Yandry Tierra G.

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}$$

$$u = nx ; v = kx \Rightarrow (n, k) \in \mathbb{R}$$

$$\sin(u) + \sin(v) = 2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$\sin(u) \cos(v) = \frac{1}{2} [\sin(u+v) + \sin(u-v)]$$

$$\sin(u) - \sin(v) = 2 \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \cos\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

$$\cos(u) \sin(v) = \frac{1}{2} [\sin(u+v) - \sin(u-v)]$$

$$\cos(u) - \cos(v) = -2 \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \sin\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

$$\cos(u) \cos(v) = \frac{1}{2} [\cos(u+v) + \cos(u-v)]$$

$$\cos(u) + \cos(v) = 2 \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \cos\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

$$\sin(u) \sin(v) = -\frac{1}{2} [\cos(u+v) - \cos(u-v)]$$

CASO I: Integrales que contienen senos y cosenos.

1.- Si el valor de “n” es un numero IMPAR utilizar: $\int \sin^n(x) dx = \int \sin(x) \sin^{n-1}(x) dx$ $\int \cos^n(x) dx = \int \cos(x) \cos^{n-1}(x) dx$	1.- Si el valor de “n” es un numero PAR utilizar: $\int \sin^n(x) dx = \int [\sin^2(x)]^{\frac{n}{2}} dx$ $\int \cos^n(x) dx = \int [\cos^2(x)]^{\frac{n}{2}} dx$
$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$	$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

Al presentarse integrales de la siguiente manera “ $\int \sin^n(x) \cos^m(x) dx$ ” tener en cuenta que:

“Tener prioridad cuando “n” o “m” es impar”

Si “n” es impar y “m” es par o Si “n” es par y “m” es impar

$$\text{“n” impar} \Rightarrow \int \sin^n(x) \cos^m(x) dx = \int \sin(x) \sin^{n-1}(x) \cos^m(x) dx$$

$$\text{“m” impar} \Rightarrow \int \sin^n(x) \cos^m(x) dx = \int \sin^n(x) \cos(x) \cos^{m-1}(x) dx$$

“NO ES LO MISMO APRENDER QUE ENTENDER. TODOS LOS TRIUNFOS NACEN CUANDO NOS ATREVEMOS A EMPEZAR”

Yandry Tierra G.

Si “n” y “m” son pares o Si “n” y “m” son impares

$$PAR \Rightarrow \int \sin^n(x) \cos^m(x) dx = \int [\sin^2(x)]^{\frac{n}{2}} [\cos^2(x)]^{\frac{m}{2}} dx$$

$$IMPAR \Rightarrow \begin{cases} \int \sin^n(x) \cos^m(x) dx = \int [\sin(x) \sin^{n-1}(x)] \cos^m(x) dx \\ \int \sin^n(x) \cos^m(x) dx = \int \sin^n(x) [\cos(x) \cos^{m-1}(x)] dx \end{cases}$$

CASO III: Integrales que contienen tangentes y cotangentes.

Tratar de conseguir las estructuras a continuación:

$$\int \tan^n(x) dx = \int \tan^2(x) \tan^{n-2}(x) dx \quad \text{“o”} \quad \int \cot^n(x) dx = \int \cot^2(x) \cot^{n-2}(x) dx$$

De allí utilizar las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \sec^2(x) &= 1 + \tan^2(x) \Rightarrow \tan^2(x) = \sec^2(x) - 1 \\ \csc^2(x) &= 1 + \cot^2(x) \Rightarrow \cot^2(x) = \csc^2(x) - 1 \end{aligned}$$

CASO IV: Integrales que contienen tangentes y cotangentes.

Tratar de conseguir las estructuras a continuación:

$$\int \tan^m(x) \sec^n(x) dx \quad \text{“o”} \quad \int \cot^m(x) \csc^n(x) dx$$

Si “n” es par y “m” par o impar, llevar a la siguiente estructura

$$\int \tan^m(x) \sec^n(x) dx = \int \tan^m(x) \sec^2(x) \sec^{n-2}(x) dx$$

$$\int \cot^m(x) \csc^n(x) dx = \int \cot^m(x) \csc^2(x) \csc^{n-2}(x) dx$$

Si “m” es impar y “n” par o impar, llevar a la siguiente estructura

$$\int \tan^m(x) \sec^n(x) dx = \int \tan^{m-1}(x) \sec^{n-1}(x) \tan^m(x) \sec^n(x) dx$$

$$\int \cot^m(x) \csc^n(x) dx = \int \cot^{m-1}(x) \csc^{n-1}(x) \cot^m(x) \csc^n(x) dx$$

De allí utilizar las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \sec^2(x) &= 1 + \tan^2(x) \Rightarrow \tan^2(x) = \sec^2(x) - 1 \\ \csc^2(x) &= 1 + \cot^2(x) \Rightarrow \cot^2(x) = \csc^2(x) - 1 \end{aligned}$$

CASO V: Integración por sustitución trigonométrica.

➤ Si se tiene $\sqrt{a^2 - x^2}$ sustituirlo por $x = a \sin(t)$ y así obtener:

$$\sqrt{a^2 - (a \sin(t))^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} = \sqrt{a^2 [1 - \sin^2(t)]} = \sqrt{a^2 [\cos^2(t)]} = a \cos(t)$$

➤ Si se tiene $\sqrt{a^2 + x^2}$ sustituirlo por $x = a \tan(t)$ y así obtener:

$$\sqrt{a^2 + (a \tan(t))^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2(t)} = \sqrt{a^2 [1 + \tan^2(t)]} = \sqrt{a^2 [\sec^2(t)]} = a \sec(t)$$

➤ Si se tiene $\sqrt{x^2 - a^2}$ sustituirlo por $x = a \sec(t)$ y así obtener:

$$\sqrt{(a \sec(t))^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2(t) - a^2} = \sqrt{a^2 [\sec^2(t) - 1]} = \sqrt{a^2 [\tan^2(t)]} = a \tan(t)$$

CASO VI: Integración de funciones racionales

Procedimiento General:

Por cada factor de la forma $(ax + b)^k$, se espera que la descomposición tenga los términos:

$$\frac{A_1}{(ax + b)} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \frac{A_3}{(ax + b)^3} + \dots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}; A_1, A_2, A_3, \dots, A_k \text{ son constantes}$$

Por cada factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^m$, se espera que la descomposición tenga los términos. $Du = 2ax + b$, es decir ocupar la derivada de la función u .

$$\frac{B_1(du) + C_1}{\left(\frac{ax^2 + bx + c}{u}\right)} + \frac{B_2(du) + C_2}{\left(\frac{ax^2 + bx + c}{u}\right)^2} + \dots + \frac{B_k(du) + C_k}{\left(\frac{ax^2 + bx + c}{u}\right)^k}; B_k, C_k \text{ son constantes}$$

MATHYING

Superar cada obstáculo en la vida es tu deber,
el nuestro es que venzas los de la universidad